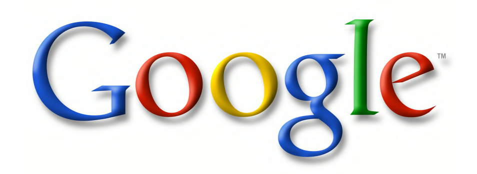


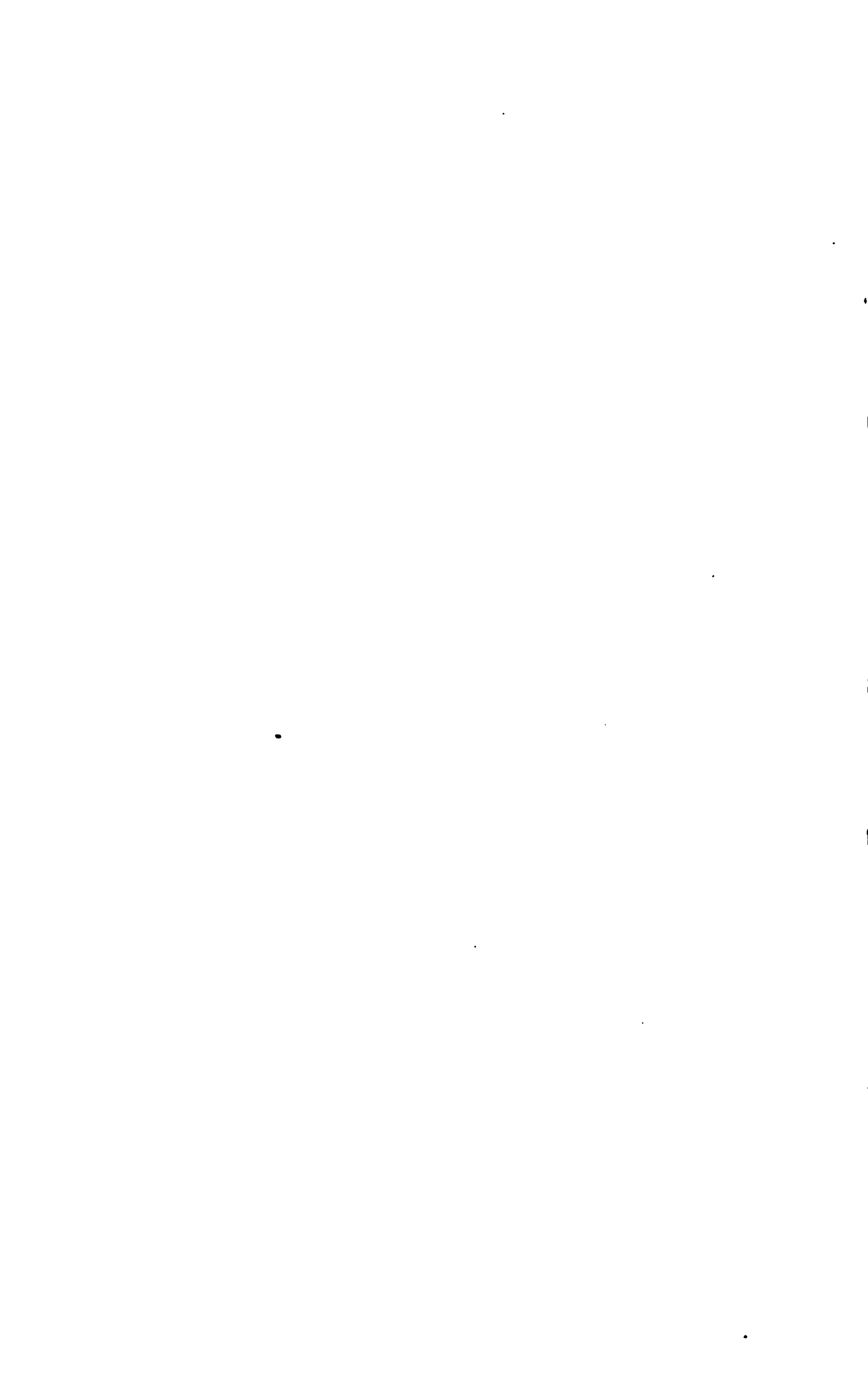












LEHRBUCH

DER

EXPERIMENTALPHYSIK

BEARBEITET VON

DR. ADOLPH WÜLLNER,

PROFESSOR DER PHYSIK AN DER KÖNIGL. POLYTECHNISCHEN SCHULE ZU AACHEN.

ZWEITER BAND.

DIE LEHRE VOM LICHT.

MIT VIELEN HOLZSCHNITTEN UND VIER SPECTRALTAFELN.



[DRITTE AUSGABE.]

ZWEITE VIELFACH UMGEARBEITETE UND VERBESSERTE AUFLAGE.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1871.

INHALTSVERZEICHNISS

ZUM ZWEITEN BANDE.

DIE LEHRE VOM LICHT.

Erster Abschnitt.

Ausbreitung und Wahrnehmung des Lichtes.

Erstes Kapitel.

Die ungestörte Ausbreitung des Lichtes.

Seite

Zweites Kapitel.

Die gestörte Ausbreitung des Lichtes; Reflexion und Brechung.

Drittes Kapitel.

Absorption und Emission des Lichtes und die sie begleitenden Erscheinungen.

Viertes Kapitel.

Von der Wahrnehmung des Lichtes.

Zweiter Abschnitt.

Theoretische Optik.

Erstes Kapitel.

Interferenz und Beugung des Lichtes.

Zweites Kapitel.

Die Polarisation des Lichtes.

Drittes Kapitel.

Von der Doppelbrechung des Lichtes.

Viertes Kapitel.

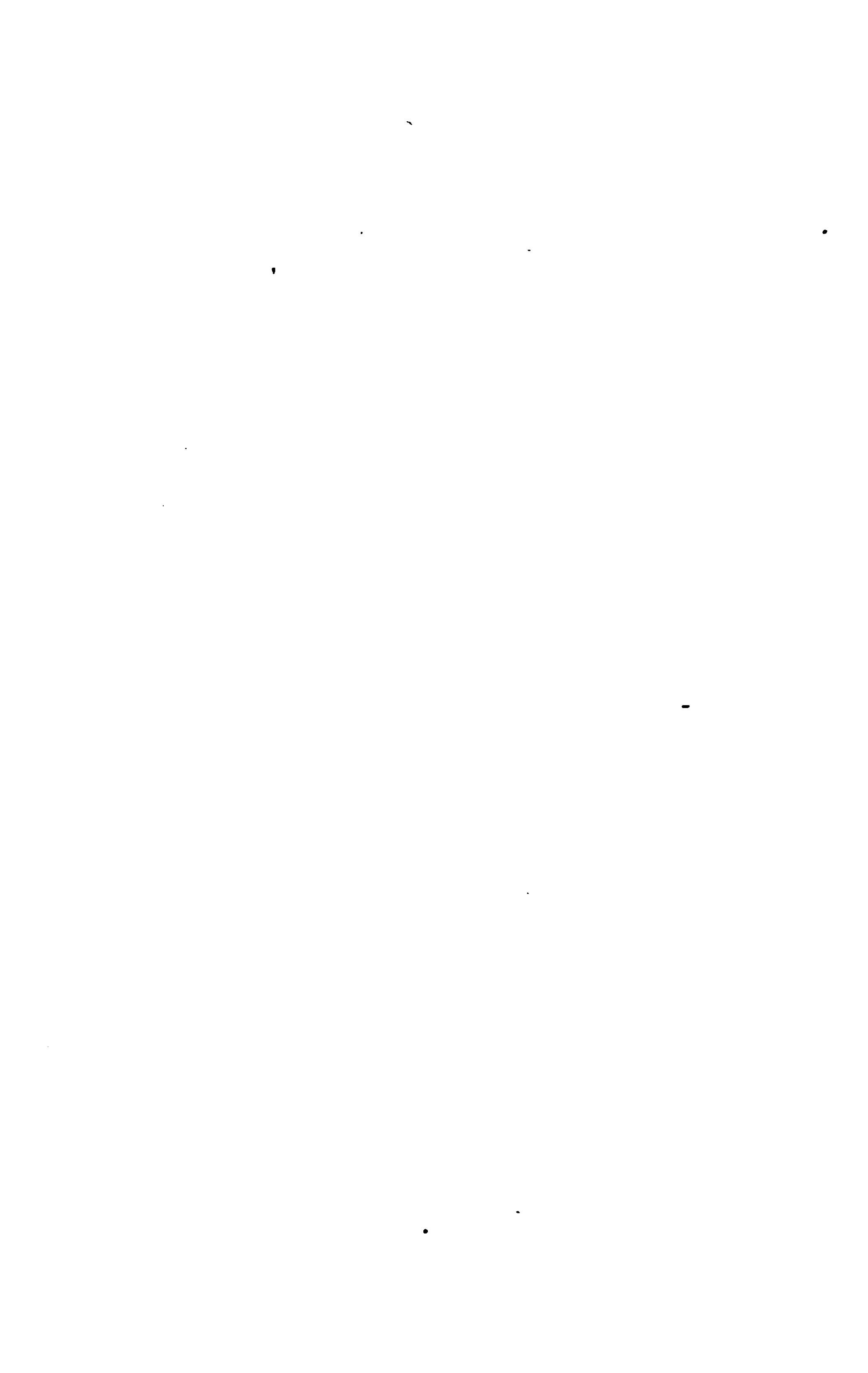
Interferenz des polarisirten Lichtes.

Berichtigungen zum 2. Bande.

p. 63 Fig. 29 setze an das Ende der Verlängerung von QJ. den Buchstaben F.
p. 90 Zeile 22 v. o. statt $i - r + i' - r$ lies $i - r + i' - r'$.
p. 114 „ 19 „ u. „ JA lies Ja.
p. 144 „ 3 „ „ hinter „constant sei" schalte ein „wenn d die Dichte des brechenden Mittels bedeutet.
p. 177 „ 9 „ „ statt: vor der Brechung die lies: die vor der Brechung.
p. 181 „ 18 „ o. „ $\frac{1}{f} = \frac{n-1}{r} - \frac{1}{na}$ lies $\frac{1}{f} = \frac{n-1}{nr} - \frac{1}{na}$
p. 181 „ 24 „ o. „ $\frac{1}{f} = -\frac{n-1}{r} - \frac{1}{na}$ lies $\frac{1}{f} = -\frac{n-1}{nr} - \frac{1}{na}$
p. 183 „ 6 „ o. „ Sd lies SD.
p. 185 „ 7 „ o. setze vor die rechte Seite der Gleichung das Zeichen —.
p. 218 „ 11 „ o. tilge das erste „und d_1".
p. 242 „ 2 „ o. statt D lies E.
p. 355 „ 21 „ o. statt $\varrho\varrho\varrho d\delta a$ lies $\varrho\varrho\varrho\varrho d\delta a$.
p. 366 „ 3 „ u. statt $\frac{m+1}{m}$ lies $\frac{52m+1}{52m}$.
p. 399 „ 6 „ o. gieb der rechten Seite der Gleichung den Factor A^2.
p. 407 „ 9 „ o. statt $\left(\frac{\sin^2 \frac{nb \sin \alpha}{\lambda} \pi}{n . \sin^2 \frac{b . \sin \alpha}{\lambda} \pi}\right)^2$ lies

$$\left(\frac{\sin \frac{2\, nb . \sin \alpha}{\lambda} \pi}{n . \sin \frac{2\, b \sin \alpha}{\lambda} \pi}\right)^2$$

p. 440 „ 14 „ o. statt einfallenden lies reflectirten.
p. 444 „ 3 „ u. setze vor die rechte Seite der Gleichung das Zeichen —.
p. 445 „ 1 „ o. setze vor die rechte Seite der Gleichung das Zeichen —.
p. 454 „ 5 „ o. statt q lies — q.
p. 475 „ 8 „ u. statt zweite lies erste.
p. 492 Fig. 150 statt $J'O$ lies $J'O'$.
p. 552 Zeile 5 v. u. statt $\frac{OJ . \sin OJL}{\sin OEJ}$ lies $\frac{OJ . \sin OJE}{\sin OEJ}$.
p. 557 „ 3 „ „ „ $\frac{\omega^2 \sin^2 i}{\sqrt{1 - \omega^2 \sin^2 i}}$ lies $\frac{\omega . \sin i}{\sqrt{1 - \omega^2 \sin^2 i}}$
p. 558 „ 16 „ o. im Nenner statt $\omega^2 \cos^2 \varphi$ lies $\omega^4 \cos^2 \varphi$.
p. 567 „ 1 „ o. statt $(\delta_o - \delta'_e)$ lies $(\delta_o + \delta'_e)$
p. 567 „ 14 „ u. „ $(\delta_e - \delta'_o)$ „ $(\delta_e + \delta'_o)$.
p. 593 „ 3 „ o. „ $(\delta - \delta_o)$ „ $(\delta_e - \delta_o)$.



Zweiter Theil.

Die Lehre vom Licht.

Erster Abschnitt.

Ausbreitung und Wahrnehmung des Lichtes.

Erstes Kapitel.

Die ungestörte Ausbreitung des Lichtes.

§. 1.

Ausstrahlung und geradlinige Fortpflanzung des Lichtes. Von der uns umgebenden Aussenwelt erhalten wir ausser durch das Gefühl, beim Betasten der Körper, oder durch das Gehör, wenn sie sich in einer hinlänglich raschen schwingenden Bewegung befinden, in viel ausgedehnterer Weise Kenntniss durch das Gesichtsorgan, indem wir die uns umgebenden Körper sehen.

Um die Körper aber durch das Gesicht wahrnehmen zu können, bedarf es der Anwesenheit des Lichtes, indem wir im Dunkeln Körper, von deren Anwesenheit unser Gefühl uns überzeugt, nicht sehen können.

In dieser Beziehung unterscheiden wir die Körper sofort in zwei Klassen; die eine derselben ist immerfort mit jenem Etwas, das wir Licht nennen, verbunden, die zu ihr gehörigen Körper sind durch sich selbst nicht nur sichtbar, sondern können allein durch ihre Anwesenheit auch andere Körper sichtbar machen. Solche Körper nennen wir leuchtende Körper, es sind vorzugsweise die Sonne, die Sterne und die glühenden und brennenden Körper. Die leuchtenden Körper unterscheiden wir in doppelter Beziehung von einander, einmal, indem sie unserem Auge den Eindruck einer verschiedenen Helligkeit machen, ferner indem sie ein verschiedenartiges Licht zeigen, welches wir als verschiedene Farben bezeichnen. Die Körper der zweiten Klasse sind nicht für sich sichtbar, es sind die nichtleuchtenden dunkeln Körper, sie werden jedoch sichtbar, ja sie werden leuchtend, wenn sie von einem selbstleuchtenden Körper beleuchtet werden, und dann unterscheiden wir an ihnen ebenso verschiedene Helligkeit und verschiedene Farbe. Wenn wir auf ein weisses Blatt Papier in einem dunkeln Zimmer ein Bündel Sonnenstrahlen fallen lassen, so wird es nicht nur selbst sichtbar, sondern vermag auch die sonst im

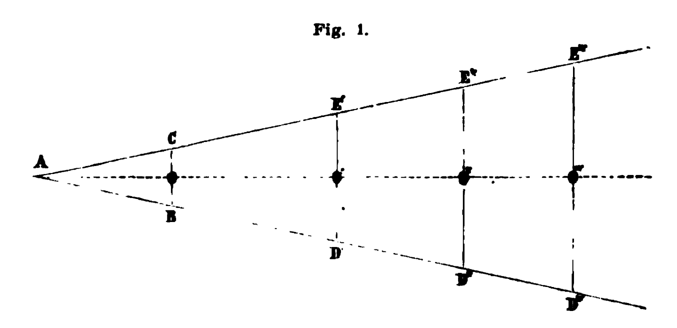
Zimmer enthaltenen Gegenstände sichtbar zu machen, es vermag sie zu beleuchten. Die Astronomie lehrt uns, dass die Planeten und der Mond an sich dunkle Körper sind, unter Einwirkung des Sonnenlichtes werden sie in den Stand gesetzt, selbst wieder andere Gegenstände sichtbar zu machen.

Aus allem diesem folgt, dass eine Verbindung zwischen den Körpern, die wir sehen, und unserem Auge existiren muss, die sich aber in gleicher Weise zwischen den leuchtenden und beleuchteten Körpern herstellt; diese Verbindung ist das Licht. Wir können uns nun ferner leicht überzeugen, dass diese Verbindung von den leuchtenden Körpern ausgeht, oder dass das Licht von ihnen ausstrahlt. Denn hält man z. B. zwischen die Sonne und unser Auge einen Schirm, so wird uns dadurch der Anblick der Sonne entzogen; oder hält man einen solchen Schirm zwischen ein Licht und ein weisses Blatt, so wird letzterem das Licht entzogen, es wird beschattet und nicht leuchtend.

Untersuchen wir die Gestalt des Schattens auf dem weissen Blatt, so sehen wir, dass dieselbe bestimmt wird durch die Gestalt des schattengebenden Körpers. Ist der schattengebende Körper gegen das Licht sehr gross, so wird der Rand des Schattens bestimmt durch gerade Linien, welche wir von dem Lichte aus an den Grenzen des schattengebenden Körpers vorüber auf das weisse Blatt ziehen. Denn ist z. B. der schattengebende Körper ein Kreis, so hat auch der Schatten eine kreisförmige Begrenzung, in welcher Entfernung von dem schattengebenden Körper wir auch denselben durch das weisse Blatt auffangen. Indess hat der Schattenkreis in verschiedenen Entfernungen eine verschiedene Grösse, sein Radius ist bei constantem Abstande des schattengebenden Körpers von der Lichtquelle proportional dem Abstande des Papierschirmes von der Lichtquelle.

Ist demnach A ein kleiner leuchtender Körper und BC ein Durchschnitt des schattengebenden Kreises, den wir uns senkrecht auf die Verbindungs-

Fig. 1.



linie AO der Lichtquelle mit dem Mittelpunkte O des schattengebenden Kreises gehalten denken, so sind in den verschiedenen Abständen AO des mit dem Schirme parallel gehaltenen Blattes die Radien der Schattenkreise gleich $O' E'$, $O'' E''$ ... und es ist

$$O''' E''' : O'' E'' : O' E' = AO''' : AO'' : AO'.$$

Daraus folgt dann, dass die Dreiecke $AO' E'$, $AO'' E''$ .. ähnlich sind, oder dass die Punkte A, E', E'' .. in einer geraden Linie liegen.

Wenn nun ferner bei constantem Abstande des weissen Blattes, auf dem wir den Schatten betrachten, von der Lichtquelle der Schirm BC in verschiedenen Abständen von der Lichtquelle gehalten wird, so findet man, dass der Radius $O' E'$ des Schattenkreises auch dann eine immer andere Grösse erhält, und zwar, dass

$$O' E' : OC = AO' : AO,$$

oder dass der Radius des Schattenkreises zu dem des schattengebenden sich verhält wie der Abstand des weissen Blattes zu dem des schattengebenden Kreises von der Lichtquelle.

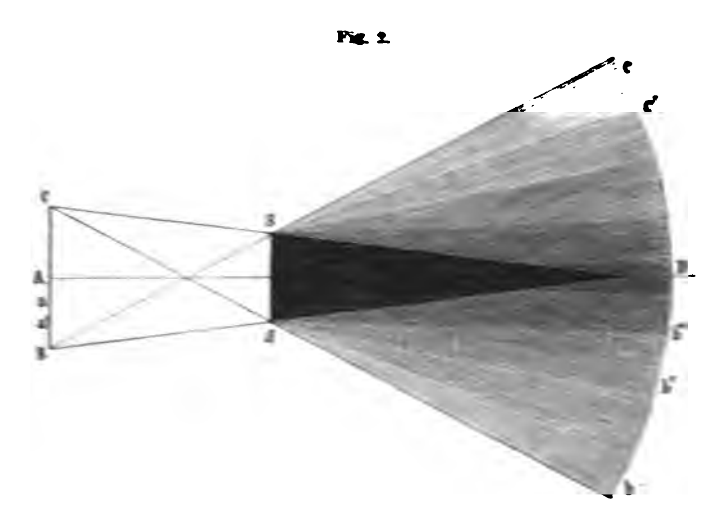
Daraus ergibt sich, dass ebenso die Punkte C und E', somit alle Punkte C, E', E'' .. auf einer geraden Linie liegen.

Diejenigen Punkte, welche im Innern des Kegels liegen, der durch Umdrehung der beiden von A aus durch C und B gezogenen geraden Linien um AO als Axe erzeugt ist, sind also im Schatten, sie erhalten kein Licht, während die ausserhalb dieses Kegels liegenden Punkte beleuchtet werden. Alle Punkte demnach, welche so liegen, dass eine gerade Linie von ihnen zum leuchtenden Punkte gezogen den Schirm CB trifft, werden nicht beleuchtet, diejenigen aber, für welche eine solche Gerade nicht den schattengebenden Körper trifft, sind beleuchtet. Damit also ein Punkt beleuchtet werde, ist nothwendig, dass eine gerade Linie von ihm aus zur Lichtquelle gezogen auf ihrem Wege keinen schattengebenden Körper finde, es folgt somit, dass das Licht sich von der Quelle aus in geraden Linien ausbreitet.

Ganz dasselbe zeigt eine Betrachtung des Schattens, den ein solcher Kreis wirft, wenn die Lichtquelle A eine grössere Ausdehnung hat. Nehmen wir als Lichtquelle z. B. eine glühende kreisförmige Scheibe und als schattengebenden Körper einen andern kreisförmigen Schirm, so zeigt ein auffangender hinter den schattengebenden gehaltener Schirm in dem Schatten sehr verschiedene Nuancen der Beleuchtung. Zunächst in der Mitte des Schattens zeigt sich ein ganz dunkler Fleck, dessen Breite durch den Kegel CDB (Fig. 2) bestimmt ist, dessen Seiten von den durch die Grenzen SS gezogenen Geraden gebildet werden; in diesen Raum fällt gar kein von CB ausstrahlendes Licht; dieser Kegel ist der Kernschatten; an diesen grenzt von innen nach aussen immer heller werdend der Halbschatten, dessen Grenzen durch die Geraden CSb und BSc bestimmt sind. Alle Punkte ausserhalb dieses Raumes erhalten Licht von allen leuchtenden Punkten der Scheibe BC, alle Punkte innerhalb desselben nur von einem Theile derselben. Sie sind daher weder vollständig hell noch vollständig dunkel. Innerhalb des Raumes $b''' SD$ fällt Licht von den Punkten des leuchtenden Körpers zwischen a' und B, innerhalb $b''' Sb''$ tritt dazu nach und nach die Wirkung der zwischen a' und a gelegenen Punkte, woraus unmittelbar folgt, dass, wie es die Erfahrung

zeigt, ein stetiges Wachsen der Helligkeit von der Grenze des Kernschattens bis zur Grenze des Schattens eintreten muss.

Fig. 2.



Durch das Vorhandensein der Halbschatten erklärt sich unmittelbar die geringe Schärfe, mit denen die meisten Schatten in einiger Entfernung von den schattenwerfenden Körpern begrenzt sind. Alle Lichtquellen haben eine mehr oder weniger grosse Ausdehnung, die Schatten, welche von ihnen geworfen werden, sind daher stets von Halbschatten begrenzt, welche, je weiter man sich von den schattengebenden Körpern entfernt, um so breiter werden und daher einen ganz allmählichen Uebergang aus dem Dunkel des Kernschattens zur Helle der vollen Beleuchtung vermitteln.

Wir kennen noch eine Reihe anderer Erscheinungen, welche uns den Beweis einer geradlinigen Fortpflanzung des Lichtes liefern. Wenn man drei durchbohrte Metallscheiben so hinter einander hält, dass die drei Löcher derselben in einer geraden Linie liegen, so kann man eine hinter denselben liegende Lichtquelle wahrnehmen; liegen die Löcher aber nicht in einer Geraden, so verhindern die Scheiben die Sichtbarkeit des Lichtes. Ebenso kann man durch eine gerade Röhre hindurchsehen, durch eine gebogene nicht.

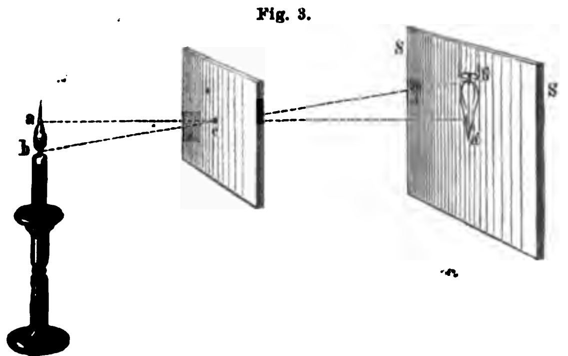
Lässt man die Sonne durch eine wie immer gestaltete kleine Oeffnung hindurchscheinen und fängt die Sonnenstrahlen auf einem hinter der Oeffnung befindlichen Schirme auf, so sieht man auf dem Schirme nicht einen hellen Fleck von der Gestalt der Oeffnung, sondern immer einen hellen runden Fleck, dessen Grösse sich ändert mit dem Abstande des Schirmes von der Oeffnung. Eine Messung des Durchmessers dieses runden Fleckes ergibt aber, dass die von der engen Oeffnung nach den Endpunkten eines Durchmessers gezogenen Linien immer denselben Winkel mit einander bilden, der gleich ist dem scheinbaren Durchmesser der Sonne. Der Grund dieser Erscheinung liegt wieder in der geradlinigen Fortpflanzung des Lichtes, und umgekehrt ist diese

Erscheinung ein neuer Beweis für dieselbe. Von jedem Punkte der Sonne geht Licht durch die Oeffnung hindurch und entwirft auf dem dahinter gehaltenen Schirme ein kleines Bildchen der Oeffnung. Da nun alle Punkte des kreisförmigen Sonnenrandes solche kleine Bildchen erzeugen, so liegen diese in einem Kreise geordnet, und da sich die einzelnen Bilder unendlich nahe liegen und zum Theil in einander greifen, so erzeugen diese einen zusammenhängenden hellen Kreis, dessen Mitte durch die hellen Bilder, welche von den mittlern Punkten der leuchtenden Sonne erzeugt werden, ausgefüllt wird. Auf dem Schirme entsteht also ein leuchtendes Bild der Sonne. Dass dieses richtig ist, davon überzeugt man sich leicht zur Zeit einer Sonnenfinsterniss, denn stellt man den Versuch dann an, so erscheint auf dem Schirme nicht ein rundes, sondern ein sichelförmiges Bild der Sonne entsprechend dem dann leuchtenden Theile der Sonne.

Um diese Erscheinungen wahrzunehmen, bedarf es nicht einmal eines besondern Apparates; unter Bäumen haben die durch die Lücken der Baumblätter fallenden Lichter zu gewöhnlichen Zeiten eine kreisförmige Gestalt, zur Zeit einer Sonnenfinsterniss aber zeigen sie eine sichelförmige Gestalt. Sehr auffallend war die Erscheinung bei den grossen Sonnenfinsternissen im Jahre 1851 und 1860, wo sie selbst solchen auffiel, welche die Nothwendigkeit der Erscheinung nicht kannten, sowie eine Erklärung derselben nicht zuzugeben vermochten.

Wenn man in eine undurchsichtige Scheibe ein sehr kleines Loch macht, vor dasselbe eine Kerzenflamme und hinter dasselbe ein Blatt Papier stellt, so erhält man auf dem Papiere ein umgekehrtes Bild der Flamme (Fig. 3);

Fig. 3.



auch dieser, eigentlich dem vorigen ganz gleiche Versuch liefert einen Beweis für die geradlinige Fortpflanzung des Lichtes. Von jedem Punkte der Flamme geht Licht durch die Oeffnung c des Schirmes, der Punkt a der Flammenspitze erzeugt ein kleines Bildchen der Oeffnung c auf dem dahinter liegenden Blatte bei a', der Punkt b bei b', die einzelnen Bildchen der Oeffnung c sind auf dem Schirme SS ganz symmetrisch den leuchtenden Punkten der Flamme gruppirt, nur umgekehrt, so dass die den obern Punkten a entsprechenden leuchtenden Bilder der Oeffnung unten bei a, die den untern Punkten b ent-

sprechenden Bilder oben bei b' erscheinen, dort wo eine von a oder b durch die Oeffnung c gezogene Gerade den Schirm SS trifft. Da die von den verschiedenen Punkten der Flamme durch c nach SS gezogenen Linien sich in c schneiden, so sieht man, dass die den einzelnen Punkten der Flamme entsprechenden Bilder der Oeffnung umgekehrt wie jene liegen müssen.

Eine sehr hübsche Abänderung dieses Versuches, welche zugleich einen neuen Beweis liefert, dass ein an sich dunkeler aber beleuchteter Körper durch das von ihm ausgehende Licht sichtbar wird, ist folgende. Macht man in dem Fensterladen eines ganz dunkeln Zimmers ein kleines Loch und stellt demselben einen weissen Schirm gegenüber, so erhält man auf demselben ein genaues Abbild aller dem Fenster gegenüber befindlichen Gegenstände, welches in derselben Weise entsteht als das Bild der Sonne und der Lichtflamme. Jeder dem Fenster gegenüber befindliche leuchtende oder beleuchtete Punkt sendet in seiner Verbindungslinie mit der Oeffnung Licht aus und erzeugt an dem Punkte, wo die Linie den Schirm trifft, ein Bildchen der Oeffnung. Ist die Oeffnung hinreichend klein, so fallen die einzelnen Bilder der Oeffnung unmittelbar neben einander und erzeugen so ein Bild der Gegenstände, von deren sämmtlichen Punkten Licht durch die Oeffnung auf den Schirm fällt. Ist aber die Oeffnung gross, so fallen die einzelnen von den verschiedenen leuchtenden Punkten beleuchteten Flächenstücke des Schirmes, die einzelnen Bilder der Oeffnung nicht mehr neben, sondern über einander und dadurch wird das Bild der Gegenstände ausserhalb auf dem Schirme verwaschen und undeutlich; und wird die Oeffnung endlich sehr gross, wie z. B. ein Fenster, so entsteht gar kein Bild mehr, sondern nur eine beleuchtete Fläche, deren Grenzen den Grenzen der Oeffnung ähnlich sind.

Aus allen diesen Erfahrungen schliessen wir nun, dass das Licht, jenes Etwas, das uns den gesehenen Körper sichtbar macht, von dem leuchtenden Körper ausgeht und zwar in geraden Linien. Letzteres ist uns auch so geläufig, dass wir alles, was wir sehen, an das Ende jener Richtung verlegen, in welcher das Licht in unser Auge dringt. Wir werden einige Vorgänge kennen lernen, bei denen das Licht in Folge von Hindernissen, auf welche es bei seiner Ausbreitung stösst, die gerade Ausbreitung verlässt und in gebrochener Linie sich fortpflanzt. Nichts desto weniger verlegen wir die Lichtquelle in unserem Urtheile an das Ende jener Geraden, in welcher das Licht beim Eintritt in unser Auge sich fortpflanzte und glauben somit den leuchtenden Körper an einem Orte zu sehen, an dem er sich in der That nicht befindet.

Man sagt daher allgemein, das Licht strahlt in geraden Linien nach allen Richtungen von allen Punkten eines leuchtenden Körpers aus und nennt die Geraden, in denen das Licht sich ausbreitet, Lichtstrahlen.

§. 2.

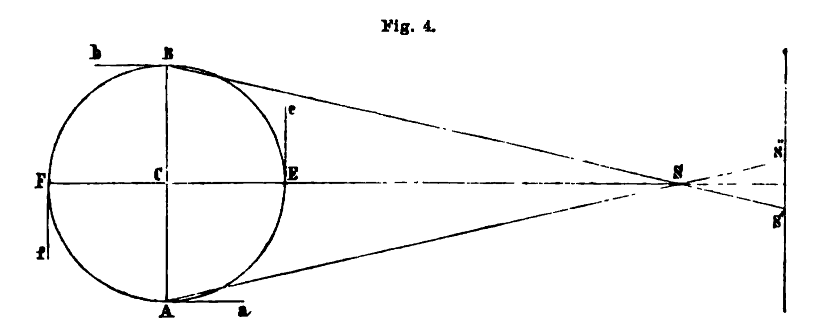
Geschwindigkeit des Fixsternlichtes. Nach dem Vorigen sind wir genöthigt, anzunehmen, dass das Licht von den leuchtenden Körpern sich

ausbreitet; es fragt sich nun, braucht es zu dieser Ausbreitung eine gewisse Zeit oder entsteht das Licht auf seiner ganzen Bahn momentan. Dass, wenn das Licht eine Zeit braucht, um sich fortzupflanzen, diese nur sehr klein sei, ja für irdische Abstände fast unmessbar klein, das zeigt uns die Erfahrung, indem man gleichzeitig in den verschiedensten Entfernungen ein aufflammendes Licht wahrnimmt. Mit Hülfe astronomischer Beobachtungen und in neuester Zeit durch sehr sinnreiche physikalische Versuche hat man jedoch nachgewiesen, dass das Licht nicht momentan sich fortpflanzt, und dass das Licht, welcher Quelle es auch entstammt, ob es direkt von einem selbstleuchtenden Körper ausgeht oder ob es von einem beleuchteten Körper ausstrahlt, dass das Licht der Sterne wie das irdischen Lichtern entstammende sich mit gleicher Geschwindigkeit fortpflanzt.

Dass das Licht der selbstleuchtenden Fixsterne Zeit braucht, um sich fortzupflanzen, zeigt das von Bradley [1]) im Jahre 1727 zuerst beobachtete Phänomen der Aberration des Lichtes.

Um die Entfernung der Fixsterne zu bestimmen, stellte der englische Astronom Bradley Jahre lang fortgesetzte Beobachtungen an, um zu untersuchen, ob sich bei den Fixsternen eine Parallaxe zeige, das heisst, eine Aenderung des Ortes am Himmel, wenn sie von dem einen oder dem andern Ende eines Durchmessers der Erdbahn gesehen werden. Stellt der um den Mittelpunkt C Fig. 4 beschriebene Kreis die nur wenig von der Gestalt eines

Fig. 4.



Kreises abweichende Bahn der Erde dar, und ist S ein in der Ebene der Erdbahn liegender Fixstern, so ist der Winkel, den die von den Enden A und B des zu CS senkrechten Durchmessers nach S gezogenen Linien mit einander bilden, die Parallaxe des Sternes S. Hat der Abstand CS einen mit der Länge des Durchmessers vergleichbaren Werth, so ist der Winkel ASB messbar und wird sich dadurch zu erkennen geben, dass von B aus gesehen der Stern nach S', von A aus gesehen nach S'' verschoben erscheint. Der Winkel, den die Linien BS und AS mit einander bilden, wird immer kleiner, je weiter der Punkt S von C entfernt ist, und ist die Entfernung CS gegen AB

1) *Bradley*, Philosophical Transactions abridged etc. vol. VI. p. 168.

unmessbar gross, so werden *BS* und *AS* für uns parallel sein, da dann der Punkt *S* in einer für uns unendlichen Entfernung liegt. Der Punkt *S* wird dann immer an derselben Stelle des Himmelsgewölbes erscheinen.

Wenn der Stern *S* nicht in der Ebene der Ekliptik, sondern an einer andern Stelle des Himmels sich befindet, so würde eine solche Parallaxe sich nicht in einer einfachen Verschiebung des Sternes in der Richtung *S′ S″* zeigen, sondern dann würde der Stern am Himmel eine kleine geschlossene Bahn zu beschreiben scheinen. Befände der Stern in gleichem Abstande *CS* sich gerade im Pole der Ekliptik senkrecht über *C*, so würde der Stern, wenn die Erde in *A* sich befände, um eine gewisse Grösse gegen *B* hin, wenn die Erde in *E* wäre, um dieselbe Grösse gegen *F* hin, wäre sie in *B*, um eben die Grösse gegen *A* hin und in *F* gegen *E* hin verschoben erscheinen, der Stern würde um seinen wahren Ort einen kleinen Kreis beschreiben, dessen Durchmesser gleich wäre dem Winkel, den die von entgegengesetzten Punkten eines Durchmessers nach S gezogenen Linien mit einander bilden.

Befände sich der Stern *S* in irgend einem andern Punkte der mit *CS* um *C* beschriebenen Kugel, so würde seine scheinbare Bahn eine Ellipse sein, deren grosse Axe immer denselben Werth, den des Kreisdurchmessers, oder den der linearen Verschiebung *S′ S″* hätte, deren kleine aber verschieden wäre, je nach der Erhebung des Sternes über der Ekliptik. Läge der Stern z. B. in dem durch *FS* senkrecht zu *ABEF* geführten Durchschnitte der Himmelskugel, so würde die zu *AB* parallele Axe denselben Werth haben wie die Verschiebung *S′ S″* des in der Ekliptik liegenden Sternes, da der Winkel *BSA* dann denselben Werth beibehielte; der Winkel *ESF* würde aber ein anderer sein und zwar würde er mit der Erhebung des Sternes über die Ekliptik stetig zunehmen von Null, wenn der Stern in der Ebene *ASB* läge bis zum Winkel *ASB*, wenn der Stern sich senkrecht über *C* befände.

Für alle übrigen Punkte gilt dasselbe, nur haben für diese die Axen der Ellipsen eine andere Lage.

Bradley beobachtete nun solche Ortsänderungen der Fixsterne in der That, indess zwei Umstände liessen erkennen, dass diese Verschiebung nicht einer Parallaxe derselben zuzuschreiben sei.

Denn erstens zeigte sich, dass für alle in der Ebene der Ekliptik liegenden Sterne die Verschiebung genau dieselbe Grösse von 40,5 Sekunden besitzt, und dass ebenso die grosse Axe der Ellipsen für alle ausserhalb der Ekliptik liegenden Fixsterne, welche der Ebene der Erdbahn parallel ist, genau denselben Werth von 40,5 Sekunden besitzt. Die zur grossen senkrechte kleine Axe der Ellipse hat für die verschiedenen Sterne einen verschiedenen Werth, der Werth derselben hängt aber nur von der Erhebung des Sternes über der Ekliptik ab, allen in gleicher Höhe über derselben befindlichen Sternen entspricht eine gleiche kleine Axe. Alle Fixsterne schliesslich, welche sich nahe dem Pole der Ekliptik befinden, beschreiben nahezu einen Kreis, dessen

Durchmesser für alle derselbe und zwar gleich ist der Verschiebung $S' S''$ der in der Ekliptik liegenden Sterne.

Diese Gleichheit der Bahnen würde unter Annahme, dass die Verschiebung eine parallaktische wäre, fordern, dass sämmtliche Fixsterne in gleichem Abstande von C auf einer mit CS um C beschriebenen Kugelfläche lägen, denn nur für solche Sterne ist, wie wir sahen, die Parallaxe gleich; ist aber der Abstand CS verschieden, so muss auch die Parallaxe verschieden sein.

Aber selbst, wenn man diese durchaus unwahrscheinliche Hypothese, dass alle Fixsterne sich in gleichen Abständen von der Sonne befänden, zugeben wollte, so lässt doch eine genauere Betrachtung der scheinbaren Sternbewegung es nicht zu, als Ursache derselben eine Parallaxe anzusehen.

Denn in dem Falle muss nach dem Vorigen der Stern S nach S'' verschoben erscheinen, wenn sich die Erde in A befindet, in seinem wahren Orte, wenn sie bei E oder F ist und schliesslich nach S' verschoben, wenn sich die Erde bei B befindet. Allgemein müsste der Stern in der Richtung eines Durchmessers verschoben erscheinen nach dem andern Ende desselben hin, wenn die Erde sich an dem einen Ende desselben befände.

Das ist jedoch nicht der Fall, sondern die Sterne erscheinen immer in einer zu dem Durchmesser, an dessen Ende die Erde sich gerade befindet, geneigten Richtung verschoben und zwar nach der Richtung hin, nach welcher sich die Erde gerade bewegt. Nehmen wir an, die Erde durchlaufe ihre Bahn in der Richtung $AEBF$, so erscheint der Stern in seinem wahren Orte in S, sowohl wenn sich die Erde gerade in A befindet, als auch wenn sie gerade das Ende B des Radius passirt, also sich nach Bb bewegt. Dagegen ist der Stern am meisten nach links, nach S'' hin verschoben, wenn die Erde sich gerade in E befindet und sich nach Ee hin bewegt. Der Stern ist dagegen nach entgegengesetzter Richtung, nach SS' verschoben, wenn die Erde bei F in der Richtung Ff sich bewegt.

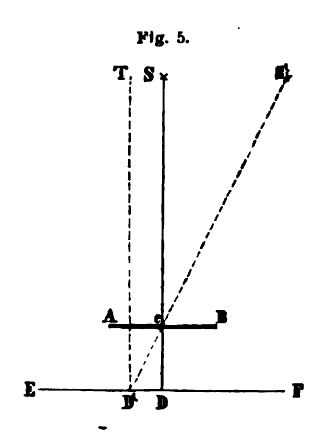
Die scheinbare Bewegung der Fixsterne findet also so statt, dass die Sterne immer nach der Richtung am meisten verschoben zu sein scheinen, nach der hin sich die Erde bewegt. Bewegt sich daher bei einem in der Ekliptik liegenden Sterne die Erde gegen den Stern hin oder von ihm fort, so findet eine Verschiebung des Sternes gar nicht statt. Die Verschiebung ist am grössten, wenn die Verbindungslinie des Sternes mit der Erde senkrecht ist zur augenblicklichen Bewegung der Erde und zwar nach der Seite hin, nach der die Erde sich bewegt.

Daraus erkannte Bradley sofort, dass diese Erscheinung nicht Folge einer Parallaxe der Fixsterne sei, und er schon leitete diese Erscheinung aus der vereinigten Wirkung der Fortpflanzung des Lichtes und der Bewegung der Erde ab. Weil das Licht sich nicht momentan fortpflanzt und weil zugleich die Erde sich bewegt, muss eine Verschiebung der Lichtquelle nach der Seite, nach welcher hin sich die Erde bewegt, stattfinden.

Um diese Erscheinung zu erklären, muss man sich erinnern, dass wir

einen leuchtenden Punkt immer in der Richtung wahrnehmen, in der das Licht zuletzt in unser Auge zu kommen scheint. Ist nun *AB* eine Ebene, in der bei *c* eine kleine Oeffnung ist (Fig. 5), durch welche das von einem Sterne *S* herkommende Licht hindurchtritt, so wird, wenn die Ebenen *AB* und *EF* sich nicht bewegen, das bei *c* durchtretende Licht, das sich in der Richtung *Sc* fortpflanzt, den gerade unter *c* in der Richtung *Sc* liegenden Punkt *D* treffen. Ein Beobachter bei *D* wird also den Stern in der Richtung *DcS* oder gerade senkrecht über *D* sehen. Dasselbe wird auch dann der Fall sein, wenn sich die beiden Ebenen in der Richtung *Sc* dem Sterne nähern oder sich von ihm entfernen, ein Beobachter bei *D* wird den Stern immer in der Richtung *ScD* sehen.

Fig. 5.



Wenn sich nun aber gleichzeitig und mit gleicher Geschwindigkeit die Ebenen *AB* und *EF* nach *B* respective *F* hin bewegen, so wird für einen auf *EF* befindlichen Beobachter diese Bewegung unmerklich sein, und er sich in Ruhe zu befinden glauben. Nehmen wir nun an, dass die beiden Ebenen *AB* und *EF* sich so rasch bewegen, dass in der Zeit, in welcher sich das Licht durch die Strecke *cD* fortpflanzt, der Punkt *D'* an die Stelle gerückt sei, in welcher vorher *D* war, so wird das in dem Augenblicke, als *D* sich in der Richtung *Sc* befand, durch *c* hindurchgegangene Licht nicht den Punkt *D* treffen, der dann nach der Rechten hin verschoben ist, sondern den Punkt *D'*. Dadurch also, dass die Combination *ABFE* sich nach rechts hin bewegte, das Licht aber an dieser Bewegung keinen Theil hatte, befand sich das Licht nach und nach auf der Linie *cD'*, oder in Folge der beiden Bewegungen der Ebenen und des Lichtes ist die Bahn des letztern in Bezug auf die Ebenen *AB* und *EF* die Linie *cD'*. Der in *D'* befindliche Beobachter, für den die Bewegung der Ebene *EF* unmerklich ist, überträgt nun die eigene Bewegung auf das Licht, glaubt, dass der Punkt *D'* seinen Ort nicht geändert habe, und hält *cD'* für die Richtung, in der das Licht sich bewegt habe.

Es macht natürlich keinen Unterschied, ob ein solcher Schirm wie *AB* vorhanden ist oder nicht, wenn in der Zeit, in welcher das Licht die Strecke *cD* zurücklegt, der Punkt *D'* an die Stelle von *D* rückt, wird ein Beobachter bei *D'* immer die Richtung *cD'* als diejenige ansehen, in welcher das Licht zu ihm kommt, und demnach die Lichtquelle *S* in *S'* wahrnehmen, verschoben nach der Richtung, nach welcher er sich bewegt. Die Verschiebung oder der Winkel, den die wahre Richtung des Lichtes mit der scheinbaren Richtung desselben bildet, der Winkel *T D' S'* hängt nur ab von dem Verhältniss der gleichzeitig von dem Punkte *D'* und von dem Lichte zurückgelegten Räume, also von dem Verhältniss der beiden Geschwindigkeiten.

Denn der Winkel $TD'S'$ ist gleich dem Winkel $D'cD$, und dieser Winkel ist bestimmt durch

$$\operatorname{tang} D'cD = \frac{D'D}{cD},$$

oder da diese Längen die von dem Punkte D' und dem Lichte in der gleichen Zeit t zurückgelegten Strecken sind, und da, wenn wir die Geschwindigkeit des Punktes D' mit c', die des Lichtes mit c bezeichnen,

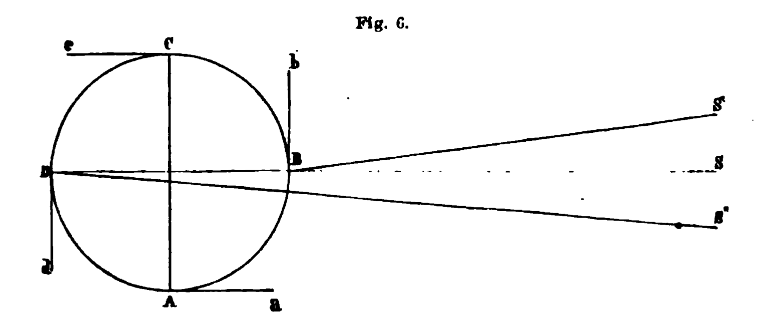
$$D'D = c't; \quad cD = ct,$$

so ist

$$\operatorname{tang} D'cD = \operatorname{tang} TD'S = \frac{c'}{c}.$$

Die Anwendung dieser Entwicklung auf das Phänomen der Aberration und die Benutzung desselben zur Bestimmung der Geschwindigkeit des Lichtes ergibt sich von selbst. Befindet sich die Erde in A (Fig. 6), so bewegt sie

Fig. 6.



sich gerade gegen S hin, also gerade dem ankommenden Lichte entgegen, die scheinbare Bahn des Lichtes fällt daher mit der wirklichen zusammen, wir sehen den Stern in der Richtung Aa oder in seinem wahren Orte bei S. Bei B dagegen ist die Bewegung der Erde gerade senkrecht zu SB zur Bahn des Lichtes nach Bb, dort sehen wir daher den Stern verschoben nach der Richtung S', so zwar, dass der Winkel $S'BS$ bestimmt wird, wenn wir ihn mit α bezeichnen, durch

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{c'}{c},$$

worin dann c' die ganze Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn bezeichnet.

Befindet sich die Erde in C, so erscheint der Stern wieder an seinem wahren Orte S, da die Erde sich in gerader Linie Cc von dem Sterne entfernt, und wenn die Erde in D ist und sich nach Dd hin bewegt, so erscheint der Stern nach S'' ebenso weit verschoben, wie zur Zeit, als die Erde in B war, nach S'.

In den zwischen A und B und B und C liegenden Punkten erscheint der Stern ebenfalls nach S' hin verschoben, aber um so weniger, je weiter die Erde von B entfernt ist. Von der Bewegung der Erde ist dann nur eine Componente zur Fortpflanzungsrichtung des Lichtes senkrecht, die um so kleiner

ist, je näher die Erde bei A oder C ist, und nur diese Componente bewirkt dann eine Verschiebung des Sternes.

Liegt der Stern ausserhalb der Ebene der Erdbahn, so erklären sich die an diesen beobachteten Erscheinungen ganz auf dieselbe Weise. Liegt der Stern im Pole der Ekliptik, so ist die Bahn der Erde in jedem Augenblicke senkrecht zur Richtung der Fortpflanzung des Lichtes, der Stern muss also stets von seinem wahren Orte nach der Richtung, nach welcher die Erde sich gerade bewegt, und um dieselbe Grösse verschoben erscheinen; er muss also um seinen wahren Ort einen kleinen Kreis beschreiben, dessen Durchmesser, wenn das Licht dieses Sternes sich mit derselben Geschwindigkeit fortpflanzt, als das Licht des Sternes S in der Ekliptik, die Grösse der Verschiebung $S'\ S''$ besitzt.

Befindet sich der Stern an einem andern Orte des Himmelsgewölbes, so muss die Bahn des Sternes um seinen wahren Ort jährlich eine kleine Ellipse sein, deren grosse Axe senkrecht sein muss zu dem Durchmesser der Erdbahn, an dessen Enden die Bewegung der Erde senkrecht ist zur Verbindungslinie des Sternes mit der Erde. Ist die Geschwindigkeit des von diesem Sterne ausgestrahlten Lichtes dieselbe, so muss die grosse Axe denselben Werth haben, wie die Verschiebung $S'\ S''$. An den andern Stellen der Erdbahn ist die Bewegung der Erde nicht zur Richtung, in der das Licht zu ihr kommt, senkrecht, nur eine Componente derselben veranlasst daher eine Verschiebung des Sternes und zwar jene, welche in eine zur Richtung des ankommenden Lichtes senkrecht gelegte Ebene fällt. Man sieht, diese Componente ist am kleinsten für jene Stelle der Bahn, wo sie sich parallel zu dem Durchmesser bewegt, an dessen Enden der Stern die grösste Verschiebung erhielt. Dort ist also die Verschiebung am kleinsten, die kleinste Verschiebung ist also senkrecht zur grössten.

Die Thatsache der Aberration beweist also erstens, dass das von den Fixsternen ausgestrahlte Licht sich nicht momentan fortpflanzt, sondern dass es eine mit der Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn vergleichbare Geschwindigkeit besitzt. Sie beweist ferner, da die grosse Axe der Ellipse der scheinbaren Bewegung des Sternes für alle Sterne den gleichen Werth von 40″,5 besitzt, dass die Geschwindigkeit des von allen Sternen ausgestrahlten Lichtes die gleiche ist, ein Satz, der für die Lehre vom Lichte von der höchsten Bedeutung ist.

Die Tangente des Winkels, um welchen die scheinbare Bahn des Lichtes gegen die wirkliche geneigt ist, oder des Abstandes des scheinbaren Ortes des Sternes von dem wahren Orte ist gleich dem Verhältniss der zur Richtung des Lichtstrahles senkrechten Bewegung der Erde zur Geschwindigkeit, mit welcher sich das Licht fortpflanzt. Da nun an der Stelle, wo sich die Erde senkrecht gegen den Lichtstrahl bewegt, die Abweichung des Sternes von seinem wahren Orte gleich ist der halben grossen Axe der Aberrationsellipse,

so ist die Tangente dieser halben Axe gleich dem Quotienten aus der Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn und der Geschwindigkeit des Lichtes.

Um die Geschwindigkeit des Lichtes zu erhalten, müssen wir demnach diejenige der Erde in ihrer Bahn, oder, da wir die Dauer eines Umlaufes der Erde, die eines Jahres genau kennen, die Länge der Erdbahn kennen. Dieselbe ist gegeben, wenn wir den Abstand der Erde von der Sonne kennen, da wir zur Bestimmung der mittleren Geschwindigkeit der Erde ihre Bahn als einen Kreis betrachten können. Der Abstand der Sonne wird bekanntlich durch die Parallaxe der Sonne bestimmt, welche ihrerseits aus den Beobachtungen der Venusdurchgänge am sichersten abgeleitet wird. Aus dem letzten Venusdurchgange im Jahre 1769 leitete Encke[1]) im Jahre 1824 für die Sonnenparallaxe den Werth 8″,571 ab, woraus sich die mittlere Entfernung der Sonne zu 24066 Erdhalbmesser ergibt. Da der Halbmesser der Erde gleich 860 Meilen ist, so folgt hieraus für die mittlere Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn 4,12 Meilen in der Sekunde. Für die Lichtgeschwindigkeit c erhalten wir daher aus der Gleichung

$$\text{tang } 20'',25 = \frac{4,12}{c}$$

$$c = \frac{4,12}{\text{tang } 20'',25} = \frac{4,12}{0,0001} = 41200$$

oder das Licht pflanzt sich in einer Sekunde durch 41200 Meilen fort.

Der aus den Venusdurchgängen von Encke abgeleitete Werth der Sonnenparallaxe ist indess später vielfach angezweifelt worden, Hansen kam in seiner Theorie der Mondsbewegung zu 8″,97 und zu ähnlichen Werthen, im Mittel zu 8″,9 kamen mehrere Astronomen, wie Leverrier, Powalky, Faye u. A.[2]). Mit dem Werthe von Hansen würde die mittlere Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn 3,93 Meilen, die des Lichtes 39300 Meilen, mit dem Werthe 8″,9 erhält man für die Geschwindigkeit des Lichtes den Werth 39700 Meilen.

Die Unsicherheit des absoluten Werthes für die Geschwindigkeit des Lichtes beträgt also etwa $^1/_{30}$ des ganzen Werthes, sie kann nur durch neue Bestimmungen der Sonnenparallaxe gehoben werden, zu welchen zunächst der Venusdurchgang im Jahre 1874 Gelegenheit bietet.

§. 3.

Geschwindigkeit des Planetenlichtes. Noch eine andere astronomische Beobachtung hat die Mittel zur Bestimmung der Geschwindigkeit des Lichtes geliefert, die um so interessanter ist, da sie den Beweis liefert, dass das von dunkeln Körpern in Folge des erhaltenen ausgestrahlte Licht sich mit eben derselben Geschwindigkeit fortpflanzt, als das von den selbstleuchtenden Fixsternen ausgehende Licht.

1) *Encke,* Die Entfernung der Sonne. Gotha 1824.

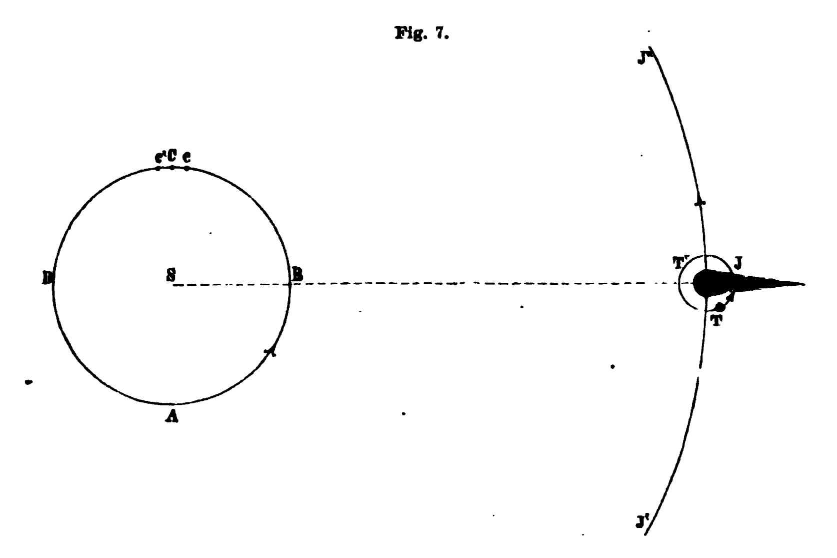
2) Man sehe die Zusammenstellung von *Radau* im Moniteur scientifique du Dr. Quesneville 15. April 1869. p. 375 ff.

Es sind die Beobachtungen, welche Olaf Römer in den Jahren 1670 bis 1676, also 50 Jahre vor Entdeckung der Aberration auf der Sternwarte zu Paris über die Verfinsterung der Jupiters-Monde anstellte [1]).

Der Jupiter ist von vier Monden umgeben, welche in ähnlicher Weise um denselben kreisen, wie der Mond um die Erde; die Bahn derselben fällt nahezu mit der Aequatorebene des Jupiter zusammen, und bei jedem Umlaufe werden sie einmal verfinstert, da sie, ausser dem am weitesten vom Jupiter entfernten Trabanten, jedesmal durch den Kernschatten des Jupiter hindurchgehen.

Man kann nun von der Erde aus entweder den Eintritt der Trabanten in den Schatten oder deren Austritt aus demselben beobachten. Stellt $ABCD$ die Bahn der Erde, S die Sonne im Mittelpunkte derselben dar und ist $J' J''$

Fig. 7.



ein Stück der Jupitersbahn, auf der bei J der Planet sich befindet, so kann man auf der Seite DAB der Erdbahn die auf einander folgenden Eintritte, auf der Strecke BCD die auf einander folgenden Austritte der Trabanten aus dem Schatten des Jupiter beobachten. Aus der Zeit, welche zwischen zwei Eintritten oder zwei Austritten verfliesst, kann man dann die Umlaufszeit der Trabanten bestimmen.

Diese Umlaufszeit z. B. des ersten Trabanten muss nun immer dieselbe sein und nehmen wir an, der Jupiter stehe still, so muss die Umlaufszeit einfach gleich sein der Zeit, welche zwischen zwei auf einander folgenden Eintritten oder Austritten des Trabanten in oder aus dem Schatten verfliesst. Die Bewegung des Jupiter in seiner Bahn bewirkt, dass wir an dieser Zeit eine kleine leicht zu berechnende Correctur anbringen müssen, da durch die

1) *Fischer*, Geschichte der Physik. Bd. II. p. 155.

Bewegung des Jupiter seine Stellung gegen die Sonne und somit die Lage des Schattens etwas geändert wird.

Wenn wir nun aber auch mit Beachtung dieser Correctur aus zwei auf einander folgenden Eintritten oder Austritten des Trabanten aus dem Schatten die Umlaufszeit eines der Trabanten bestimmen, so finden wir dieselbe keinesweges immer gleich, sondern, je nach der Stellung der Erde in ihrer Bahn, als eine andere. Bestimmt man die Umlaufszeit zur Zeit, wo sich die Erde in *B* befindet, also Sonne und Jupiter in Opposition stehen, oder wenn die Erde in *D* steht, Sonne und Jupiter in Conjunction sind, so ist die Umlaufszeit merklich dieselbe, wenn aber die Erde in *A* sich befindet, so findet man aus der Beobachtung zwei auf einander folgender Eintritte des Trabanten in den Schatten die Umlaufszeit kürzer, wenn die Erde aber in *C* sich befindet, aus zwei Austritten um ebenso viel länger als zur Zeit der Opposition oder Conjunction.

Nach den ersten Beobachtungen glaubte Cassini den Unterschied in den beobachteten Umlaufszeiten einer Unregelmässigkeit in der Bewegung des Trabanten zuschreiben zu müssen, Römer jedoch machte darauf aufmerksam, dass diese Verschiedenheit im innigsten Zusammenhange mit der Bewegung der Erde gegen den Jupiter stehe. Zur Zeit der Opposition und zur Zeit der Conjunction ist die Bahn der Erde nahezu senkrecht zur Verbindungslinie des Jupiter mit der Erde. Der Abstand beider ändert sich nur unbedeutend. Wenn aber die Erde sich in *A* befindet, ist ihre Bewegung gerade gegen den Jupiter gerichtet und die Erde ist zur Zeit des ersten Eintrittes des Trabanten in den Schatten viel weiter vom Jupiter entfernt, als zur Zeit des folgenden Eintrittes, aus deren Zwischenzeit man die Umlaufszeit berechnet. Wenn aber die Erde sich an der entgegengesetzten Seite ihrer Bahn bei *C* befindet, so bewegt sie sich fast in gerader Richtung vom Jupiter fort, sie ist beim zweiten Austritte fast um die ganze von ihr durchlaufene Strecke weiter vom Jupiter entfernt, als zur Zeit des ersten Austrittes des Trabanten aus dem Schatten. Römer schloss daraus, dass der Grund der Verschiedenheit in den Umlaufszeiten daher rühre, dass das Licht der Trabanten Zeit brauche, um den Abstand des Jupiter von der Erde zu durchlaufen; und dass die, zur Zeit wo sich die Erde von *A* aus gegen den Jupiter hinbewegt, aus der Zwischenzeit zwischen zwei Eintritten des Trabanten geschlossene Umlaufszeit gleich der Differenz sei zwischen der wahren Umlaufszeit und der Zeit, welche das Licht gebraucht haben würde, um die Strecke zu durchlaufen, um welche die Erde in der Zwischenzeit sich dem Jupiter genähert hat. Wenn die Erde in *C* sich vom Jupiter entfernt, so ist die aus den Beobachtungen zweier Austritte gefolgerte Umlaufszeit die Summe der wahren Umlaufszeit und der Zeit, welche das Licht zum Durchlaufen der Strecke gebrauchte, um welche die Erde sich von dem Jupiter entfernt hat.

Denn befindet sich die Erde zur Zeit des ersten Austrittes des Trabanten in *c* (Fig. 7), so wird, wenn das Licht zur Fortpflanzung Zeit braucht, der

Trabant um die Zeit t nach dem Momente, in welchem er wieder zu leuchten begonnen hat, in c wahrgenommen werden, wo dann t die Zeit bedeutet, welche das Licht braucht, um die Strecke Jc zurückzulegen. Ist nun T die wahre Umlaufszeit des Trabanten, so wird er nach dieser Zeit zum zweitenmale den Schatten verlassen, das von ihm in dem Augenblicke ausgehende Licht wird dann zur Zeit $T + t$ von dem Moment des ersten Austrittes an gerechnet in c ankommen. In c' aber, wo die Erde sich dann befindet, wird es erst zur Zeit $T + t + t'$, wahrgenommen werden, da es die Zeit t' braucht, um die Strecke cc' zu durchlaufen. Da nun das Licht um die Zeit t nach dem ersten Austritte des Trabanten von der Erde in c wahrgenommen wurde, so ist die Zwischenzeit zwischen beiden Wahrnehmungen

$$T + t + t' - t = T + t',$$

gleich der wahren Umlaufszeit T plus der Zeit, die das Licht brauchte, um die Strecke cc' zu durchlaufen.

Kennt man daher die wahre Umlaufszeit T und die Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn, so kann man daraus t', und durch Division von cc' mit t' die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes berechnen.

Eine solche einzelne Beobachtung hat man jedoch dazu nicht angewandt, sondern hat die Verzögerung beobachtet, welche nach einer ganzen Reihe von Verfinsterungen bei dem letzten Austritte des Trabanten aus dem Schatten eintritt. Ist so der Austritt des Trabanten aus dem Schatten beobachtet, wenn sich die Erde gerade in B befindet, und berechnet man dann mit den wahren Umlaufszeiten die Zeit des Austrittes, der ungefähr $^1/_2$ Jahr später eintritt, wenn die Erde sich in D befindet, so beobachtet man den Austritt um so viel später als das Licht braucht, um den Durchmesser der Erdbahn zu durchlaufen, da die Erde dann gerade um den Durchmesser der Erdbahn weiter vom Jupiter entfernt ist, als zur Zeit der Opposition von Sonne und Jupiter.

Die Beobachtung ergibt dann, dass der Austritt des Trabanten aus dem Schatten nahezu 16 Minuten später stattfindet, oder dass das Licht, um den Durchmesser der Erdbahn zu durchlaufen, die Zeit von 986,38 Sekunden braucht.

Setzen wir nun dem Encke'schen Werthe der Sonnenparallaxe entsprechend den Durchmesser der Erdbahn gleich 41393520 Meilen, so erhalten wir für die Geschwindigkeit des Lichtes, oder die Strecke, durch welche es in einer Sekunde sich fortpflanzt,

$$c = \frac{41393520}{986{,}38} = 41965 \text{ Meilen};$$

mit dem Hansen'schen Werthe der Sonnenparallaxe dagegen den Werth 40000 Meilen.

Diese Zahlen sind natürlich mit derselben Unsicherheit behaftet, wie die aus der Aberration abgeleiteten; man sieht indess, dass sie fast genau mit den letztern übereinstimmen; der Unterschied beträgt etwa ein Hundertstel

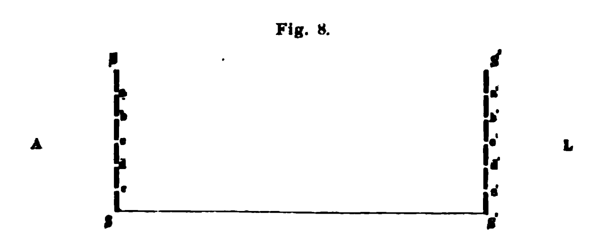
des Werthes. Durch die Wahrnehmung von Römer ist somit zweifellos der Beweis geliefert, dass das Licht, welches die beleuchteten Körper zurückwerfen, mit eben derselben Geschwindigkeit sich fortpflanzt, als das direkt von den selbstleuchtenden Körpern ausgestrahlte.

§. 4.

Geschwindigkeit des Lichtes irdischer Lichtquellen. Dass auch das Licht irdischer Lichtquellen sich mit eben derselben Geschwindigkeit fortpflanzt, als das der Fixsterne und Planeten, haben in neuerer Zeit die Versuche von Fizeau[1]) und von Foucault[2]) gezeigt, denen es gelungen ist, die Geschwindigkeit des Lichtes auf der Erde zu messen.

Das Princip des Fizeau'schen Verfahrens ist folgendes. Seien *S* und *S* zwei parallele Schirme, in denen sich eine Anzahl Oeffnungen *a, b, c* . . . . so

Fig. 8.



angebracht befinden, dass ein bei *A* befindliches Auge ein hinter dem zweiten Schirme befindliches Licht *L* bei passender Stellung der beiden Schirme durch die correspondirenden Oeffnungen *a, a'*; *b, b'*; . . . sehen kann. Werden dann die beiden als fest verbunden gedachten Schirme bei fester Stellung des Auges *A* und des Lichtes *L* auf- und abbewegt, so wird bei mässiger Geschwindigkeit der Bewegung ein Beobachter bei *A* das Licht bei *L* abwechselnd sehen, abwechselnd nicht. Wird der Schirm rascher bewegt, so wird das Licht immerfort wahrgenommen, da ebenso wie der Eindruck des Schalles im Ohr, der des Lichtes im Auge eine Zeitlang dauert und demnach das Auge bei *A* noch den Eindruck des Lichtes bewahrt, wenn auch ein Zwischenraum zwischen zwei Oeffnungen vor dem Auge steht.

Die Sichtbarkeit des Lichtes *L* durch die beiden bewegten Schirme hindurch rührt in diesem Falle von der grossen Geschwindigkeit, mit der sich das Licht fortpflanzt. Das Licht passirt die Oeffnung *c'* in dem Augenblicke, in dem *c* vor dem Auge ist, und legt den Raum *c'c* so rasch zurück, dass *c* noch nicht vor dem Auge vorüber ist, wenn das Licht bei der Oeffnung *c* ankommt.

1) *Fizeau*, Comptes Rendus de l'Académie des sciences 1849. Poggend. Ann. Bd. LXXIX.

2) *Foucault*, Comptes Rendus LV. 501 und 792. Poggend. Ann. Bd. CXVIII.

Wenn aber nun die beiden Schirme so rasch bewegt werden, dass während der Zeit, in der das Licht von c' nach c sich fortpflanzt, an die Stelle der Oeffnung c der Zwischenraum cd getreten ist, so wird das Licht durch den zweiten Schirm nicht mehr durchdringen und der Beobachter in A wird bei dieser Geschwindigkeit der Schirme das Licht L gar nicht wahrnehmen, da immer das durch eine der Oeffnungen rechts hindurchtretende Licht auf dem Schirme links statt einer Lücke den folgenden undurchsichtigen Zwischenraum findet.

Werden die Schirme noch rascher bewegt, so dass in der Zeit, in welcher das Licht, das durch eine Oeffnung rechts hindurch gegangen ist, sich zum zweiten Schirme fortpflanzt, an die Stelle der Oeffnung c die Oeffnung d getreten ist, so kann das Licht durch diese Oeffnung hindurchtreten, und das Auge in A wird dasselbe wiederum wahrnehmen.

Je nach der Geschwindigkeit, mit welcher der Schirm bewegt wird, nimmt also ein Beobachter in A das Licht entweder abwechselnd wahr oder bei rascherer Bewegung immerfort, oder bei noch rascherer Bewegung wird das Licht L gar nicht mehr wahrgenommen. Wird die Bewegung noch mehr beschleunigt, so wird das Licht wieder gesehen.

Aus der ersten Verdunklung oder dem folgenden wieder Sichtbarwerden des Lichtes kann man, wenn man den Abstand der Schirme und den der Oeffnungen in ihnen, sowie die Geschwindigkeit, mit der die Schirme bewegt werden, kennt, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes berechnen. Denn man kann daraus die Zeit berechnen, in welcher an die Stelle der Oeffnung c der Zwischenraum cd tritt, und weiss, dass in dieser Zeit das Licht die Strecke cc' durchlaufen hat.

Der Quotient aus dem durchlaufenen Raume und der Zeit, in welcher der Raum durchlaufen ist, gibt uns die gesuchte Geschwindigkeit.

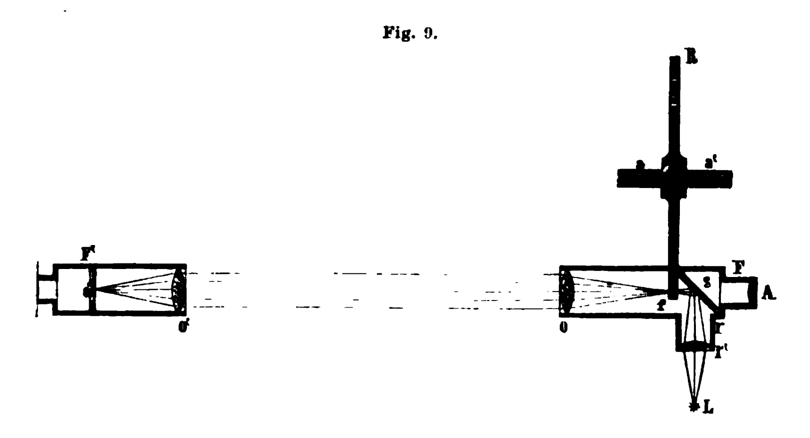
Um dieses Princip zur Anwendung zu bringen, wandte Fizeau folgendes Verfahren an:

In einer Entfernung von 8633 Meter wurden zwei Fernrohre so aufgestellt, dass ihre optischen Axen eine gerade Linie bildeten, so dass man also durch F (Fig. 9) das Objectiv o' des andern Fernrohrs F' sehen konnte. Ein in dem Brennpunkte f des Fernrohrobjectivs angebrachter leuchtender Punkt sendet dann durch das Objectiv o ein Bündel einander paralleler Strahlen auf das Objectiv o'. In diesem werden dann die ankommenden Strahlen so gebrochen, dass sie alle in einem Punkte hinter dem Objective im Brennpunkte desselben vereinigt werden.

Fizeau brachte nun an dem Fernrohre F eine seitliche Röhre rr' an, in deren Innerem sich eine Glaslinse befand; vor die Linse bei L wurde eine sehr helle Lampenflamme gestellt. Im Innern des Fernrohres bei s befand sich ein kleiner, zur Hälfte belegter, zur Hälfte durchsichtiger Glasspiegel, welcher unter einem Winkel von 45° gegen die Fernrohraxe geneigt war. Durch die Linse und den kleinen Spiegel s wurde, wie die demnächst zu betrachtenden

Reflexions- und Brechungsgesetze näher nachweisen werden, in dem Brennpunkte f des Objectivglases o ein kleines Bildchen der Flamme erzeugt, indem alle von L auf die Linse fallenden Strahlen in f vereinigt werden.

Fig. 9.



Die von f aus zum Objectiv o sich fortpflanzenden Strahlen werden dann in dem Objective so gebrochen, dass sie als ein mit der Fernrohraxe paralleles Strahlenbündel sich zum Objective o' des zweiten Fernrohres fortpflanzen, dort gebrochen und in dem Brennpunkte desselben ebenfalls zu einem kleinen Bildchen des Lichtes L vereinigt werden. In diesem Brennpunkte befand sich senkrecht zur Fernrohraxe ein kleiner Metallspiegel s', von welchem die dort ankommenden Strahlen zurückgeworfen werden. Das zurückgeworfene Strahlenbündel wird dann von dem Objective o' ebenfalls parallel gemacht, kehrt zum Objective o zurück, wird dort gebrochen und in dem Brennpunkte f zu einem neuen Bilde von L vereinigt.

Durch die obere Fernrohrwand ragte nun in das Innere des Fernrohrs ein gezahntes Rad R, dessen Umdrehungsaxe aa' mit der Axe des Fernrohrs parallel war, und durch dessen Umfang die Fernrohraxe so hindurchging, dass sie je nach der Stellung des Rades gerade einen Zahn des Rades oder eine zwischen den Zähnen befindliche Lücke traf. Die Zähne des Rades und die Lücken hatten genau die gleiche Breite und das Rad war so gestellt, dass der Brennpunkt des Objectives gerade in der vordern dem Objective zugewandten Fläche des Rades lag.

Steht nun das Rad so, dass eine Zahnlücke unten ist, dass also die Axe des Fernrohres durch eine Zahnlücke hindurchgeht, so kann das von L ausgehende, durch o und o' nach s' gelangende, von dort reflectirte und in f vereinigte Licht sich von f aus gegen A hin weiter fortpflanzen, und von A aus durch den unbelegten Theil des Spiegels s hindurch gesehen werden. Das Bild von L erscheint dann als ein kleiner ferner Stern.

Man sieht, das von L ausgehende Licht muss, um in A wahrgenommen zu werden, zweimal die Zahnlücke des Rades R passiren, einmal um von L

aus durch f, o, o' nach s' zu gelangen, dann um von s' durch o', o, f rückwärts nach A zu kommen. Das eine Rad R kann also die Stelle der beiden Schirme vertreten, da, wenn statt der Zahnlücke ein Zahn sich an der Stelle f befindet, weder Licht von L nach s', noch von s' nach A sich fortpflanzen kann.

Wird nun das Rad R gedreht, so dass abwechselnd in f sich ein Zahn, abwechselnd eine Zahnlücke befindet, so sieht man von A aus abwechselnd den fernen Stern. Wird die Drehung rascher, so dass ungefähr 10 Zahnlücken die Stelle f in der Sekunde passiren, so sieht man von A aus wegen der Dauer des Lichteindruckes im Auge den fernen Stern immerwährend. Bei sich immer vergrössernder Geschwindigkeit des Rades wird der Lichtpunkt allmählich dunkler und bei einer bestimmten sehr grossen Geschwindigkeit verschwindet er vollständig. Es tritt dann der vorhin betrachtete Fall ein; das Licht, welches durch eine Zahnlücke gegen s' hin sich fortpflanzte, findet bei seiner Rückkehr nach f dort einen Zahn, es kann daher das ankommende Licht nach A sich nicht fortpflanzen. Passirt dann die folgende Zahnlücke die Axe des Fernrohrs, so tritt neuerdings nach s' hin Licht aus F aus, da aber unmittelbar vorher ein Zahn in f war, also kein Licht nach s' sich fortpflanzte, kann auch jetzt kein Licht nach A sich bewegen.

Bei noch vergrösserter Rotationsgeschwindigkeit des Rades wird der Lichtpunkt wieder sichtbar, er wird immer heller, und wenn die Rotationsgeschwindigkeit gerade die doppelte der vorigen ist, so ist der Lichtpunkt wieder ebenso hell wie bei der langsamern Rotation, wo circa 10 Zahnlücken in der Sekunde die Fernrohraxe passirten.

Bei weiter vergrösserter Rotationsgeschwindigkeit tritt nun ein abwechselndes Dunklerwerden und Verschwinden, und wieder Sichtbar- und Hellerwerden des Lichtes ein. Jedesmal, wenn von dem ersten Verschwinden an die Rotationsgeschwindigkeit des Rades, die $2n + 1$fache wird, ist das Gesichtsfeld dunkel, jedesmal, wenn sie die $2n$fache ist, hell. Im ersten Falle ist an die Stelle der Lücke, wenn das Licht durchtrat, der folgende zweite, dritte . . . Zahn, im zweiten an Stelle der das Licht zuerst durchlassenden Lücke die nächstfolgende oder die zweite etc. Lücke getreten.

Das Rad, welches Fizeau zu seinen Versuchen benutzte, hatte 720 Zähne, so dass also jeder Zahn oder jede Lücke $^1/_{1440}$ des Umkreises des Rades betrug. Die Umdrehungsgeschwindigkeit bestimmte er durch die nach Savart's Methode (I. §. 148) hervorgebrachten Töne, indem er die Zähne des Rades gegen den Rand einer genäherten Karte schlagen liess.

Fizeau fand nun, dass das Licht zum erstenmale vollständig verschwand, wenn die Rotationsgeschwindigkeit des Rades 12,6 Umdrehungen in der Sekunde betrug. Bei dieser Geschwindigkeit war also, während das Licht von f nach s' und zurück nach f sich bewegte, also einen Weg von $2.8633 = 17266$ Metern zurücklegte, an Stelle der ersten Zahnlücke ein Zahn getreten, welcher dem Lichte den Durchtritt versperrte.

Die Zeit t, welche bei dieser Geschwindigkeit der Zahn brauchte, um an die Stelle der Lücke zu treten, war

$$t = \frac{1}{12{,}6 .\ 1440}\ \text{Sekunde},$$

da die Lücke $^1/_{1440}$ des Radumfanges ausmacht. In dieser Zeit legte das Licht den Raum von 17266 Meter zurück, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes ist somit

$$c = 17266 .\ 12{,}6 .\ 1440 = 313274304 \text{ Meter},$$

oder da die geographische Meile (15 auf einen Grad des Aequators) gleich 7420,15 Meter ist,

$$c = 42219 \text{ Meilen}.$$

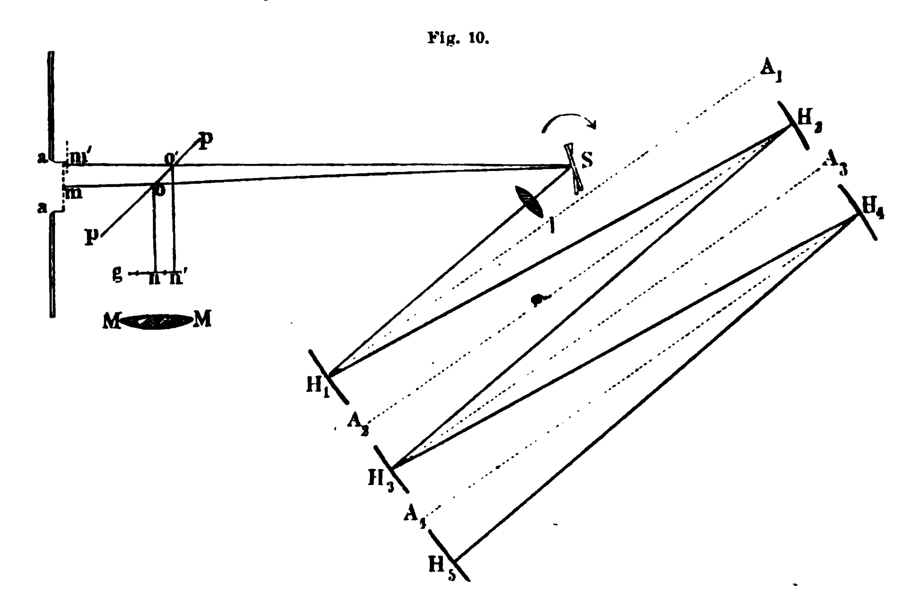
Diese von Fizeau aus 28 Versuchen erhaltene Zahl weicht von der aus der Verfinsterung der Jupiterstrabanten mit der Encke'schen Sonnenparallaxe berechneten nur um etwa 0,5 Procent, von der mit dem grössern Werthe der Sonnenparallaxe abgeleiteten um etwa $5^0/_0$ ab. Beachtet man nun die Schwierigkeit dieser Messungen und zugleich, dass ein sehr kleiner Fehler in der Bestimmung der Rotationsgeschwindigkeit auf das schliessliche Resultat von grösstem Einflusse ist, da er mit 17266 · 1440 multiplicirt wird, so darf man schon aus diesem Versuche schliessen, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes irdischer Lichtquellen mit jener des direkten oder reflectirten Sternenlichtes durchaus gleich ist.

Dieser Schluss findet seine volle Bestätigung und sichere Begründung in den Versuchen Foucault's, dem es gelungen ist, in dem begrenzten Raume eines Zimmers die Geschwindigkeit des Lichtes zu messen.

Die Versuchsmethode von Foucault beruht auf dem im nächsten Kapitel zu besprechenden Gesetze der Reflexion des Lichtes an ebenen Spiegeln, dass ein Lichtstrahl von einem Spiegel immer unter demselben Winkel zurückgeworfen wird, unter welchem er den Spiegel trifft, und auf der später zu besprechenden Eigenschaft der Hohlspiegel und Linsen, reelle Bilder von Gegenständen zu liefern, welche ihre Strahlen auf die Spiegel oder Linsen senden. Die Anordnung des Versuches zeigt schematisch Fig. 10. Durch eine enge, in dem Fensterladen eines verdunkelten Zimmers angebrachte Oeffnung *aa* tritt, durch einen Heliostaten horizontal reflectirt, ein Bündel Sonnenstrahlen; dasselbe trifft zunächst auf ein mikrometrisches Sehzeichen, welches aus einer Anzahl enger in die Silberschicht eines versilberten Glases eingeschnittener Spalten besteht. Diese Spalten sind 0,1 ᵐᵐ von einander entfernt. Die durch die engen Spalten getretenen Strahlen treffen in einiger Entfernung auf einen kleinen vertical aufgestellten Spiegel S, welcher in später zu beschreibender Weise in rasche Rotation um eine verticale Axe versetzt werden kann. Seitwärts von dem kleinen Spiegel S ist ein Hohlspiegel H_1 so aufgestellt, dass der kleine Spiegel S in einer bestimmten Lage die ihn treffenden Strahlen dem Hohlspiegel zusendet. Der Abstand des Hohlspiegels von dem

Spiegel S war bei den Versuchen Foucault's 4 Meter; er ist kleiner oder höchstens so gross als der Krümmungsradius des Hohlspiegels H_1. Dieser letztere ist so gestellt, dass seine Axe, das ist die durch den Mittelpunkt des Hohlspiegels und den Krümmungsmittelpunkt A_1 desselben gelegte gerade

Fig. 10.



Linie mit der Verbindungslinie der Mittelpunkte von S und H_1 einen gewissen, nicht zu kleinen Winkel bildet. Zwischen dem Spiegel S und H_1 befindet sich, möglichst nahe bei S, eine achromatische Linse so aufgestellt, dass die von m herkommenden, am Spiegel S reflectirten Strahlen gerade in der Fläche des Hohlspiegels ein reelles Bild des mikrometrischen Sehzeichens bilden.

Wir werden später den Nachweis liefern, dass das von dem Hohlspiegel unter diesen Umständen entworfene Bild des auf ihn geworfenen reellen Bildes des Sehzeichens genau an der Stelle dieses Bildes liegt, deshalb werden die den Hohlspiegel treffenden Strahlen von diesem an der andern Seite der Axe $H_1 A_1$ in der Richtung $H_1 H_2$ zurückgeworfen, so dass der Winkel $S H_1 A_1 = H_2 H_1 A_1$ ist. Diese zurückgeworfenen Strahlen treffen nun in H_2 einen zweiten Hohlspiegel, dessen Axe derjenigen des ersten Hohlspiegels parallel ist, und dessen Krümmungsradius gleich ist dem Abstande $H_1 H_2$ dieser beiden Hohlspiegel. Hierdurch wird bewirkt, dass der zweite Hohlspiegel in H_3 ein reelles Bild des auf H_1 entworfenen Bildes, also ein reelles Bild des Sehzeichens entwirft. In H_3 befindet sich die spiegelnde Fläche eines dritten Hohlspiegels, dessen Axe wieder denjenigen der beiden ersten Hohlspiegel parallel ist. Da nun auch hier wieder das von diesem Hohlspiegel entworfene Bild mit dem Bilde H_3 zusammenfällt, so werden von hier die Strahlen, welche den Hohlspiegel treffen, in der Richtung $H_3 H_4$ zu einem vierten Hohlspiegel

H_4 geworfen, der wieder so gestellt ist, dass seine Axe mit denen der andern Hohlspiegel parallel ist. Dieser Hohlspiegel entwirft deshalb in H_5, in einer Entfernung $H_4 H_5$, welche gleich dem Abstande $H_3 H_4$ ist, nochmals ein reelles Bild des Sehzeichens. Dieses Bild wird nun von der Fläche eines Hohlspiegels aufgenommen, dessen Krümmungsmittelpunkt in H_4 liegt, und dessen Axe parallel der Verbindungslinie $H_4 H_5$ ist. Auch in dem Spiegel H_5 fällt das von diesem Spiegel entworfene Bild mit dem auf ihn geworfenen Bilde zusammen; da aber hier die Axe des Spiegels H_5 mit der Richtung der auf den Spiegel gesandten Strahlen zusammenfällt, so kehren von H_5 die Strahlen genau in derselben Richtung nach H_4 zurück, in welcher sie von H_4 nach H_5 hingelangten. Weiter kehren deshalb auch die Strahlen genau auf dem Wege, auf welchem sie zu H_4 gelangten, über H_3, H_2, H_1 zur Linse L, dem Spiegel S und von da zu m zurück, und auf m wird von diesen Strahlen ein das ursprüngliche Sehzeichen deckendes reelles Bild des Sehzeichens selbst entworfen. Dass dieses der Fall sein muss, werden wir nächstens bei der Lehre von den Linsen nachweisen.

Es gelingt auch leicht, dieses Bild sichtbar zu machen; zu dem Ende stellte Foucault nahe bei m in den Gang der Lichtstrahlen eine planparallele Glasplatte, welche unter einem Winkel von 45° gegen die Richtung der Strahlen geneigt war. An dieser findet eine theilweise Reflexion der von S zurückkommenden Strahlen nach on statt, und in Folge dieser wird in n, einer Stelle, die ebenso weit von dem Punkte o entfernt ist, wie der Punkt m, ebenfalls ein reelles Bild erzeugt. Dieses Bild fällt dort auf eine mit einer Theilung versehene Glasplatte und wird dort mit einem Mikroskop beobachtet.

Das so beobachtete reelle Bild wird von Strahlen gebildet, welche zweimal den Spiegel S passirt haben, einmal auf dem Hinwege zu den Hohlspiegeln und dann nachdem sie den Weg über die einzelnen Hohlspiegel bis H_5 zweimal, hin und zurück, durchlaufen haben.

Wir nahmen bis jetzt an, der Spiegel S habe eine bestimmte Lage; alle die eben gemachten Betrachtungen haben aber auch Geltung, wenn der Spiegel rotirt; er nimmt dann bei jeder Rotation einmal die Stellung ein, bei welcher der Gang der Lichtstrahlen der vorhin angegebene ist, es erscheint deshalb bei jeder Rotation einmal das Bild auf der Glasplatte, und so lange die Rotation nur langsam ist, an derselben Stelle, an welcher es bei ruhendem Spiegel erschien. Denn jedesmal dann treffen die von m herkommenden Strahlen und ebenso die zurückkehrenden den Spiegel unter demselben Winkel, unter welchem sie den ruhenden Spiegel trafen, und demzufolge muss das Bild von m an derselben Stelle erscheinen. Wenn auch das Bild bei jeder Rotation nur einmal erscheint, so sieht man dasselbe, sobald der Spiegel etwa 10 mal in der Sekunde rotirt, wegen der Dauer des Lichteindruckes continuirlich.

Anders wird es, wenn der Spiegel sich sehr rasch dreht, so dass er in der Zeit, während welcher das Licht von S nach H_5 und von H_5 wieder nach

S zurückkehrt, einen messbaren Bogen beschreibt. In dem Momente, in welchem der Spiegel die vorhin als ruhende angenommene Lage hat, wird dann das Licht nach H_1 gesandt; kommt das Licht dann aber von H_5 über H_1 zurück, so hat sich der Spiegel vielleicht um einen Winkel α gedreht; der einfallende Strahl trifft dann den Spiegel, wenn er sich in der Richtung des Pfeiles dreht unter einem Einfallswinkel, der um α grösser ist, als wenn der Spiegel in Ruhe wäre; der zurückgeworfene Strahl verlässt dann den Spiegel ebenfalls unter einem um α grössern Winkel; der Winkel $H_1\,S\,m'$ ist somit um $2\,\alpha$ grösser als der Winkel $H_1\,S\,m$, den einfallender und zurückgeworfener Strahl bei ruhendem Spiegel mit einander bildeten. Der Erfolg ist, dass das von den Spiegeln entworfene Bild des Sehzeichens m dieses selbst nicht mehr deckt, sondern dass ein nach oben hin verschobenes Bild bei m' erscheint. Die Grösse dieser Verschiebung ergibt sich unmittelbar aus dem Abstande des Spiegels S und dem Winkel α, denn es ist

$$mm' = d = mS.\,\mathrm{tang}\,2\alpha,$$

da, wie wir sahen, der Winkel $m\,S\,m'$ gleich 2α ist. Misst man nun die Verschiebung d und andrerseits die Anzahl von Umdrehungen, welche der Spiegel in einer Sekunde vollführt, so können wir daraus die Zeit ableiten, welche das Licht gebraucht hat, um den Weg von S nach H_5 hin und zurück zu durchlaufen; es ist die Zeit, in welcher der Spiegel sich um den Winkel α gedreht hat.

Ist die Anzahl Umdrehungen des Spiegels in einer Sekunde gleich n, so dreht er sich in einer Sekunde durch den Bogen $2n\pi$; die Zeit, welche er zur Zurücklegung des Bogens α gebraucht, ist somit

$$t = \frac{\alpha}{2n\pi};$$

den Werth von α erhalten wir aus der Verschiebung d und dem Abstande r des Spiegels S vom Sehzeichen m mittels der vorhin aufgestellten Gleichung

$$d = r.\,\mathrm{tang}\,2\,\alpha.$$

Da nun der Bogen α immer nur äusserst klein ist, so können wir denselben für die Tangente einsetzen und erhalten

$$\alpha = \frac{d}{2r}$$

und daraus

$$t = \frac{d}{4n\pi.r}.$$

In dieser Zeit legt das Licht den Weg von S nach H_5 und wieder von H_5 nach S zurück; nennen wir diesen Weg $2l$, so erhalten wir für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes

$$c = \frac{2l}{t} = \frac{8n\pi rl}{d}.$$

Es bedarf somit zur Bestimmung von c der Messungen von d, r, l und n. Die Werthe von r und l werden direkt mit genauen Maassstäben genommen;

besonders der Werth von l, der, wie wir später sehen werden, durch die Stellung der Spiegel und ihre Krümmungsradien controlirt wird, lässt sich so mit grosser Genauigkeit ableiten.

Der Werth von d, der Verschiebung des Bildes, wird auf der Glasplatte g beobachtet; es erscheint dort nämlich das durch die theilweise Reflexion an der Platte pp erzeugte Bild n' genau soviel verschoben von dem Platze, den es bei der Ruhelage einnahm, wie die Verschiebung mm' beträgt, man hat daher mit dem Mikroskop nur diese Verschiebung zu messen, um den Werth von d zu erhalten. Bei seinen Versuchen regulirte Foucault die Rotation des Spiegels so, dass die Verschiebung $0{,}7^{\mathrm{mm}}$ oder 7 Theilstriche des reellen Bildes betrug.

Um eine solche Verschiebung des Bildes zu erzielen, bedurfte es begreiflicher Weise einer sehr grossen Rotationsgeschwindigkeit des Spiegels; zur Erzielung derselben hatte Foucault einen besondern Rotationsapparat construirt, welchen Fig. 11 darstellt[1]). Der kleine Spiegel S ist auf der Axe

Fig. 11.

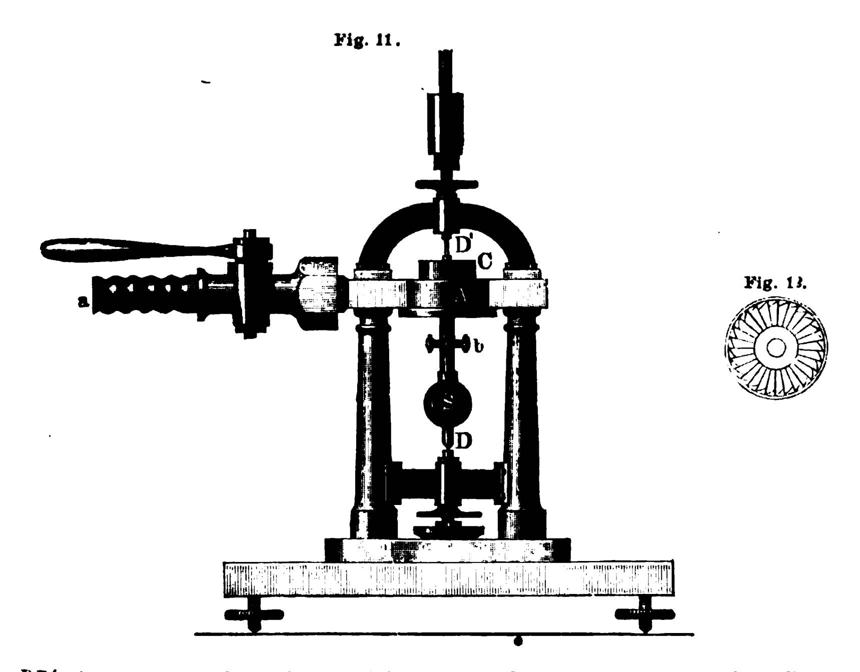


Fig. 12.

DD' einer Turbine befestigt, welche sehr viel Aehnlichkeit mit einer Sirene hat. Die bewegende Kraft des Apparates ist ein constanter, aus einem mit hohem Druck versehenen Blasebalge hervorströmender Luftstrom. Dieser tritt durch das Rohr a in den Windkasten A, dessen oberer Deckel in einem Kreise

1) Die Zeichnung und Beschreibung, welche Foucault selbst nicht gegeben hat, ist nach Jamin, Cours de physique, tome III. p. 370.

schräg eingeschnittene Löcher hat. Ueber dem Windkasten A befindet sich an der Axe DD' befestigt ein kreisförmiger Kasten C, welcher wie Fig. 12 in einem Horizontalschnitt zeigt, fächerförmig schräg, ähnlich den Schaufeln einer Schiffsschraube gestellte Querwände hat, und dessen Deckel den Zwischenräumen zwischen den Querwänden entsprechend oben ausgeschnitten ist. Der Kasten C und damit die den Spiegel tragende Axe wird so ganz in derselben Weise gedreht, wie die Scheibe der Sirene; der durch die schrägen Schnitte des untern Deckels austretende Luftstrom stösst gegen die nach der andern Seite schräg gestellten Querwände von C und treibt dieselben vorwärts. Die Zahl der Umdrehungen, die so erreicht werden konnte, war 800 in einer Sekunde.

Damit die Rotation dauernd gleichmässig erhalten werden kann, ist durchaus erforderlich, dass die Rotationsaxe zugleich eine freie Axe des Apparates sei, oder dass sie genau durch den Schwerpunkt der rotirenden Massen gehe. Zu dem Ende ist an der Axe ein kleines Regulirgewicht b angebracht, ein Ring von rechteckigem Querschnitt, durch dessen Ecken schwere verticale Schrauben geführt sind. Die Regulirung geschieht dann durch vorsichtig geführte Feilstriche, mit denen an den verschiedenen Schrauben so lange fortgefahren wird, bis bei der Rotation nicht mehr das geringste Schleudern stattfindet.

Um nun die Rotationsgeschwindigkeit des Spiegels auf das genaueste zu messen, wandte Foucault einen eigenen Kunstgriff an, der darauf beruht, dass man das Bild bei jeder Rotation des Spiegels nur einmal sieht. Man glaubt es allerdings wegen der Dauer des Lichteindrucks im Auge continuirlich zu sehen, aber diese Wahrnehmung setzt sich aus so vielen Einzelwahrnehmungen in der Sekunde zusammen, als der Spiegel Umdrehungen vollführt. Foucault stellte nun unmittelbar vor die das Bild aufnehmende Glasplatte g eine Scheibe, in deren Rand feine Zähne eingeschnitten waren, so dass er durch das Mikroskop gleichzeitig das Bild und die Zähne des Rades sehen konnte. Dreht sich die Scheibe, und man beobachtet den Rand bei continuirlicher Beleuchtung, so kann man die Zähne nicht erkennen; bei der intermittirenden Beleuchtung, welche das von den Spiegeln zurückkehrende Licht der Scheibe gibt, kann man die Zähne wieder sehen, da in dem kurzen Moment, die jede einzelne Beleuchtung dauert, die Zähne nur einen kleinen Weg zurücklegen. Wird nun die Rotationsgeschwindigkeit der Scheibe so gewählt, dass jedesmal in der Zwischenzeit zwischen dem Aufblitzen zweier Bilder ein Zahn das Gesichtsfeld passirt, so ist die Scheibe bei dem zweiten Aufblitzen des Bildes scheinbar wieder genau in derselben Lage als bei dem ersten Aufblitzen, und der Erfolg ist, dass die Scheibe dem Beobachter ganz still zu stehen scheint. Ist das erreicht, so hat man nur die Anzahl der Zähne der Scheibe mit der Anzahl der Drehungen derselben in der Sekunde zu multipliciren, um die Anzahl der aufblitzenden Bilder, also die Zahl n der Rotationen des Spiegels zu erhalten. Da man der Scheibe eine grosse Anzahl Zähne

geben kann, so ist die Rotation dieser Scheibe nur eine langsame, die durch ein angebrachtes Zählerwerk leicht zu controliren ist.

Diese Art der Zählung bietet gleichmässig eine Controle, ob die Rotation des Spiegels eine ganz gleichmässige ist, denn wenn die Zwischenzeit zwischen je zwei Beleuchtungen verschieden ist, kann das scheinbare Stillstehen der Scheibe nicht eintreten. Die Scheibe scheint rückwärts zu gehen, wenn die Drehung etwas langsamer, vorwärts, wenn sie etwas rascher ist, als vorher angenommen wurde. Die Apparate Foucault's, vom Mechaniker Froment gearbeitet, waren so ausgezeichnet, dass das scheinbare Stillestehen auf ganze Minuten eintrat, eine Zeit, die hinreichend lang war, um die Verschiebung d mit Genauigkeit zu messen.

Details über seine einzelnen Versuche gibt Foucault nicht an, er theilt nur als schliessliches Resultat derselben mit, dass sich für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c des Lichtes der Werth

$$c = 298\,000\,000 \text{ Meter}$$

oder in geographischen Meilen

$$c = 40\,160 \text{ Meilen}$$

ergebe.

Der von Foucault abgeleitete Werth für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes ist also um $^1/_{20}$ kleiner als der von Fizeau erhaltene Werth, er stimmt fast genau überein mit der aus dem grössern Werth der Sonnenparallaxe abgeleiteten Werthe der Geschwindigkeit des Planeten- oder Fixsternlichtes. Die nahe Uebereinstimmung aller der gefundenen Werthe beweist jedenfalls, dass das Licht, welcher Quelle es auch entströmt, mit immer der gleichen Geschwindigkeit sich ausbreitet. Welcher indess der genaue Werth dieser Geschwindigkeit ist, lässt sich noch nicht sagen, da auch bei der Foucault'schen Methode dieselbe Schwierigkeit vorhanden ist wie bei der Fizeau'schen; die gemessenen Längen werden mit sehr grossen Zahlen multiplicirt, oder sind, wie die Verschiebung sehr klein; der geringste begangene Fehler hat auf das schliessliche Resultat deshalb einen bedeutenden Einfluss. Ein wie hohes Vertrauen man auch in Foucault's experimentelle Meisterschaft setzen mag, es würde doch voreilig sein, lediglich auf Foucault's Resultat hin sich für die neue Sonnenparallaxe und die kleinere Lichtgeschwindigkeit zu entscheiden. Erst die Messungen bei den nächsten Venusdurchgängen 1874 und 1881 können und werden hoffentlich die Entscheidung bringen.

§. 5.

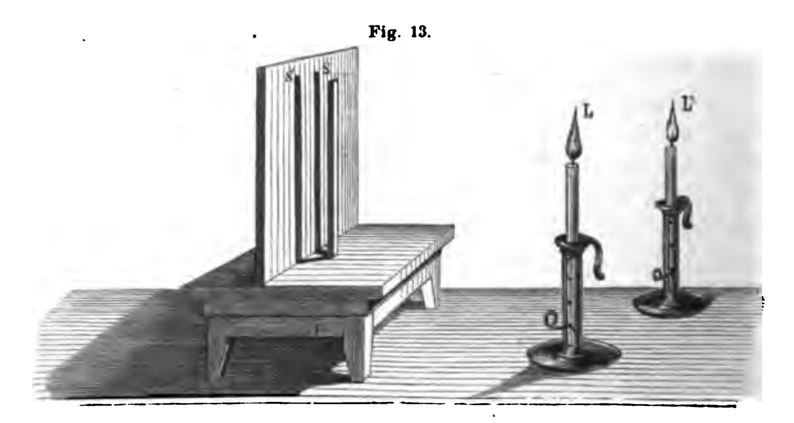
Messung der Lichtstärke. Wenn das Licht von einer Lichtquelle aus nach allen Richtungen sich fortpflanzt, so tritt eine Schwächung seiner Stärke ein, das heisst die von der Lichtquelle entfernteren Punkte werden weniger stark beleuchtet. Das ist eine durch so viele bekannte Thatsachen erwiesene Erfahrung, dass es zu deren Nachweis keines besondern Versuches bedarf.

Je weiter wir uns von einer Lichtquelle entfernen, um so schwächer wird das Licht, und es fragt sich nun, nach welchem Gesetze mit der Entfernung das Licht abnimmt.

Man kann Lichtstärken nur messen, indem man die Beleuchtung einer Fläche durch zwei verschiedene Lichter vergleicht, da das Licht, gerade so wie der Schall nur durch die Wahrnehmung mittels des Ohres zum Schall wird, nur durch die Wahrnehmung des Auges gewissermassen zum Licht wird. Besteht auch die Ursache der Beleuchtung fort, so existirt das Licht für uns nicht, wenn wir das zur Wahrnehmung des Lichtes allein fähige Organ, das Auge, schliessen. Deshalb gibt es für das Licht nicht so absolute Maasse als für Längen, oder Gewichte; alle Apparate zur Messung der Lichtstärke, die sogenannten Photometer beruhen mehr oder weniger auf subjectiver Schätzung. Das Princip der Photometer ist allgemein folgendes. Zwei an einander grenzende Stücke einer Fläche werden von verschiedenen Lichtquellen beleuchtet, die hellere Lichtquelle wird dann durch Entfernung der Lichtquelle von der Fläche geschwächt, so lange, bis beide Stücke auf das Auge den gleichen Lichteindruck machen. Kennt man dann die Stärken der beiden Lichtquellen aus andern Erfahrungen, so kann man daraus das Gesetz ableiten, nach welchem die Lichtstärken mit der Entfernung abnehmen, und kennt man dieses Gesetz, so kann man rückwärts mit Hülfe desselben die Stärken der Lichtquellen erhalten.

Das Photometer von Rumford[1]) besteht aus einem verticalen weissen Schirme, vor welchem in geringer Entfernung ein verticaler Stab von Holz oder nicht glänzendem Metall aufgestellt ist (Fig. 13). Bringt man nun in einiger Entfernung von dem Photometer zwei Lichtquellen L und L' an, so

Fig. 13.



entstehen auf dem Schirme nahe bei einander zwei Schatten, S von L und S' von L', an den Stellen, denen die Säule die Lichter verdeckt. Jeder dieser

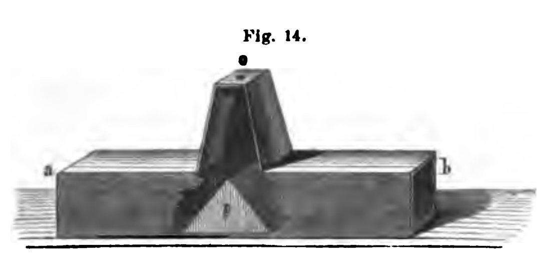
1) *Rumford*, Gilbert's Annalen XLV und XLVI.

Schatten ist aber von der ihn nicht veranlassenden Lichtquelle, also S' von L und S von L' beleuchtet.

Wenn nun beide Schatten dem Auge gleich hell erscheinen, so schliesst man daraus, dass die Stärke des sie beleuchtenden Lichtes dieselbe ist. Denn welches auch sonst die Beleuchtung des Schirmes ist, ob er ausser dem der Lichter noch anderes Licht erhält oder nicht, die beiden Schatten unterscheiden sich nur dadurch, dass der eine von der einen, der andere von der andern Lichtquelle Licht erhält. Ein Unterschied ihrer Helligkeit kann deshalb nur daher rühren, dass das eine Licht heller ist als das andere. Ist dann der Abstand $S'L = SL'$, so folgt daraus, da die beiden Lichter in gleichen Abständen vom Schirme dieselbe Helligkeit hervorbringen, dass die Lichter von gleicher Intensität sind. Ist der Abstand der beiden Lichter dann verschieden, so schliessen wir daraus auf eine verschiedene Helligkeit der beiden Lichter.

Das Photometer von Ritchie[1]) beruht auf einem ganz ähnlichen Princip. In der Mitte eines parallelepipedischen Kastens *ab* (Fig. 14) ist ein rechtwinkliges hölzernes Prisma so aufgestellt, dass die Kante, in der sich die Seiten unter einem rechten Winkel schneiden, horizontal und zur Längsrichtung des Kastens senkrecht liegt. Die beiden, gegen die horizontale Richtung um 45° geneigten Flächen sind mit reinem weissen Papier überzogen. Gerade über der Prismenkante ist in der obern Wand des Kastens ein Loch angebracht, auf welchem ein kurzes Rohr steht, dessen Endfläche bis auf ein kleines, der Grösse des Auges entsprechendes rundes Loch verschlossen ist. Sieht man durch dieses auf das Prisma p herab, so wird das Gesichtsfeld gerade durch die Prismenkante geschnitten und man sieht zugleich beide Seitenflächen des Prismas.

Fig. 14.



In den innen geschwärzten Kasten kann nur von den offenen Endflächen her Licht einfallen, welches daher die beiden gegen die Axe des Kastens gleich geneigten Seiten gleichmässig beleuchtet. Wird nun in einem dunkeln Zimmer jeder der offenen Endflächen des Kastens ein Licht gegenüber gestellt, so beleuchtet jedes der Lichter nur eine der Prismenseiten und das bei O auf das Prisma herabschauende Auge übersieht die beiden aneinander grenzenden von den verschiedenen Lichtern beleuchteten Flächenstücke. Die Lichter werden nun so lange verschoben, bis die Beleuchtung der beiden Flächen dem Auge ganz gleich erscheint.

---

1) *Ritchie*, in Schweigger's Jahrbuch etc. XLVI.

Diese beiden Photometer beruhen also lediglich auf der Schätzung des Beobachters, ob zwei Flächen den gleichen Grad der Beleuchtung geben; die mittels derselben erhaltenen Resultate können daher auf grosse Genauigkeit keinen Anspruch machen. Bessere Resultate gibt unzweifelhaft das Photometer von Bunsen.

Weisses Papier ist nicht durchsichtig, aber durchscheinend, das heisst wenn man einen ausgebreiteten Bogen von hinten beleuchtet, so nimmt man durch das Papier hindurch einiges Licht wahr. Tränkt man das Papier mit Fett, mit Oel oder Stearin, so wird es mehr durchscheinend; ein Stearinfleck in einem sonst nicht befetteten Bogen weissen Papieres sieht, wenn das Papier von hinten heller beleuchtet ist als von vorn, heller aus als die nicht befettete Umgebung, er erscheint hell auf dunkelm Grunde.

Beleuchtet man aber ein mit Stearin getränktes Papier von vorn, so erscheint es, mit nicht getränktem Papier verglichen, dunkler; ein Stearinfleck in einem Bogen weissen Papieres erscheint daher, von vorn stärker beleuchtet als von hinten, dunkel auf hellem Grunde.

Der Grund dieser Erscheinung ist der, dass befettetes Papier mehr Licht durchlässt, dafür aber in demselben Verhältnisse weniger Licht zurückwirft als das nicht befettete Papier, die Summe des zurückgeworfenen und durchgelassenen Lichtes ist für beide Papiere gleich, und zwar bis auf einen kleinen hier nicht zu beachtenden Bruchtheil, welcher absorbirt wird, gleich dem das Papier beleuchtenden Lichte.

Nennen wir daher die Menge des von einer Seite auf das ausgebreitete Papierblatt fallenden Lichtes M, so zerlegt sich diese Menge in zwei Theile, deren einer durchgelassen, deren anderer zurückgeworfen wird; sei ersterer gleich D, letzterer gleich Z, so ist

$$M = D + Z$$

für den nicht befetteten Theil des Papieres. Für den befetteten Theil hat D und Z einen andern Werth D' und Z', aber wiederum ist

$$M = D' + Z'.$$

Lassen wir jetzt auch von der andern Seite her die Lichtmenge M auf das Papier fallen, so zerlegt sich diese gerade so an dem befetteten sowohl als an dem nicht befetteten Papiere.

Sehen wir nun das Papier von einer Seite an, so gelangt von dem nicht befetteten Papier in unser Auge das von der andern Seite durchgelassene Licht D und das zurückgeworfene Licht Z, von dem befetteten Papier ebenso das durchgelassene D' und das zurückgeworfene Z'. Da nun aber

$$D + Z = D' + Z',$$

so gelangt von dem befetteten Papier dieselbe Lichtmenge in unser Auge als von dem nicht befetteten, der Stearinfleck erscheint daher genau so hell als das umgebende Papier.

Diese Erscheinung benutzt Bunsen in seinem Photometer. Auf einem

vertical stehenden Rahmen wird ein Blatt Papier ausgespannt, in seiner Mitte ein kleiner Stearinfleck gemacht, und hinter denselben ein Licht von constanter Helligkeit in einer bestimmten Entfernung aufgestellt. Um nun die geringe Menge des absorbirten Lichtes ganz unschädlich zu machen, wodurch obige Rechnung etwas geändert würde, vergleicht man nicht mit diesem hinter dem Schirme aufgestellten Lichte die Stärke des Lichtes, dessen Intensität man bestimmen will, sondern verfährt folgendermassen. Man bringt zunächst vor den Schirm das Licht, mit welchem man andere vergleichen will, und stellt es so, dass der Stearinfleck in der Mitte des Schirmes verschwindet, und ersetzt dann dieses Licht durch das zu bestimmende und bestimmt den Abstand, in welchem man dasselbe von dem Schirme aufstellen muss, damit wieder der Stearinfleck verschwindet. Dann ist die Beleuchtung des Schirmes von beiden Lichtern genau dieselbe.

Denn nennen wir die Lichtmenge, welche der befettete Fleck von dem Lichte durchlässt, welches von dem hinter dem Schirme aufgestellten Lichte auf den Schirm auffällt, a, und diejenige, welche das nicht befettete durchlässt, b, nennen wir ferner die von dem ersten Lichte auf den Schirm fallende Lichtmenge M, und bezeichnen dann die Lichtmenge, welche der befettete Fleck von diesem zurückwirft, mit zM, diejenige, welche das nicht befettete Papier zurückwirft, mit $z'M$, so haben wir, wenn der Fleck nicht sichtbar ist,

$$a + zM = b + z'M.$$

Denn das Verschwinden des Fleckes beweist uns, dass von dem befetteten Theile des Schirmes gerade so viel Licht in unser Auge kommt als von dem nicht befetteten Flecke. Aus obiger Gleichung folgt

$$M = \frac{a-b}{z'-z}.$$

Ist nun die Lichtmenge, welche von dem zweiten mit dem ersten zu vergleichenden Lichte auf den Schirm fällt, gleich M', wenn der Fleck wiederum verschwunden ist, so ist wieder die von dem befetteten Papier zurückgeworfene Lichtmenge zM' und die vom umgebenden Papier $z'M'$. Da nun der Fleck verschwindet, so ist wie vorhin

$$a + zM' = b + z'M',$$

$$M' = \frac{a-b}{z'-z}.$$

Da nun a und b sowie z' und z in diesem Falle denselben Werth haben, wie vorhin, so folgt

$$M = M',$$

oder die von beiden Lichtern auf den Schirm fallende Lichtmenge ist in beiden Fällen dieselbe. Kennt man nun die in beiden Fällen von den Lichtern ausgesandte Lichtmenge, so kann man aus den Abständen, in welchen die Lichter den Schirm gleich stark beleuchten, das Gesetz bestimmen, nach welchem die Lichtwirkung mit der Entfernung von der Lichtquelle abnimmt.

Kennt man aber das Gesetz, so kann man daraus das Verhältniss des von beiden Lichtquellen ausgesandten Lichtes bestimmen.

Wenden wir nun eines dieser Photometer an, um die Lichtwirkungen einer Lichtquelle in den Abständen 1, 2, 3 ... zu vergleichen, so sieht man deutlich, dass das Licht mit der Entfernung geschwächt wird; denn wenn z. B. beim Bunsen'schen Photometer der Fleck verschwindet, wenn das Licht in der Entfernung von 1 Meter vom Schirme angebracht ist, so wird der Fleck dunkel, wenn wir das Licht dem Schirme nähern, ein Beweis, dass er von vorn mehr beleuchtet wird als von hinten, entfernen wir das Licht, so wird der Fleck heller, ein Beweis, dass er jetzt von hinten stärker beleuchtet wird als von vorn.

Hierbei zeigt sich aber, dass der Unterschied in der Beleuchtung um so vernehmlicher ist, je grösser die Differenz der Abstände des Lichtes im Vergleiche zur Entfernung des Lichtes ist, bei welcher der Fleck verschwand. Das heisst, verschwand der Fleck in einem Falle, wenn die Entfernung des Lichtes vom Schirme 1 Meter war, so erscheint derselbe sehr hell auf dunkelm Grunde, wenn wir das Licht in die Entfernung zweier Meter bringen; verschwand der Fleck aber in einem andern Falle, wenn das Licht in der Entfernung von 10 Meter vom Schirme aufgestellt war, so tritt er nur kaum sichtbar hervor, wenn wir das Licht wieder um ein Meter entfernen, also es um $^1/_{10}$ der ursprünglichen Entfernung fortrücken.

Daraus folgt, dass die Schwächung des Lichtes nicht einer Vernichtung oder Verschluckung desselben durch die Luft zugeschrieben werden darf, in welcher sich das Licht fortpflanzt. Denn in dem Falle müsste eine Luftschicht von derselben Dicke immer eine gleiche Lichtmenge verschlucken; nähme die Luftschicht von 1 Meter Dicke im ersten Falle die Hälfte des an ihrer Vorderfläche ankommenden Lichtes in sich auf, so müsste sie das auch in dem zweiten Falle thun, oder der Unterschied der Beleuchtung müsste im zweiten Falle gerade so merklich sein als in dem ersten. Wir müssen daher schliessen, dass es in der Natur des Lichtes liegt, dass die Stärke der Beleuchtung abnimmt, wenn wir uns von der Lichtquelle entfernen.

Die Natur des Lichtes mag sein, welche sie will, so liegt schon in der §. 1 entwickelten Thatsache, dass das Licht von einer Lichtquelle aus nach allen Richtungen geradlinig sich ausbreitet, der Grund für die Schwächung des Lichtes. Denn denken wir uns z. B. eine kugelförmige Lichtquelle, etwa eine glühende Metallkugel, von der in jedem Augenblicke eine gegebene Lichtmenge ausstrahlt, so wird diese Lichtmenge nach einer gewissen Zeit eine Kugelfläche beleuchten, deren Radius gleich ist dem Produkte aus dieser Zeit und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes. Nach der doppelten Zeit hat sich das Licht nach der Richtung der Kugelradien doppelt so weit entfernt, es beleuchtet eine Kugel vom doppelten Radius. Da nun dieselbe Lichtmenge eine so viel grössere Fläche beleuchtet, so ist klar, dass die Beleuchtung jedes gegebenen Flächenstückes um so viel schwächer ist als diese

Fläche, auf der sich das Licht verbreitet, grösser ist. Denn wir dürfen es wohl als einen Grundsatz ansehen, dass die Helligkeit der Beleuchtung einfach proportional ist der Lichtmenge, welche eine Fläche erhält. Die Fläche einer Kugel vom doppelten Radius hat nun die vierfache Grösse. In der Kugel vom doppelten Radius wird ein gegebenes Flächenstück deshalb nur ein Viertel der Strahlen erhalten, welche es in der Kugel vom Radius 1 erhielt, da sich dieselbe Lichtmenge über eine Fläche von vierfacher Grösse verbreitet. Die Helligkeit der Beleuchtung wird daher nur $^1/_4$ sein. Allgemein, verbreitet sich das Licht über eine Fläche vom Radius r, so ist die Grösse der Kugel proportional r^2, jedes Flächenstück erhält daher nur $\frac{1}{r^2}$ Licht von dem, welches es in der Kugel vom Radius 1 erhalten würde, die Helligkeit der Beleuchtung ist daher nur $\frac{1}{r^2}$. Es folgt daraus, dass die Lichtstärke bei einer Entfernung von der Lichtquelle abnimmt, wie die Quadrate der Entfernung wachsen.

Man kann diesen Satz mit Hülfe der vorhin erwähnten Photometer wenigstens annähernd experimentell nachweisen. Denn nach dem Grundsatze, dass eine Fläche in demselben Verhältnisse stärker beleuchtet wird, als sie mehr Licht empfängt und nach der gewiss berechtigten Annahme, dass n gleiche Lichter zusammen n mal so viel Licht aussenden als jedes einzelne, wird eine Fläche von n Lichtern im Abstande 1 n mal mehr Licht empfangen als von einem Lichte.

Wenn wir nun das Bunsen'sche Photometer einmal mit einem Lichte beleuchten und den senkrechten Abstand von der Mitte des Schirmes bestimmen, in welchem das Licht aufgestellt werden muss, damit der Fleck verschwindet, und dann n Lichter parallel unmittelbar neben einander stellen, so dass die Ebene der Flammen der des Schirmes parallel ist, so finden wir, dass jetzt der Abstand, in dem wir diese Lichter aufstellen müssen, damit der Fleck verschwindet, sich zu dem Abstande im ersten Falle verhält wie die Quadratwurzel von n zu 1. Vier Lichter bringen also in der doppelten, neun in der dreifachen, 16 in der vierfachen Entfernung den Fleck zum Verschwinden.

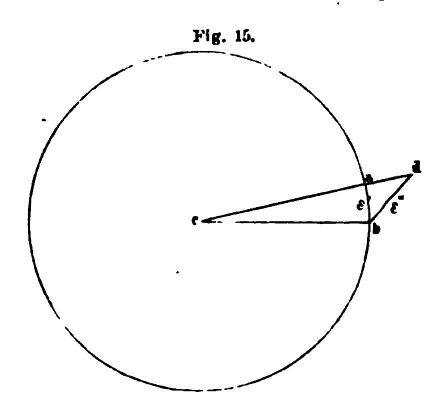
Da nun 4, 9, 16 Lichter, welche nach obigem Grundsatze in der Entfernung 1 eine Fläche 4, 9, 16mal so stark beleuchten als ein Licht, in der 2, 3, 4fachen Entfernung dieselbe Helligkeit hervorbringen, wie ein Licht in der einfachen Entfernung, so folgt, dass die Lichtstärken abnehmen, wie die Quadrate der Entfernungen von der Lichtquelle wachsen.

Man wird jedoch bei einem solchen Versuche das Gesetz nur annähernd bestätigt finden, da die Voraussetzungen, unter denen das Gesetz theoretisch abgeleitet wurde, in dem Versuche nicht erfüllt sind.

Wir setzten nämlich voraus, dass das Licht von einer glühenden Kugel ausstrahle und eine Kugelfläche beleuchte.

Jedes Flächenelement ε' (Fig. 15) dieser letztern Kugel, welches zwischen den Radien *ca* und *cb* liegt, erhält das in dem Strahlenkegel *cab* sich fortpflanzende Licht. Nehmen wir die Kugel, welche das Licht ausströmt, so klein an, dass wir sie als leuchtenden Punkt betrachten können, und das Element ε' so klein, dass wir die Strahlen *ac* und *ab* als parallel betrachten können, so steht das Element ε' auf den es beleuchtenden Strahlen senkrecht. Das Flächenelement ε'', welches ebensoweit von *c* entfernt ist als ε', aber mit ε' irgend einen Winkel α bildet, und welches von einem Kegel umschrieben wird, dessen Spitze *c* und dessen Basis ε' ist, erhält nun gerade soviel Licht als das Flächenelement ε'.

Fig. 15.



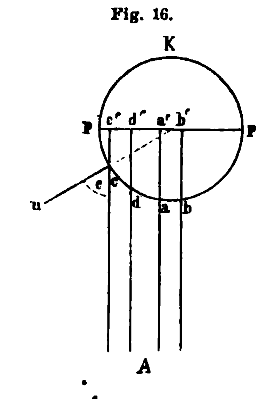
Die Lichtmenge, welche dann der Theil dieses Elementes erhält, welcher dem Elemente ε' an Grösse gleich ist, ist nun aber soviel kleiner als die Lichtmenge m, welche ε' erhielt, als das Flächenelement ε'', über welches sich die Lichtmenge m jetzt ausbreitet, grösser ist wie ε'. Die Lichtmenge ist daher $m \cdot \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}$. Der Quotient $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}$ ist nun aber gleich dem Cosinus des Winkels *abd*, welchen ε'' mit ε' bildet. Dieser Winkel ist aber gleich dem, welcher die Richtung der das Flächenelement treffenden Lichtstrahlen mit der auf ε'' senkrechten Richtung bildet. Nennen wir diese Senkrechte das Einfallsloth, und den Winkel, welchen die Strahlen mit dem Einfallslothe bilden, den Einfallswinkel, so ergibt sich daraus, dass die Beleuchtung, welche eine Fläche erfährt, nicht nur umgekehrt proportional ist dem Quadrate des Abstandes der beleuchteten Fläche von der Lichtquelle, sondern auch proportional ist dem Cosinus des Einfallswinkels der Lichtstrahlen.

Dass der Einfallswinkel der Lichtstrahlen auf die Intensität der Beleuchtung von Einfluss ist, davon kann man sich durch einen Versuch mit dem Bunsen'schen Photometer überzeugen. Macht man den Schirm um eine verticale Axe drehbar, welche durch den Stearinfleck hindurchgeht, und sorgt man dafür, dass das hinter dem Schirme angebrachte Licht immer in der Höhe des Fleckes und in der zur Schirmfläche senkrechten durch den Fleck gehenden Richtung bleibt, so tritt bei einer Drehung des Schirmes der Fleck wieder hell auf dunkelm Grunde hervor, wenn derselbe verschwand, als das Licht vor dem Schirme so gestellt war, dass eine von dem Lichte auf die Ebene des Schirmes herabgelassene Senkrechte den Fleck traf. Das Hervortreten des Fleckes hell auf dunkelm Grunde beweist, dass die Beleuchtung der Vorderfläche des Schirmes mit dem Wachsen des Einfallswinkels abgenommen hat.

Wie dieser Umstand auf den vorhin erwähnten Versuch störend einwirken kann, sieht man leicht; die von einem Lichte ausgehenden Strahlen treffen den Schirm alle merklich parallel, wenn wir aber nun vier oder neun Flammen neben einander aufstellen, so bilden die von den äussersten Flammen zum Schirm sich fortpflanzenden Strahlen mit dem Einfallslothe schon merkliche Winkel. Die Wirkung der äussern Strahlen ist daher eine andere als die der centralen; man sieht, wie aus diesem Grunde bei dem Versuche sich die Wirkung der Strahlen nicht einfach summirt, wie wir es voraussetzten.

Auch der Winkel, unter welchem die Lichtstrahlen die Oberfläche eines leuchtenden Körpers verlassen, ist von Einfluss auf die Helligkeit, welche sie auf der beleuchteten Fläche erzeugen. Es ist eine bekannte Thatsache, dass eine glühende Kugel uns als eine ganz gleichmässig glühende Scheibe erscheint. Ist nun K Fig. 16 eine solche Kugel, von der sich in grosser Entfernung das Auge befindet, so sehen wir die Kugel als kreisförmige Scheibe vom Durchmesser pp. Da uns diese Scheibe als ganz gleichförmig leuchtend erscheint, so folgt, dass die sehr kleinen Segmente ab, cd, deren ersteres parallel zu pp ist, während das andere mit pp den Winkel α bildet, in das weit entfernte Auge A die gleiche Lichtmenge senden, wenn die Projectionen $c'\,d'$ von cd und $a'\,b'$ von ab von gleicher Grösse sind.

Fig. 16.



Nun ist aber $cd = \frac{c'\,d'}{\cos\alpha} = \frac{a'\,b'}{\cos\alpha}$

und

$$ab = a'\,b'.$$

Das uns gleich hell erscheinende Segment cd, das mit pp den Winkel α bildet, ist also im Verhältniss von 1 zu $\cos\alpha$ grösser wie ab; ein Stück dieses Segmentes, welches genau die Grösse von ab hat, also gleich $cd \,.\, \cos\alpha$ ist, sendet uns nun auch soviel weniger Lichtstrahlen zu, als es kleiner ist wie cd, es wird daher eine gegebene Fläche in demselben Verhältnisse weniger beleuchten.

Der Winkel α ist nun gleich dem Winkel e, welchen die von cd nach A gesandten Lichtstrahlen mit der zu der kleinen Fläche cd senkrechten Richtung cn bilden. Nennen wir diesen Winkel den Ausflusswinkel, so folgt aus dem Obigen, dass die Beleuchtung, welche eine gegebene Fläche von einer leuchtenden Fläche erhält, proportional ist dem Cosinus des Ausflusswinkels der Lichtstrahlen [1]).

Wenn wir demnach das theoretisch abgeleitete Gesetz über die Abnahme der Lichtstärke mit der Entfernung von der Lichtquelle experimentell prüfen wollen, oder dasselbe zur Vergleichung der Stärke zweier Lichtquellen, etwa

1) *Beer*, Photometrischer Calcül. Braunschweig 1854.

zweier leuchtender Flammen benutzen wollen, müssen wir darauf achten, dass sowohl die Einfallswinkel als die Ausstrahlungswinkel bei den Versuchen denselben Werth haben.

§. 6.

Ueber die Natur des Lichtes. Emissionshypothese [1]). In den bisherigen Entwicklungen haben wir es durchaus unentschieden gelassen, welches das Wesen des Lichtes ist und nur die Thatsachen betrachtet, welche sich uns bei ungestörter Verbreitung des Lichtes darbieten. Selbst die Entwicklung des Gesetzes, nach welchem die Lichtintensität abnimmt, wenn wir uns von der Lichtquelle entfernen, stützt sich nur auf die Thatsache, dass das Licht von einem Mittelpunkte aus nach allen Richtungen sich geradlinig ausbreitet. Es fragt sich nun, was ist es, was sich fortpflanzt und ausbreitet, und zu uns gelangt, uns die Empfindung der Helligkeit gibt.

Es gibt zwei bestimmte und denkbare Vorstellungsarten über das, was dem Lichte zu Grunde liegt. Entweder, und das ist das Naheliegendste, ist das, was im Lichte sich fortpflanzt, ein und derselbe Körper, welcher nach und nach an den verschiedenen Stellen seiner Bahn auftritt, oder es ist ein Bewegungszustand, der in einer Reihe von Körpern, welche die Bahn der Lichtstrahlen ausfüllen, und von denen jeder innerhalb gewisser Grenzen sich bewegt, allmählich fortschreitet. Beispiele beider Arten fortschreitender Bewegung haben wir kennen gelernt; in dem geworfenen Körper, der nach und nach an den verschiedenen Stellen seiner Bahn sich befindet, für die erste Art; in der dem Schalle zu Grunde liegenden Wellenbewegung, bei der nach und nach die schwingende Bewegung der ihren Ort im Raume nicht verlassenden Theile der tönenden Körper an den verschiedenen Stellen der Bahn des Schalles auftrat, ein ausgedehntes Beispiel für die fortschreitende Bewegung der zweiten Art.

Beide Bewegungsarten lassen sich zur Erklärung der Lichterscheinungen anwenden; die erste liegt der Newton'schen Emissionshypothese zu Grunde, die letztere der von Huyghens zuerst aufgestellten Undulationstheorie. Es wird ein Theil unserer Aufgabe in der Behandlung der Lehre vom Lichte sein, diese Hypothesen gegen einander abzuwägen, um so zu entscheiden, was wir als das Wesen des Lichtes anzusehen haben.

Newton sieht das Licht an als materielle Theilchen, welche von den leuchtenden Körpern ausgeschleudert werden und denselben Gesetzen folgen, wie die geworfenen Körper. Wenn diese Körpertheilchen in unser Auge drin-

---

1) *Newton*, Optice liber I. Genevae et Lausannae 1740.
Herschel, „On Light". Auch übersetzt von *Schmidt*. Stuttgart 1831.
Biot, Traité de Physique experimentale et mathématique. Paris 1810. Auch übersetzt von *Fechner*. Leipzig 1829. Bd. IV.

gen und auf die Netzhaut stossen, so erhalten wir die Empfindung des Lichtes. Diese Lichttheilchen sind mit anziehenden und abstossenden Kräften begabt, und werden auch von den Körpern bald angezogen, bald abgestossen. Die Geschwindigkeit der Bewegung ist die der Fortpflanzung des Lichtes.

Die bisher betrachteten Erscheinungen stehen mit dieser Annahme im Einklang. Nur die leuchtenden Körper enthalten solche Theilchen, oder sind durch irgend einen in ihnen vorgehenden Process im Stande, sie auszuwerfen. Wenn aber die von einem leuchtenden Körper ausgehenden Lichttheilchen auf einen dunkeln Körper treffen, werden sie von diesem theils angezogen, theils wieder abgestossen und die von den dunkeln Körpern wieder ausgestossenen Theilchen machen uns dieselben sichtbar.

An den leuchtenden Körpern so wie an den beleuchteten unterschieden wir verschiedene Helligkeit und verschiedene Farbe. Nach der Newton'schen Hypothese rührt der verschiedene Grad der Helligkeit der Körper her von der verschiedenen Menge Licht, welche dieselben in gleichen Zeiten auswerfen; in demselben Verhältnisse, als sie mehr Licht aussenden, erscheinen sie stärker leuchtend.

Um die verschiedene Farbe des Lichtes zu erklären, nimmt die Hypothese an, dass die verschiedenen Lichter verschiedene Arten von Lichttheilchen aussenden; jeder Farbe entspricht eine bestimmte Art der Lichttheilchen, die grün leuchtenden Körper entsenden Lichttheilchen, welche uns den Eindruck des grünen Lichtes machen, die blau leuchtenden solche Lichttheilchen, welche unserem Auge den Eindruck des blauen Lichtes machen. Worin dieser Unterschied der Lichttheilchen besteht, ist unbestimmt, gewisse Eigenschaften der einzelnen wird die Betrachtung der gestörten Fortpflanzung des Lichtes erkennen lassen.

Bei ungehinderter Ausbreitung pflanzt das Licht sich in geraden Linien fort. Dies ist eine nothwendige Folge der Annahme, dass das Licht aus geworfenen Körpertheilchen bestehe. Denn vermöge der Trägheit der Materie beharrt ein Körper in seiner Bahn, bis äussere Kräfte ihn daraus ablenken. So lange die Lichttheilchen daher in ihrer Ausbreitung nicht gestört werden, müssen sie in der Richtung sich weiter bewegen, in der sie ursprünglich angestossen wurden, ihre Bahn muss daher eine gerade Linie sein.

Um die grosse Geschwindigkeit des Lichtes zu erklären, müssen wir annehmen, dass die Lichttheilchen mit sehr grosser Kraft ausgestossen werden, und um es zu begreifen, dass die Lichttheilchen trotz ihrer grossen Geschwindigkeit bei ihrem Stosse auf andere Körper keine mechanische Wirkung äussern, müssen wir unterstellen, dass die Lichttheilchen von äusserster Feinheit und Kleinheit sind.

Die Verzögerung in der Verfinsterung der Jupiterstrabanten, die Aberration des Lichtes, sowie die Versuche von Fizeau und Foucault sind der un-

mittelbare Ausdruck der Annahme, dass sich alle Lichttheilchen, aus welcher Quelle sie auch stammen, mit gleicher Geschwindigkeit fortbewegen. Diese Thatsache bietet der Emissionshypothese eine grosse Schwierigkeit. Denn wenn auch die Lichttheilchen durch irgend einen Process von den leuchtenden Körpern ausgeworfen werden, so müssen sie doch nach den Gesetzen der allgemeinen Massenanziehung von den Körpern, welche sie ausgeworfen haben, angezogen werden; ist die Masse der Körper nun verschieden, so muss auch die Anziehung derselben auf die ausgeschleuderten Lichttheile und somit die Verzögerung der letzteren eine verschiedene sein. Welches daher auch die Geschwindigkeit ist, welche den Lichttheilchen durch den Ausstossungsprocess ertheilt ist, so muss doch die endliche Geschwindigkeit derselben, mit welcher sie zu uns gelangen, je nach der Masse der sie aussendenden Körper eine verschiedene sein, wenn man nicht die ganz willkürliche und unberechtigte Annahme machen will, dass die ausstossenden Kräfte zu der Masse des aussendenden Körpers in einem ganz bestimmten Verhältnisse stehen. Diese Schwierigkeit, welche die Emissionshypothese bietet, kann nur durch die Annahme gehoben werden, dass die kleinen Theilchen aus den leuchtenden Körpern mit sehr verschiedenen Geschwindigkeiten ausgesandt werden, dass aber unter diesen Geschwindigkeiten nur eine sei, welche unserem Gesichtsorgan angemessen sei, und dass nur die mit dieser Geschwindigkeit unser Auge treffenden Lichttheilchen uns die Empfindung des Lichtes geben.

Das Gesetz, nach welchem die Lichtstärke mit der Entfernung von der Lichtquelle abnimmt, ist eine nothwendige Folge der Emissionstheorie. Denn jede Lichtquelle sendet darnach in einer bestimmten Zeit eine bestimmte Menge von Theilchen aus; diese verbreiten sich über immer grössere Kugelflächen. Die grössern Flächen in der Entfernung r von der Lichtquelle erhalten also dieselbe Anzahl Lichttheilchen als die kleinere im Abstande 1. Eine Fläche von gegebener Grösse empfängt daher in der letztern Kugelfläche in demselben Verhältnisse mehr Lichttheilchen, als diese selbst kleiner ist wie die entferntere Kugel. Das Verhältniss der Grössen ist aber das umgekehrte der Quadrate der Radien oder der Abstände der einzelnen Flächen von dem leuchtenden Mittelpunkte; in demselben Verhältnisse muss also die Beleuchtung der verschieden entfernten Flächen stehen.

Die Entwicklungen, mittels deren der Nachweis geführt wurde, dass die Beleuchtung einer Fläche abhänge von dem Einfallswinkel, unter welchem die Lichtstrahlen die beleuchteten Flächen treffen, lassen sich unmittelbar in die Sprache der Emissionshypothese übertragen, auch dieser Einfluss ist daher eine nothwendige Folge dieser Theorie.

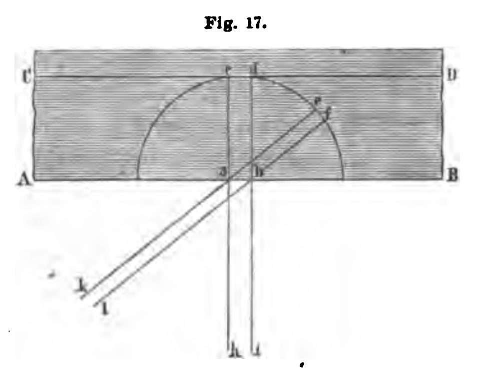
Anders jedoch verhält es sich mit dem Einfluss des Ausstrahlungswinkels; den Grund, weshalb das Licht unter schiefem Winkel geringer als unter rechtem Winkel ausstrahle, gibt sie nicht. Das ist jedoch kein Mangel oder Vorwurf derselben, da sie nur die Frage zu beantworten sucht, was das ist, was

von den leuchtenden Körpern ausgehend uns als Licht erscheint, nicht aber, durch welchen Process diese Lichttheilchen ausgeschleudert werden.

Mit Hülfe einer von Fourier [1]) aufgestellten Hypothese ist es jedoch leicht, dieses Gesetz als in der Natur der Strahlung begründet zu erkennen; man hat nur anzunehmen, dass das Licht nicht aus der geometrischen Oberfläche des leuchtenden Körpers, sondern aus einer gewissen Tiefe hervordringt, so dass alle Punkte bis zu einer gewissen Tiefe unterhalb der Oberfläche Lichttheilchen ausschleudern.

Sei *AB* Fig. 17 die Oberfläche eines leuchtenden Körpers und *ab* ein Flächenelement, dessen Strahlung untersucht wird. Nach der Annahme von Fourier gehen nun von *ab* nicht nur von diesem Elemente ausgesandte Strahlen aus, sondern auch solche, welche aus einer gewissen Tiefe kommen. Ist *CD* die am weitesten von der Oberfläche entfernte Schicht, aus welcher noch Strahlen nach aussen gelangen können, so werden alle Elemente, welche innerhalb einer um den Mittelpunkt von *ab* beschriebenen Halbkugel liegen, deren Radius gleich ist dem senkrechten Abstande von *AB* und *CD*, durch das Element von *AB* Strahlen aussenden.

Fig. 17.



Um nun die Intensität der von *ab* nach den verschiedenen Richtungen ausgehenden Strahlen zu vergleichen, muss man die Strahlenbündel vergleichen, deren gerade oder schiefe Basis *ab* ist, also z. B. *hicd* und *kefl*. Die einzelnen Strahlen jedes Bündels haben gleiche Intensität, indem jeder Strahl alle von den einzelnen auf dem entsprechenden Radius der Halbkugel liegenden Körperelementen ausgesandten Lichttheilchen enthält. Daraus folgt dann, dass die Intensitäten der von demselben Element nach den verschiedenen Richtungen ausgesandten Strahlenbündel sich verhalten müssen, wie die Querschnitte der betreffenden Bündel. Diese Querschnitte verhalten sich aber wie die Cosinus der Ausstrahlungswinkel.

Wenn man also die Hypothese von Fourier zugeben darf, so ist das Gesetz, nach welchem die Intensität der Strahlung einer leuchtenden Fläche proportional dem Cosinus der Ausstrahlung abnimmt, in der Natur des Strahlungsvorganges begründet.

Eine weitere Prüfung der Fourier'schen Hypothese ist erst an einer andern Stelle, bei Untersuchung der Wärmestrahlung, für welche Fourier sie zunächst aufstellte, möglich.

---

1) *Fourier,* Annales de chim. et de phys. t. VI.

§. 7.

Undulationstheorie. Die andere Vorstellungsart über das Wesen des Lichtes wurde fast gleichzeitig mit der Newton'schen von Huyghens [1]) entwickelt. Durch Newton's Theorie lange verdunkelt, fand sie im 18. Jahrhundert fast nur an Euler [2]) einen Vertheidiger. In unserem Jahrhundert verschafften ihr jedoch die Arbeiten Young's [3]), Fresnel's [4]), Cauchy's [5]) u. a. den Sieg über die Newton'sche Hypothese. Die Voraussetzung, welche ihr zum Grunde liegt, ist die, dass der ganze Raum mit einem unendlich feinen elastischen Fluidum, dem Aether angefüllt sei, und dass das Licht eine schwingende Bewegung dieses Aethers sei, welche nach den Gesetzen der Wellenbewegung sich fortpflanzt. Diese Theorie setzt also das Licht in die innigste Analogie mit dem Schalle, jedoch mit dem Unterschiede, dass der Schall eine Wellenbewegung der Luft ist, das Licht eine Wellenbewegung jenes äusserst feinen hypothetischen Fluidums, des Lichtäthers, welcher den sonst so genannten leeren Raum ausfüllend eine Verbindung zwischen den leuchtenden Gestirnen und uns herstellt, welcher aber ebenso an unserer Erde sich befindet, indem er in die von der ponderabeln Materie gelassenen Räume sich legend alle Körper erfüllt. Der Process des Leuchtens besteht dann in einer Erregung der schwingenden Bewegung des Aethers, welche bis zu unserem Auge fortgepflanzt durch die Stösse des bewegten in unserem Auge befindlichen Aethers uns die Empfindung des Lichtes ertheilt.

Gerade wie beim Schall die Amplitude der schwingenden Bewegung die Intensität des Schalles bestimmt, so bestimmt auch die Amplitude der Aetherschwingungen die Intensität des Lichtes und aus den dort entwickelten Gründen ist die Intensität des Lichtes dem Quadrate der Amplitude proportional.

Die verschiedene Zahl der in der Zeiteinheit unser Ohr treffenden Stösse der schwingenden Luft bestimmt beim Schall die Höhe des gehörten Tones, beim Licht bewirkt die Verschiedenheit der in der Sekunde stattfindenden Schwingungszahl den Unterschied der Farbe. Die langsamsten Schwingungen machen den Eindruck des rothen, schnellere den des grünen, die schnellsten den des violetten Lichtes.

---

1) *Huyghens,* Traité de la lumière. Chap. I. Leiden 1690.

2) *Euler,* Nova theoria lucis et colorum. Opusc. var. Berlin 1746. Briefe an eine deutsche Prinzessin, übersetzt von *Kries.* Leipzig 1792.

3) *Young,* On Theory of light and Colours. Philosoph. Transact. for 1802. Course of lectures in natural philosophy and the mechanical arts. London 1807.

4) *Fresnel,* Sur la lumière. Supplément à la traduction française de la cinquième édition du traité de chimie de Thomson par Riffault. Paris 1822, übers. in Poggend. Annalen. Bd. III, V, XII. Ausserdem Fresnel's Arbeiten über die Beugung, die Polarisation etc., welche wir alle im Verlaufe dieses Theiles einzeln kennen lernen werden. Die sämmtlichen optischen Arbeiten Fresnel's sind zusammengestellt in den Oeuvres complètes d'Augustin Fresnel. T. I u. II. Paris 1866 u. 1868.

5) *Cauchy,* Mémoire sur la dispersion de la lumière. Prag 1836.

Ehe wir nun die bisher betrachteten Lichterscheinungen mit dieser Hypothese vergleichen, müssen wir zunächst die Frage beantworten, ob denn die Erscheinungen der Planetenbewegung es uns gestatten, den sogenannten leeren Raum uns mit dem Aether angefüllt zu denken.

Die Planeten bewegen sich bekanntlich seit Jahrtausenden in immer denselben Bahnen um die Sonne und legen diese Bahnen in immer derselben Zeit zurück.

Wir müssen daraus schliessen, dass sie sich in einem Raume bewegen, der ihrer Bewegung keinen Widerstand entgegensetzt. Denn bewegten sie sich in einem widerstehenden Mittel, so würde dieses in jedem Augenblicke die nach der Tangente der Bahn an der Stelle, an der sie sich befinden, gerichtete Bewegung hemmen, also ihre tangentiale Geschwindigkeit verringern. Nach den Entwickelungen des dritten Kapitels im ersten Abschnitte des ersten Theiles würde diese Störung der tangentialen Geschwindigkeit der Bewegung eine Annäherung der Planeten an den anziehenden Mittelpunkt zur Folge haben müssen, die Abstände der Planeten von der Sonne müssten also allmählich kleiner werden, und damit die Umlaufszeit der Planeten abnehmen, da nach dem dritten Keppler'schen Gesetze die Quadrate der Umlaufszeiten sich verhalten wie die Kuben der mittleren Entfernung. Die Unveränderlichkeit der Planetenbahnen und der Zeit, in welcher die Planeten dieselben zurücklegen, beweist demnach, dass in dem Weltenraume kein Mittel vorhanden ist, welches der Planetenbewegung merklich widersteht.

Diese Thatsache ist jedoch kein Beweis für die Unzulänglichkeit der Annahme des Lichtäthers. Denn bekanntlich nimmt der Widerstand, den ein Mittel der Bewegung eines Körpers entgegensetzt, ab, wenn die Dichtigkeit des Mittels gegen die des Körpers nur klein ist und zwar um so mehr, je kleiner die Dichtigkeit des Mittels im Verhältniss zu jener der bewegten Körper ist. Um daher durch die erwähnte Thatsache in der Annahme des Lichtäthers nicht gehindert zu sein, müssen wir dem Aether eine im Verhältniss zu jener der Planeten unendliche Feinheit zuschreiben, eine Annahme, zu der wir übrigens auch durch die optischen Phänomene geführt werden, und welche ebenso berechtigt ist als die Annahme der Emissionshypothese, welche den von den leuchtenden Körpern ausgeschleuderten Lichttheilchen eine für uns unendliche Feinheit zuschreibt.

Wir sehen demnach, dass der Annahme des Lichtäthers und somit der Grundlage der Huyghens'schen Hypothese keine mechanische Schwierigkeit entgegensteht.

Wenn demnach sämmtliche Lichterscheinungen aus dieser Annahme sich ableiten lassen, so werden wir zwischen beiden Hypothesen wählen können und diejenige als die richtige betrachten, welche die Lichterscheinungen auf die einfachste und ungezwungenste Weise erklärt.

Die bisher betrachteten Erscheinungen der ungestörten Ausbreitung des Lichtes werden wir nun allesammt mit Hülfe unserer Entwicklungen im ersten

Kapitel des dritten Abschnittes des ersten Theils als nothwendige Folge der Huyghens'schen Annahme erkennen.

Denn wir sahen dort, dass bei ungestörter Ausbreitung einer Wellenbewegung durch ein isotropes Punktsystem die Bewegung sich auf den Radien immer mehr sich vergrössernder Kugeln ausbreiten muss, dass also eine Wellenbewegung von dem erregenden Mittelpunkte aus nach allen Richtungen sich geradlinig ausbreiten muss, wie wir es am Lichte erkannt haben. Nach der Lehre von der Wellenbewegung ist die Geschwindigkeit, mit welcher eine Wellenbewegung sich fortpflanzt, bestimmt durch die Gleichung

$$c = C\sqrt{\frac{e}{d}},$$

worin C eine Constante, e die Elasticität und d die Dichtigkeit des Mittels, des Punktsystemes, ist, in welchem die Wellenbewegung sich fortpflanzt. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit hängt also lediglich von der Natur des Mittels, seiner Elasticität und Dichtigkeit ab, von keinem andern Umstande, es muss also in einem und demselben Mittel jede Wellenbewegung, woher sie auch stamme, sich mit eben derselben Geschwindigkeit fortpflanzen. Die Undulationstheorie fordert demnach, dass das Licht der Sonne oder der Fixsterne oder irgend einer Lichtquelle sich mit der gleichen Geschwindigkeit fortpflanze, sie fordert also das aus Römer's und Bradley's Beobachtungen, sowie aus den Versuchen von Fizeau und Foucault hergeleitete Resultat. Darin müssen wir einen grossen Vorzug dieser Theorie vor der Emissionstheorie erkennen, welche dieses Resultat nur mit Hülfe einer neuen Annahme zu erklären im Stande ist.

Die Erscheinung der Aberration des Lichtes, welche durch die gleichzeitige und von einander unabhängige Bewegung der Erde und des Lichtes bedingt ist, folgt nothwendig aus der Emissionstheorie, die von den Sternen ausgeschleuderten Lichttheilchen bewegen sich nothwendig unabhängig von der Erde. Um diese Erscheinung mit der Wellentheorie in Einklang zu bringen, müssen wir annehmen, dass der an der Erde befindliche Aether nicht an der Bewegung der Erde theilnehme, sondern dass der Aether die Körper frei durchdringe, oder dass, wie Thomas Young [1]) sagt, der Lichtäther alle materiellen Körper mit geringem oder gar keinem Widerstand durchdringt, etwa so wie der Wind durch das Laub eines Baumes hindurchgeht. Diese Annahme hat bei der unendlichen Feinheit des Aethers, welche wir annehmen müssen, nichts auffallendes. Nehmen wir dieses an, so fordert auch die Undulationstheorie das Phänomen der Aberration, da dann in dem ruhenden Aether die Fortpflanzungsrichtung der Lichtwellen durch die Bewegung der Erde keine Aenderung erfahren kann.

---

1) *Th. Young,* Experiments and Calculations relative to Physical Optics. Philosophical Transactions 1803.

Die Abnahme der Lichtintensität mit Entfernung von der Lichtquelle muss in der Undulationstheorie nach demselben Gesetze erfolgen wie in der Emissionstheorie, da die Undulationstheorie die Lichtstärke als abhängig ansieht von der Stärke des Stosses, welchen die bewegten Aethertheilchen gegen die Netzhaut des Auges ausführen. Die Stärke des Stosses wird aber gemessen durch die lebendige Kraft der Aethertheilchen, das Produkt aus der bewegten Masse und dem Quadrate der Geschwindigkeit der Aethertheilchen. Ganz dieselben Betrachtungen, welche in der Lehre vom Schall uns zu dem Resultate führten, dass die Geschwindigkeit der bewegten Lufttheilchen bei ungehinderter Ausbreitung des Schalles den Abständen derselben von der Quelle des Schalles umgekehrt proportional sei, führen uns bei Annahme der Undulationstheorie des Lichtes zu dem Resultate, dass die Geschwindigkeit der bewegten Aethertheile dem Abstande derselben von der Lichtquelle umgekehrt proportional sei. Wie also die Stärke des Schalles abnimmt, wie die Quadrate der Entfernungen von der Schallquelle wachsen, so die Intensität des Lichtes, wie die Quadrate der Entfernungen von der Lichtquelle wachsen.

Auch der Einfluss des Einfallswinkels, unter welchem das Licht eine beleuchtete Fläche trifft, auf die Beleuchtung ist eine nothwendige Folge der Undulationstheorie. Denn ist AB (Fig. 18) eine begrenzte Lichtwelle, welche wir als eine ebene annehmen, so verhält sich in einer gegen AB geneigten Ebene CB die Masse des von der ankommenden Welle zu bewegenden Aethers zu dem in der Welle bewegten Aether wie die Grösse der Oberflächen, oder wenn wir die in AB bewegte Aethermasse mit m bezeichnen, die in CB zu bewegende mit m', so ist

Fig. 18.

$$m : m' = AB : CB,$$

$$m : m' = \cos CBA : 1.$$

Ist nun die Oscillationsgeschwindigkeit, wenn die Aethertheilchen durch die Gleichgewichtslage gehen, in AB gleich v, in CB gleich v', so ist nach dem schon früher angewandten Satze, dass die lebendige Kraft des bewegten Systems constant ist, wo wir auch die Bewegung des Systems betrachten, vorausgesetzt, dass nur innere Kräfte thätig sind,

$$mv^2 = m' v'^2,$$

oder wenn wir $CAB = \alpha$ setzen,

$$mv^2 = \frac{m}{\cos \alpha} v'^2$$

und daraus

$$v'^2 = v^2 . \cos \alpha.$$

Die Quadrate der Geschwindigkeit, mit der in der geneigten Ebene CB und in der Ebene AB die Aethertheilchen durch die Gleichgewichtslage hindurchgehen, verhalten sich wie $\cos \alpha$ zu 1. Ein mit AB gleich grosses Stück

der Fläche *CB* besitzt nun die gleiche Aethermasse m, die lebendige Kraft der schwingenden Bewegung ist daher in demselben

$$mv'^2 = m \cdot v^2 \cdot \cos\alpha,$$

oder die Intensität der Beleuchtung in zweien gegen eine ankommende Wellenebene verschieden geneigten Flächen ist proportional dem Cosinus des Neigungswinkels. Nennen wir auch hier wieder wie früher die zur Wellenebene senkrechten Richtungen die Lichtstrahlen, so fällt, wie man sieht, dieser Satz mit dem frühern zusammen, nach welchem die Beleuchtung einer Fläche dem Cosinus des Einfallswinkels proportional ist.

Das dritte, die Lichtintensität bestimmende Gesetz wird auch unter Annahme der Undulationstheorie von der Fourier'schen Hypothese gerade so gut erklärt, wie unter Annahme der Emissionstheorie. Denn nach dieser Hypothese werden Wellen von gleicher Ausdehnung, nach welcher Richtung sie auch die leuchtende Fläche verlassen, absolut gleich. Eine Fläche, welche sich zur Einheit verhält wie $1 : \cos\alpha$, sendet aber unter einem Ausstrahlungswinkel α eine Welle von derselben Grösse aus, wie die Fläche 1 unter dem Ausstrahlungswinkel Null, die Lichtmenge, welche die grössere Fläche in geneigter Richtung aussendet, ist somit dieselbe, welche die kleinere in senkrechter ausstrahlt.

Die Erscheinungen, welche uns das Licht bei ungestörter Ausbreitung darbietet, lassen sich somit nach beiden Theorien ziemlich gleich gut erklären, sie geben uns somit keinen Aufschluss über das Wesen des Lichtes, sondern lassen beide Erklärungsweisen als möglich erscheinen [1]).

Zweites Kapitel.

Von der gestörten Ausbreitung des Lichtes, Reflexion und Brechung.

§. 8.

Zurückwerfung des Lichtes an ebenen Flächen. Wenn ein Lichtstrahl bei seiner Fortpflanzung an einen nicht leuchtenden Körper trifft, so wird er an seiner geradlinigen Ausbreitung im Allgemeinen gehindert und erfährt Aenderungen, welche je nach der Beschaffenheit des nicht leuchtenden Körpers verschieden sind. Zunächst bewirkt das den Körper treffende Licht, dass derselbe sichtbar wird, es wird also ein Theil des auffallenden Lichtes von dem Körper nach allen Richtungen hin ausgesandt, nachdem es von ihm z. B. in der Farbe so modificirt ist, dass wir es als von dem Körper her-

---

1) Die historische Entwickelung der beiden streitigen Theorien siehe *Lloyd*, Abriss der Geschichte der Optik, übersetzt von *Kloeden*. Berlin 1836.

rührend ansehen und die ursprüngliche Quelle des Lichtes nicht mehr erkennen können.

Ist die Oberfläche des Körpers glatt, so sehen wir, dass immer von dem Körper nach einer durch die Richtung des einfallenden Lichtes bestimmten Richtung mehr Licht als nach allen andern zurückgeworfen wird; scheint z. B. die Sonne auf einen polirten Tisch, so sieht man stets nach einer Richtung von dem Tische Strahlen ausgehen. Dieses Licht heisst regelmässig zurückgeworfen im Gegensatz zu dem nach allen Richtungen unregelmässig zurückgeworfenen oder zerstreuten Licht.

Bei einigen Körpern sieht man nun unmittelbar noch eine weitere Zerlegung des Lichtes, es tritt bei diesen ein Theil des Lichtes in die Körper hinein und durch dieselben hindurch. Die nicht selbstleuchtenden Körper theilen sich darnach in zwei Klassen, in die undurchsichtigen und die durchsichtigen. Erstere lassen das Licht nicht durch, ein solcher Körper verdunkelt, zwischen das Auge und die Lichtquelle gebracht, dieselbe vollständig, die durchsichtigen Körper dagegen entziehen uns den Anblick der Lichtquelle nicht.

Wenn das Licht von einer ebenen Fläche zurückgeworfen wird, und wir sehen in der Richtung des zurückgeworfenen Lichtes gegen die Fläche hin, so ist die Fläche selbst um so unsichtbarer, je mehr Licht sie reflectirt und anstatt der reflectirenden Fläche sehen wir hinter derselben ein Bild der Lichtquelle. Wenn wir nun zunächst nach der Richtung fragen, in welcher die Strahlen regelmässig zurückgeworfen werden, so ergeben sich für die Zurückwerfung an ebenen Flächen folgende zwei Gesetze:

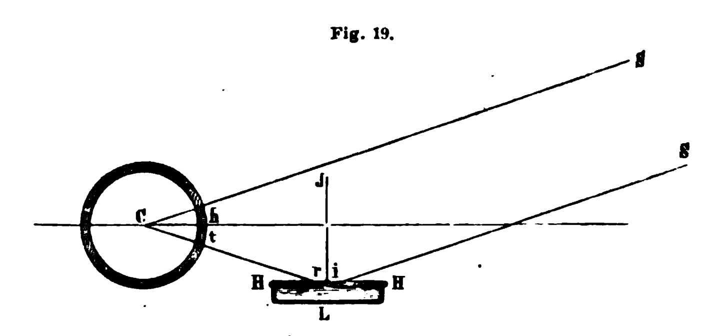
1) Der zurückgeworfene Strahl liegt mit dem einfallenden in derselben Ebene, welche durch den einfallenden Lichtstrahl und die im Punkte, wo der Strahl die Fläche trifft, errichtete Senkrechte, das Einfallsloth, bestimmt wird. Der zurückgeworfene und einfallende Lichtstrahl befinden sich an entgegengesetzten Seiten des Einfallslothes.

2) Der Winkel, welchen der zurückgeworfene Strahl mit dem Einfallslothe bildet, ist gleich dem, welchen der ankommende Lichtstrahl mit dem Einfallslothe bildet. Letzterer wird der Einfallswinkel, ersterer der Reflexionswinkel genannt.

Das genaueste Mittel zum Nachweis dieser Gesetze geben uns die astronomischen Beobachtungen. Bestimmt man mittels eines verticalen Kreises die Höhe eines Sternes über dem Horizont und zugleich die Tiefe des Spiegelbildes unter einem künstlichen Horizont, einer flachen, mit Quecksilber gefüllten Schale, deren Oberfläche immer genau horizontal steht, so findet man die Tiefe des Bildes unter dem Horizont, den Winkel t, immer genau gleich der Höhe h des Sternes über dem Horizont. Wegen der sehr grossen Entfernung des Sternes sind die Strahlen SL und SC parallel oder der Winkel h ist gleich dem Winkel SLH. Ferner ist der Winkel t als Wechselwinkel gleich dem Winkel CLH, und da $t = h$ ist, so folgt $SLH = CLH$ oder auch $i = r$.

Und da das Fernrohr bei den Beobachtungen nur um die Axe C in der Verticalebene gedreht ist, so folgt aus diesem Versuche zugleich, dass der reflectirte Strahl mit dem einfallenden in derselben Ebene liegt und dass beide mit dem Einfallslothe, nur an entgegengesetzten Seiten, gleiche Winkel bilden.

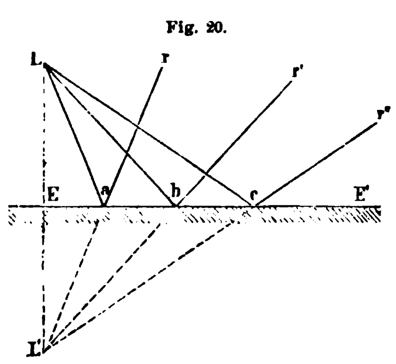
Fig. 19.



Man kann es als eine unmittelbare Folge dieses Gesetzes oder auch als einen neuen experimentellen Beweis für dasselbe ansehen, dass die an einem Spiegel reflectirten Strahlen von einem Punkte hinter dem Spiegel auszugehen scheinen, der genau ebensoweit hinter demselben liegt, als der leuchtende Punkt vor demselben, dass demnach das Bild eines leuchtenden Punktes genau so weit hinter dem Spiegel liegt als der leuchtende Punkt vor demselben.

Dass wir überhaupt ein Bild des leuchtenden Punktes sehen, beweist uns, dass alle von dem Spiegel ausgehende Strahlen so sich verbreiten, als kämen sie von einem Punkte L' hinter dem Spiegel, denn nach der Erfahrung, dass das Licht sich in geraden Linien von der Lichtquelle ausbreitet, versetzen wir die letztere in die Richtung, in welcher die Strahlen zuletzt unser Auge treffen, und deshalb an den Punkt, der allen den unser Auge treffenden Strahlen gemeinsam ist, an den Punkt, wo sie in der That oder verlängert sich schneiden. Nehmen wir es nun als durch die tägliche Erfahrung festgestellt an, dass der senkrechte Abstand LE des Punktes L vom Spiegel gleich ist dem senkrechten Abstande $L'E$ des Punktes L' vom Spiegel, so folgt unmittelbar, dass die Dreiecke $LaE \cong L'aE$, $LbE \cong L'bE$ ... und daraus, dass die Winkel LaE und raE', LbE und $r'bE'$ ... und somit auch die Winkel, welche die einfallenden und reflectirten Strahlen mit dem Einfallslothe bilden, einander gleich sind.

Fig. 20.



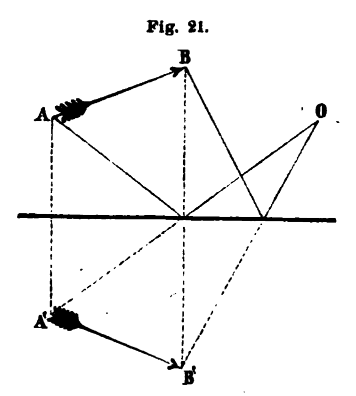
Andrerseits kann man diesen Satz aus dem Reflexionsgesetze sofort ableiten. Denn zunächst folgt aus demselben, dass der Bildpunkt L', von dem

aus die Strahlen zu divergiren scheinen, auf der Senkrechten LE, die von L auf den Spiegel gezogen ist, liegen muss, da die senkrecht in der Richtung LE auf den Spiegel fallenden Strahlen nach dem Reflexionsgesetz in derselben Richtung zurückgeworfen werden. Da nun der Bildpunkt dort liegt, wo die rückwärts verlängerten Strahlen LE und ra sich schneiden, so folgt aus der Deckung der Dreiecke LaE und $L'aE$, die nach dem sogenannten zweiten Kriterium der Deckung, Gleichheit einer Seite Ea und der beiden anliegenden Winkel, congruent sind, dass $LE = L'E$, oder dass das Bild des leuchtenden Punktes ebensoweit senkrecht hinter dem Spiegel liegt, als der leuchtende Punkt vor ihm.

In dieser Form ausgesprochen, gibt uns das Reflexionsgesetz sofort eine Construction, um die Bilder von Gegenständen in einem ebenen Spiegel zu erhalten.

Ist AB (Fig. 21) eine leuchtende Linie, so erscheint dieselbe als $A'B'$ im Spiegel, so dass das Bild ganz symmetrisch mit dem Gegenstande gegen die spiegelnde Fläche liegt. Der Punkt A befindet sich dem Spiegel am nächsten, ebenso der Punkt A' des Bildes, die Enden B und B' sind in Bild und Gegenstand nach derselben Seite gerichtet.

Fig. 21.



Es ist unmittelbar nach dem Vorigen klar, dass diese Lage des Bildes sich ergibt, wenn wir von den betreffenden Punkten der Linie Senkrechte auf den Spiegel ziehen und diese jenseits des Spiegels um den Abstand der das Licht aussendenden Punkte verlängern. Die Richtung, nach der das bei O befindliche Auge das Bild wahrnimmt, ist durch die von den einzelnen Bildpunkten zum Punkte O gezogenen Linien bestimmt.

Dabei ist es gleichgültig, ob die zur Construction des Bildes benutzten Linien AA' den Spiegel treffen oder nicht, wir sehen immer ein Bild des Gegenstandes, sobald zwei von dem Punkte O, in dem das Auge sich befindet, und von dem Punkte A zu einem Punkte des Spiegels gezogene Linien mit dem Einfallslothe an der Stelle gleiche Winkel bilden.

§. 9.

Physikalische Erklärung des Reflexionsgesetzes. Beide von uns mitgetheilte Theorien über das Wesen des Lichtes sind geeignet, das Reflexionsgesetz als im Wesen des Lichtes begründet erscheinen zu lassen. Dass es nach der Undulationstheorie nothwendig ist, folgt unmittelbar nach den Entwicklungen des dritten Abschnittes im ersten Theile, wenn wir die Annahme machen, dass die Dichtigkeit oder die Elasticität des Aethers, oder

beide in den verschiedenen Körpern eine verschiedene ist, eine Annahme, zu der wir gewiss berechtigt sind.

Denn ebenso, wie zwischen den einzelnen Aethertheilchen anziehende und abstossende Kräfte thätig sind, so müssen auch zwischen dem Aether und den Molekülen der materiellen Körper eben solche Kräfte thätig sein. Daraus folgt dann nothwendig, dass die Dichtigkeit oder Elasticität des Aethers oder beide Eigenschaften im Innern der Körper je nach der Beschaffenheit der Körper verschieden sein müssen. Zwei an einander grenzende Körper, z. B. die Luft und irgend ein nicht leuchtender Körper, sind daher nach unserer frühern Bezeichnung Punktsysteme verschiedener Beschaffenheit. Eine an der Grenze zweier Punktsysteme ankommende schwingende Bewegung muss aber, wie wir dann weiter sahen, stets reflectirt werden, das heisst, es muss sich von der Grenze aus eine Wellenbewegung rückwärts in dem ersten Mittel ausbreiten.

Ferner sahen wir dann ganz allgemein, dass eine an einer ebenen Grenzfläche ankommende kugelförmige Welle stets so in das erste Mittel zurückkehrt, als käme sie von einem Wellenmittelpunkte, der ebenso weit hinter der Fläche liegt, als der wirkliche Mittelpunkt vor der Fläche. Wir sahen, das Reflexionsgesetz des Lichtes in der einen Form ist genau dieses früher für die Wellenbewegung abgeleitete Gesetz.

Als eine Folge dieses Gesetzes oder als eine andere Form desselben erhielten wir dann den Satz, dass eine Wellenbewegung so reflectirt wird, dass der ankommende und reflectirte Wellenstrahl mit dem Einfallslothe gleiche Winkel bilden; dies ist zugleich die andere Form des Gesetzes, nach welchem das Licht reflectirt wird [1]).

Wir brauchen zu den Entwicklungen des §. 127, Theil I, nichts mehr hinzuzufügen, um das Reflexionsgesetz als im Wesen des Lichtes begründet zu erkennen, wenn wir das Licht als eine Wellenbewegung des Aethers ansehen.

Zur Erklärung der Erscheinungen der Reflexion des Lichtes nach der Emissionstheorie hat man angenommen, die Lichttheilchen und die Moleküle der Körper übten eine gegenseitige Wirkung auf einander aus. Diese Kraft kann eine anziehende oder eine abstossende sein. Ist die Entfernung kleiner als eine gewisse Grenze, so ist die Kraft nach Newton's Annahme allemal anziehend bis zur Berührung, jenseits dieser Sphäre ist aber ebenso gewiss eine andere, in welcher die Kraft immer abstossend ist. Die absoluten Intensitäten sind verschieden für die verschiedenen Körper, die Function der Entfernung, das heisst, die Art und Weise, mit der die Kraft nach der Entfernung

---

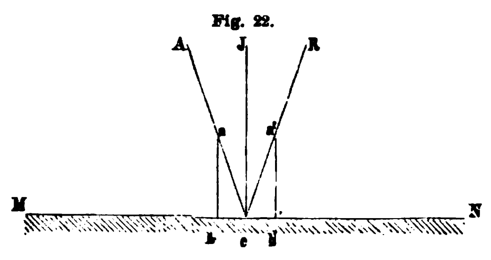
1) *Huyghens,* Traité de la lumière. Chap. III. *Fresnel,* Erklärung der Reflexion nach der Undulationstheorie. Poggend. Annal. XXX. Oeuvres complètes. T. I. p. 211.

der materiellen und Lichttheilchen von einander sich ändert, ist für alle Körper dieselbe.

Welcher Art übrigens diese Abhängigkeit ist, lässt sich nicht angeben, nur das ist sicher, dass die Entfernungen, in der die Kräfte wirksam sind, überhaupt nur unmessbar klein sind, dass die Kräfte unmerklich werden, sobald eine messbare Entfernung zwischen den Lichttheilchen und den Molekülen der materiellen Körper besteht. Die Entfernung der materiellen Körpertheilchen selbst ist aber gegen die Grösse ihrer Wirkungssphären selbst sehr gering.

Mit Hülfe dieser Annahmen sind wir nun im Stande, das Reflexionsgesetz an vollkommen ebenen Flächen als auch in der Emissionstheorie begründet zu erkennen. Denn denken wir uns irgend ein Lichttheilchen in der Richtung Ae gegen eine vollkommen ebene Fläche sich hinbewegen, so können wir die Geschwindigkeit desselben in zwei zu einander senkrechte Componenten zerlegen, deren eine ab senkrecht, deren andere bc parallel ist der reflectirenden Fläche MN.

Fig. 22.



Da nun sämmtliche in der Fläche MN liegenden Körpertheilchen, soweit sie überhaupt auf das Lichttheilchen einwirken, wenn es in die unmittelbare Nähe der Fläche gekommen ist, gleich stark das Lichttheilchen anziehen oder abstossen, so ist klar, dass die Anziehung oder Abstossung der Körpertheile auf das Licht senkrecht zur Fläche MN gerichtet sein muss, da es nach allen in der Ebene MN möglichen Richtungen zugleich ganz gleich stark angezogen und abgestossen wird.

Die parallele Componente der Geschwindigkeit der Lichttheilchen wird daher auch innerhalb der Wirkungssphäre der Moleküle der Körper durchaus ungändert bleiben, und nur die zu MN senkrechte Componente eine Aenderung erfahren. Ehe nun die Lichttheilchen in die Anziehungssphäre der Körpermoleküle kommen, haben sie die Abstossungssphäre zu passiren, in welcher die senkrecht gegen die Fläche MN gerichtete Kraft vermindert wird. Nun ist es möglich, dass in dieser Abstossungssphäre durch die Wirkung der Körpermoleküle die senkrechte Geschwindigkeit der Lichttheilchen ganz vernichtet wird; diese Lichttheilchen dringen dann gar nicht in die Anziehungssphäre ein, sie werden daher, da die Abstossung fortdauert, so lange die Lichttheilchen innerhalb der abstossenden Sphäre sich befinden, die abstossende Kraft also noch thätig ist, nachdem schon die senkrecht gegen die Fläche gerichtete Geschwindigkeit vernichtet ist, von der Fläche zurückgestossen. Da nun ferner auf dem Rückwege aus dieser Sphäre die Lichttheilchen ebenso lange und ebendenselben abstossenden Kräften ausgesetzt sind, welche die gegen die Fläche gerichtete Geschwindigkeit vernichteten, so müssen sie von denselben eine gegen die

Fläche senkrechte von ihr fort gerichtete Geschwindigkeit erhalten, welche derjenigen, mit welcher sie sich gegen die Fläche hinbewegten, an Grösse genau gleich ist.

Aus der behaltenen mit der Fläche parallelen Geschwindigkeit eb' und dieser senkrechten von der Fläche fortgerichteten $b'a'$ resultirt nach den Gesetzen der Mechanik, gerade wie beim Stoss der Körper eine von der Fläche fortgerichtete Bewegung, welche gegen das Einfallsloth aber an der entgegengesetzten Seite dieselbe Neigung hat, als der einfallende Lichtstrahl. Da ferner die Aenderung der Geschwindigkeit nur die normale Geschwindigkeit betraf, so muss der reflectirte Strahl in der durch den einfallenden Lichtstrahl und das Einfallsloth bestimmten Ebene liegen, und da ferner die parallele Geschwindigkeit ungeändert, die normale der des einfallenden Lichtes an Grösse genau gleich ist, so muss die Geschwindigkeit des reflectirten Lichtes der des einfallenden Lichtes gleich sein.

Zwei Schwierigkeiten bleiben aber bei dieser Ableitung des Reflexionsgesetzes noch bestehen. Zunächst bedarf es der Annahme, dass die Fläche wenigstens innerhalb der Wirkungssphäre der Moleküle des Körpers vollkommen eben sei, eine Annahme, welche für alle noch so glatt polirten reflectirenden Flächen gewiss nicht besteht; denn der Akt des Polirens besteht in einem Abschleifen der Oberfläche mit feinem Pulver, und der Erfolg dieses Abschleifens kann nur der sein, dass die grossen Unebenheiten fortgenommen, dafür aber die Fläche eine Anzahl sehr feiner Risse erhalten hat, welche in Bezug auf die Grösse der Lichttheilchen noch sehr gross sind. Um diese Schwierigkeit zu heben, dient die erwähnte Annahme, dass die Wirkungssphäre der Moleküle gegen ihren Abstand sehr gross ist, und dass eben dadurch eine gleichmässige Anziehungs- und Abstossungssphäre entsteht. Die Unebenheiten äussern ihren Einfluss aber doch und zwar dadurch, dass auch die glatteste Fläche Licht unregelmässig zurückwirft und dadurch selbst sichtbar wird.

Die andere Schwierigkeit fordert indess zu ihrer Hinwegräumung eine neue Hypothese. Wir sahen nämlich vorhin, dass beim Auftreffen eines Lichtstrahles niemals alles Licht zurückgeworfen wird, sondern immer ein Theil in das zweite Mittel eintritt. Da nun aber alle Lichttheilchen mit gleicher Geschwindigkeit auf der Fläche auftreffen, und wenigstens die Lichttheilchen gleicher Farbe auch in ganz gleicher Weise von den Molekülen der Körper afficirt werden, so ist es nach dem Bisherigen absolut nicht abzusehen, wie es dann möglich ist, dass ein Theil des Lichtes zurückgeworfen und ein anderer gebrochen wird; es ist vielmehr nothwendig, wenn alle unter den gleichen Umständen sich gegen die Fläche hinbewegen, dass entweder alle Lichttheilchen zurückgeworfen oder alle in den Körper hineingezogen werden.

Zur Hebung dieser Schwierigkeit legte Newton den Lichttheilchen eine eigenthümliche Beschaffenheit bei, welche er Anwandlungen des leichtern Durchgehens und des leichtern Zurückgeworfenwerdens nannte. Er glaubte, dass jedes Lichttheilchen während seines Weges in abwechselnd periodische

Zustände versetzt werde, vermöge deren es in dem einen Zustande leichter den anziehenden, in dem andern leichter den abstossenden Kräften der Moleküle folge; in dem einen also leichter in den Körper eindringe, in dem andern leichter von ihm zurückgeworfen werde. Die an der Grenze in einem Lichtstrahle ankommenden Lichttheilchen sind nun in den verschiedenen Zuständen, sie werden daher theils zurückgeworfen, theils in den Körper hineingezogen [1]).

Mit Hülfe dieser Annahme wird also die Möglichkeit einer Theilung des Lichtes an der Grenze gezeigt, und das Reflexionsgesetz, soweit es die Richtung und Lage des reflectirten Strahles betrifft, erklärt. Die Richtung des reflectirten Lichtes ist jedoch nicht das Einzige, was bei der Reflexion zu beachten ist, sondern auch seine Intensität, die Frage nach dem quantitativen Verhältniss der Theilung des Lichtes bei Brechung und Reflexion. Wir werden diese an einer andern Stelle betrachten, wenn wir die Mittel kennen, um diese Frage experimentell zu untersuchen. Hier werde nur bemerkt, dass die Intensität des reflectirten Lichtes mit dem Einfallswinkel zunimmt, und dass sie je nach der Beschaffenheit des reflectirenden Mittels anders ist. Eine polirte Glastafel reflectirt Licht bei jeder Incidenz, eine mattgeschliffene bei kleinen Incidenzwinkeln gar nicht, bei grossen gibt sie ein deutliches, wenn auch schwaches Bild einer Lichtquelle. Um diese Erscheinung zu erklären, bedurfte Newton noch einer weitern Hypothese, dass nämlich auch die Schiefe, unter welcher ein Lichtstrahl auf eine reflectirende Fläche auffällt, von bestimmendem Einfluss auf die Reflexionsfähigkeit ist.

Wenn nun auch beide Theorien im Stande sind, die Reflexion des Lichtes zu erklären, so werden wir doch nicht umhin können, schon hier einer der beiden Theorien, der Wellentheorie, den Vorzug zu geben. Es ist das Kennzeichen einer guten Hypothese, dass sie aus einem einzigen obern Grundsatze ohne Zuhülfenahme neuer Annahmen die zusammengehörigen Erscheinungen, zu deren Erklärung sie dienen soll, ableiten kann. Dieses Kennzeichen bietet uns schon an dieser Stelle die Wellentheorie, sie bedarf zur Erklärung der Reflexionserscheinungen nur der Annahme, welche durch unsere Kenntniss der in der Materie vorhandenen Kräfte sich uns von selbst aufdrängt, der Annahme, dass die uns schon längst bekannten anziehenden Kräfte der Materie sich auch auf den Aether erstrecken, und dass demnach die Dichte oder Elasticität des Aethers in den verschiedenen Körpern eine verschiedene sei. Die Emissionstheorie dagegen bedarf selbst zur Erklärung der Richtung des reflectirten Lichtes zweier neuer Hypothesen, die wir nur als willkürliche und speciell für diese Erscheinungen ersonnene bezeichnen können, die Hypothese über den Wechsel der anziehenden und abstossenden Kräfte und diejenige der Anwandlungen. Wenn wir uns daher auch hier

1) *Newton,* Optice liber II, pars III, propositio IX ff. — *Herschel,* On Light. §. 526 ff. — *Biot,* Lehrbuch der Experimentalphysik, übers. von Fechner. 4. Band.

noch nicht definitiv für die eine oder andere Theorie entscheiden, so wird uns doch die Undulationstheorie als die wahrscheinlich richtigere erscheinen.

§. 10.

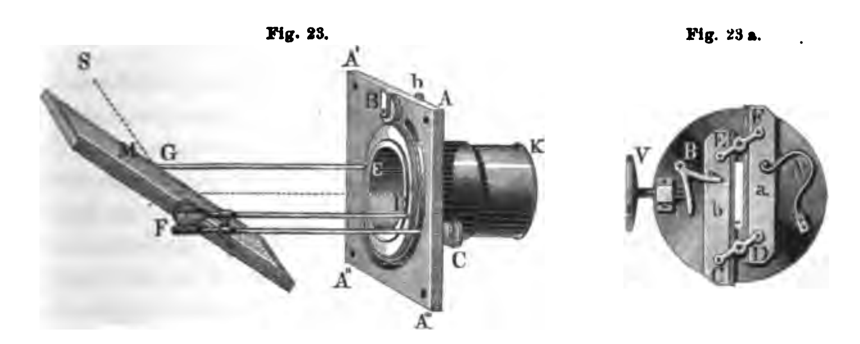
Anwendung der Spiegelung an ebenen Flächen. Die Spiegelung des Lichtes an ebenen Spiegeln wird vielfach zu physikalischen, astronomischen und andern Apparaten angewandt, theils um den Lichtstrahlen eine bestimmte Richtung zu ertheilen, theils zu Messapparaten.

Ersteres geschieht vorzüglich mittels des Heliostaten. Man bedarf oft zu physikalisch - optischen Versuchen parallelen sehr intensiven Lichtes in einem sonst dunkeln Raume. Die hauptsächlichste und zu manchen Versuchen unentbehrliche Lichtquelle, welche uns solches liefert, ist die Sonne; macht man in den von der Sonne beschienenen Laden eines sonst dunklen Zimmers eine Oeffnung, so tritt durch diese in das Zimmer ein Bündel paralleler Sonnenstrahlen. Indess ist es schwierig, diese direkt zu den Versuchen zu brauchen, da diese Strahlen nur in einer bestimmten und noch dazu mit dem Stande der Sonne veränderlichen Richtung in das Zimmer treten. Sowohl um diesen Strahlen eine beliebige Richtung zu geben, als auch, um sie in der einmal gegebenen Richtung festzuhalten, dient der Heliostat. Derselbe besteht einfach aus einem ebenen Spiegel, am besten von polirtem Metall oder schwarzem Glase, welcher vor dem Fensterladen so befestigt wird, dass er nach zwei zu einander senkrechten Richtungen drehbar ist. Entweder geschieht die Drehung mit der Hand durch eine gezähnte Scheibe und eine Schraube ohne Ende, welche an die in der Ebene des Spiegels liegende Axe desselben eingreift oder durch ein Uhrwerk. Eine Drehung des Spiegels ändert die Richtung des Einfallslothes, und man sieht, wie man dadurch bewirken kann, dass die in immer anderer Richtung einfallenden Sonnenstrahlen stets nach derselben Richtung zurückgeworfen werden, indem man dafür sorgt, dass die zur Spiegelebene senkrechte Richtung, die Normale derselben immer in der durch die einfallenden Sonnenstrahlen und die Richtung, nach der sie reflectirt werden sollen, bestimmten Ebene liegt, und zugleich den Winkel, den die Sonnenstrahlen mit jener festen Richtung bilden, halbirt.

Die Einrichtung eines mit der Hand zu stellenden Heliostaten zeigt Fig. 23. Eine viereckige mit einer grossen kreisrunden Oeffnung versehene Messingscheibe wird in den Laden eines Fensters befestigt. In der kreisförmigen Oeffnung befindet sich eine Röhre *EK* fest angebracht, welche bei *E* so weit aus der Scheibe *AA'''* hervorsteht, dass der auf seiner äussern Seite mit Zähnen versehene Ring *DE* darauf gesteckt werden kann. Dieser Ring trägt an den beiden Stangen *DF* und *EG* den Spiegel *M*. Durch das mit dem Kopfe *b* gedrehte kleine Zahnrad *B* kann der gezahnte Ring und damit der Spiegel um *MK* als Axe gedreht werden. Der Spiegel für sich ist um *FG* als Axe drehbar; diese Drehung wird an dem Knopfe *C* bewirkt, der die in

die Stange *CF* eingeschnittene Schraube, welche in die Scheibe *F* eingreift, dreht. Der Spiegel ist somit um die zwei zu einander senkrechten Axen *MK* und *FG* drehbar, er kann deshalb immer so gestellt werden, dass das Einfallsloth den Winkel, welchen *MK* mit der Richtung *SM* der einfallenden Sonnenstrahlen bildet, halbirt, so dass also die Sonnenstrahlen stets in der Richtung *MK* zurückgeworfen werden.

Fig. 23. Fig. 23 a.



Da man in den meisten Fällen nur schmale Bündel Licht benutzen will, werden vor die Röhre *K* Kapseln gesetzt mit verschiedenen Oeffnungen, kreisförmigen oder schmalen rechteckigen; ein sehr bequemes Mittel, um schmale Lichtbündel zu erhalten, zeigt Fig. 23 a. Zwei rechteckige Platten *a* und *b*, welche in den einander zugewandten Seiten in scharfen Schneiden enden, sind an den gleicharmigen Hebeln *CD* und *EF* befestigt, welche sich in verticaler Ebene um ihre Mitte drehen können. Wird *a* gehoben, *b* gesenkt, so nähern sich die Schneiden, wird *b* gehoben, *a* gesenkt, so entfernen sich die Schneiden. Erstere Bewegung wird von der Feder *A*, letztere durch den Winkelhebel *B* bewirkt, der durch Drehung der mit dem Kopf *V* versehenen Schraube bewegt wird.

Von den mit Uhrwerk versehenen Heliostaten ist wohl der einfachste der Meyerstein'sche, der die Sonnenstrahlen nach einer festen Richtung, derjenigen der Weltachse reflectirt; durch einen Hülfsspiegel, der fest aufgestellt wird, kann man dann die Strahlen nach einer beliebigen Richtung reflectiren. Die Einrichtung desselben zeigt Fig. 24. Der um seine Axe drehbare Stab *E* trägt nahe seinem untern Ende ein Zahnrad *R*, in welches ein Rad des Uhrwerkes *U* eingreift. Das Uhrwerk ist so regulirt, dass der Stab in 24 Stunden sich einmal um seine Axe dreht. Der Stab *E* wird der Richtung der Weltaxe parallel gestellt, so dass also sein oberes Ende gegen den Nordpol gerichtet ist.

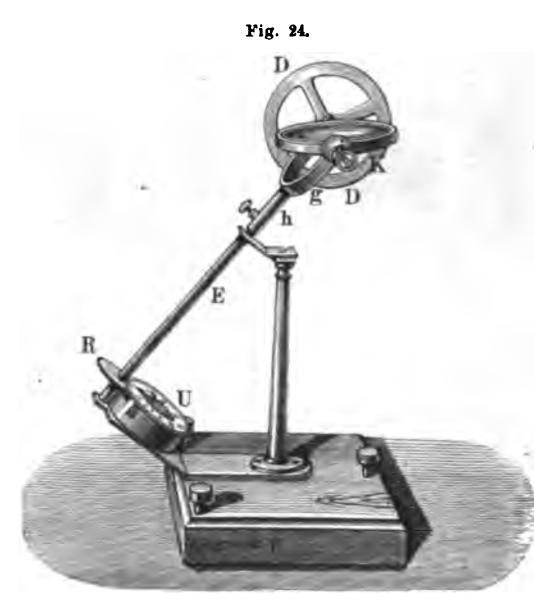
Auf den Stab *E* wird eine Hülse *h* gesteckt, welche die den Spiegel tragende Gabel *g* trägt. Die Hülse ist um die Axe des Stabes und der Spiegel um eine zur Axe des Stabes *E* senkrechte Axe drehbar. Man stellt nun zunächst die Gabel so, dass die durch das Einfallsloth des Spiegels und die

Axe von E bestimmte Ebene zugleich die Sonnenstrahlen aufnimmt, und klemmt die Hülse so fest.

Dann dreht man den Spiegel um die zu E senkrechte Axe mit Hülfe des Knopfes K so, dass die Strahlen parallel E, also parallel der Weltaxe reflectirt werden.

Ist das erreicht, so werden die Strahlen, wenn man das Uhrwerk gehen lässt, stets in der Richtung der Weltaxe reflectirt, da das Einfallsloth des Spiegels sich dann genau so schnell um die Weltaxe dreht wie die Sonne; die durch die Sonnenstrahlen und die Weltaxe gelegte Ebene nimmt stets das Einfallsloth des Spiegels in sich auf, und der von den Sonnenstrahlen und der Weltaxe gebildete Winkel wird stets von dem Einfallsloth des Spiegels halbirt.

Fig. 24.



Zur bequemern Einstellung des Spiegels gegen die Weltaxe ist der Apparat mit einem getheilten Kreise DD versehen, dem sogenannten Declinationskreis, auf dessen Theilung ein mit der Spiegelaxe fest verbundener und der Spiegelebene paralleler Zeiger einsteht. Die Theilung auf dem Kreise ist so aufgetragen, dass der Zeiger auf 0 steht, wenn die Spiegelebene dem Stabe E, also der Weltaxe parallel ist. Ist dann an einem bestimmten Tage die Declination der Sonne gleich d, positiv wenn dieselbe nördlich, negativ wenn sie südlich ist, so ergibt sich unmittelbar, dass der Winkel, den die Spiegelebene mit der Weltaxe bilden muss, gleich $45^0 + {}^1/_2\, d$ ist. Zur Zeit der Tag- und Nachtgleiche muss also der Spiegel mit E einen Winkel von 45^0 bilden, der Winkel ist grösser im Sommer, kleiner im Winter.

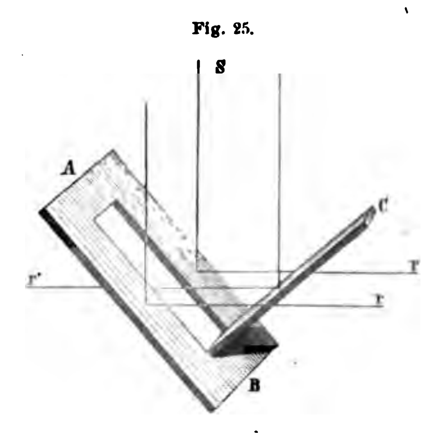
Wenn man zwei Spiegel unter einem rechten Winkel zusammensetzt, so dass die innern Flächen des Winkels die reflectirenden Flächen sind, und die Spiegel so einem Bündel paralleler Lichtstrahlen entgegensetzt, dass die einfallenden Lichtstrahlen den Winkel halbiren, so bewegen sich die von beiden Spiegeln reflectirten Strahlen gerade nach entgegengesetzten Richtungen.

Haben nun die Spiegel die Fig. 25 dargestellte Zusammensetzung, so werden die von S aus auf den Spiegel AB fallenden Strahlen nach r, die auf CB fallenden Strahlen nach r' geworfen.

Dieser Satz ist von Gauss in seinem Heliotropen zum Signalgeben bei geodätischen Messungen benutzt worden.

Eine solche Spiegelcombination wird vor das Objectiv eines Fernrohrs angebracht, dessen Axe durch eine im Spiegel C befindliche Oeffnung hindurchgeht, und welches auf den Ort eingestellt ist, wohin man signalisiren will. Die Spiegelcombination kann nun nach allen möglichen Richtungen hin gedreht werden, demnach auch so, dass, welches auch der Stand der Sonne ist, die einfallenden Sonnenstrahlen den Winkel der beiden Spiegel halbiren, und zugleich die Strahlen, welche von dem einen Spiegel reflectirt werden, in die Axe des Fernrohrs geworfen werden. Ist das der Fall, so werden die von dem andern Spiegel reflectirten Strahlen nach dem Orte hingeworfen, auf welchen das Fernrohr gerichtet ist. Man kann daher nach diesem Orte beliebige Lichtblitze hinsenden und auf diese Weise beliebige Signale geben.

Fig. 25.

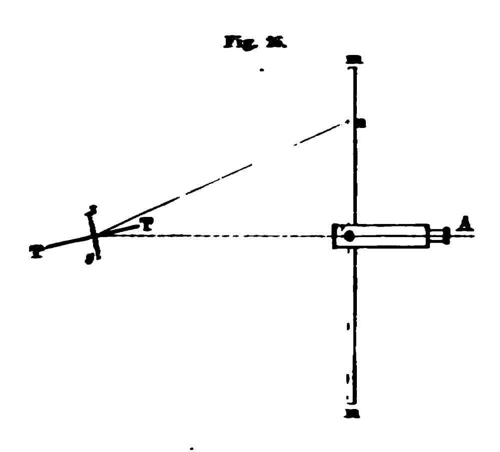


Das Reflexionsgoniometer von Wollaston, welches dazu dient, die Winkel zu messen, welche zwei Krystall- oder Prismenflächen mit einander bilden, ist ebenfalls eine Anwendung der Spiegelung. Vor der Axe eines Rohres und um eine die Axe des Rohres schneidende und zu ihr senkrechte, mit der Kante, in welcher sich die beiden Flächen schneiden, parallele Axe drehbar, wird der zu untersuchende Körper so aufgestellt, dass von einer seiner Flächen das Bild eines fernen Gegenstandes in die Axe des Rohres geworfen wird. Darauf wird der Körper um seine Axe gedreht, so lange, bis das Bild desselben Gegenstandes durch Reflexion an der zweiten Fläche in die Axe des Rohres geworfen wird. Dann steht die zweite Fläche gerade so, wie vorhin die erste, und der Winkel, um welchen man den Körper gedreht hat, ist das Supplement des Winkels, den die beiden Flächen mit einander bilden.

Eine Anwendung der Spiegelungsgesetze, um kleine Winkel zu messen, um welche sich bei der Torsion ein Faden oder ein um eine verticale Axe drehbarer Magnet gedreht hat, ist zuerst von Gauss bei seinen magnetischen Beobachtungen, die wir im vierten Theile besprechen werden, angewandt worden.

An die Drehungsaxe des drehbaren Körpers TT wird ein ebener Spiegel befestigt (Fig. 26) ss, wo wir uns die Drehungsaxe senkrecht zur Ebene der Zeichnung denken. In einiger Entfernung davon ist dem Spiegel ein Fernrohr gegenübergestellt, unter welchem ein Maassstab mm so angebracht ist, dass, wenn der Spiegel ss in seiner Ruhelage ist, der Beobachter bei A durch

das Fernrohr hindurch in dem Spiegel den Nullpunkt der Theilung gespiegelt sieht. Dreht sich dann der Spiegel um irgend einen kleinen Winkel, so sieht man von A aus in dem Spiegel das Bild irgend eines andern Theilstriches a. Aus dem Abstand dieses Theilstriches oa vom Nullpunkte der Skala und der Entfernung os des Maassstabes vom Spiegel kann man dann leicht den Winkel berechnen, um welchen sich der Spiegel gedreht hat. Der einfallende Lichtstrahl as bildet dann mit dem reflectirten ss einen Winkel 2α, dessen Tangente gleich ist



$$\tang 2\alpha = \frac{oa}{os}.$$

Jeder der beiden Strahlen as und os bildet dann mit dem Einfallslothe des Spiegels den Winkel α. In der Ruhelage, als der Nullpunkt der Skala gespiegelt wurde, fiel der einfallende Strahl os mit dem reflectirten so und beide mit dem Einfallslothe zusammen. In der abgelenkten Lage bildet nun die Richtung der Spiegelnormale mit der frühern Richtung derselben os den Winkel α, um diesen Winkel hat sich also der Spiegel und mit ihm der Stab TT gedreht. Der Stab hat sich also um die Hälfte desjenigen Winkels gedreht, dessen Tangente gleich dem Quotienten der beiden Abstände oa und as ist, welche beide mit sehr grosser Genauigkeit gemessen werden können.

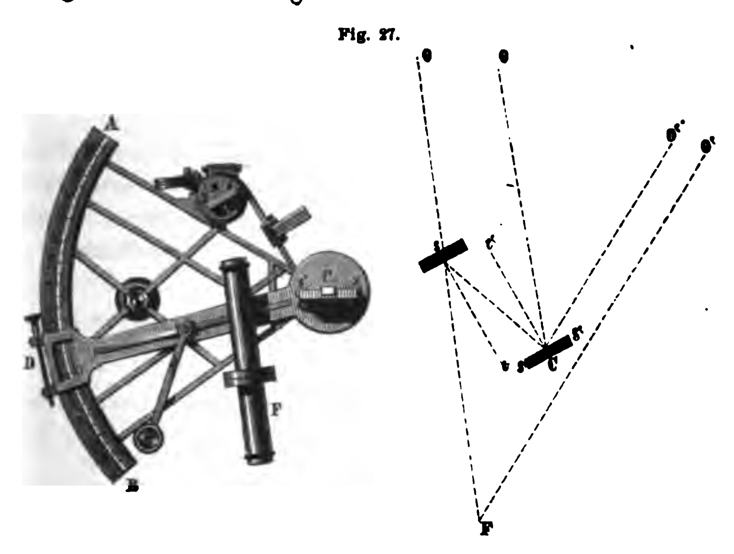
Der Spiegelsextant von Hadley, der den Zweck hat, durch eine einzige Beobachtung den Winkel zu messen, den die von dem Beobachter nach zwei festen Punkten gehenden Richtungen mit einander bilden, beruht auf einem ganz ähnlichen Princip.

An einer Stelle des festen Radius CA eines Kreissectors CAB (Fig. 27), der gewöhnlich den sechsten Theil des Kreisumfanges beträgt, ist ein ebenes Spiegelchen s, parallel dem Radius CB und senkrecht zur Ebene des Kreissectors befestigt. Dem Spiegel gegenüber ist ein Fernrohr F mit Fadenkreuz so angebracht, dass ein in der Richtung CA oder Cs auf den Spiegel fallender Strahl nach F parallel der Fernrohraxe reflectirt wird. Der Spiegel s und das Fernrohr F sind auf dem Apparate fest angebracht.

Um den Mittelpunkt C des Kreissectors CAB dreht sich eine Alhidade CD, die einen auf der Ebene des Kreissectors senkrechten kleinen Planspiegel trägt, der mit der Alhidade um die durch seine Ebene hindurchgehende, zur Ebene des Sectors in C senkrechte Axe drehbar ist. Bei einer Drehung der Alhidade wird also die Spiegelebene oder Spiegelnormale um denselben Winkel gedreht. Der Kreisbogen AB ist von B an, wo der Nullpunkt der Thei-

lung ist, in halbe Grade getheilt, die halben Grade sind jedoch meist als ganze bezeichnet, indem dann bei einer Beobachtung die abgelesenen Zahlen sofort den gesuchten Winkel angeben.

Fig. 27.



An der Alhidade ist ein Nonius angebracht, der Bruchtheile des Grades gibt.

Wenn nun der Nullpunkt des an dem beweglichen Radius befestigten Nonius auf dem Nullpunkt der Theilung steht, so sind die beiden Spiegel *s* und *s'* einander parallel; diese Stellung wird ihnen beim Beginne jeder Messung gegeben.

Um nun den Winkel zu bestimmen, welchen die nach zwei entfernten Punkten *O* und *O'* gezogenen Richtungslinien *FO* und *FO'* (man sehe die Nebenfigur) bei *F* mit einander bilden, wird der Sextant so vor dem Auge gehalten, dass die Fernrohraxe parallel mit *FO* ist, und die Ebene des Kreissectors mit der durch *FO* und *FO'* gelegten Ebene zusammenfällt. Der Spiegel *s* besteht aus einer planparallelen Glasplatte, deren untere Hälfte belegt, deren obere Hälfte jedoch durchsichtig ist. Durch die obere durchsichtige Hälfte sieht man dann, wenn man durch das Fernrohr blickt, den Ort *O*, zugleich aber auch in der belegten Hälfte des Glases in dem Spiegel durch doppelte Reflexion bei *s'* und *s* das Spiegelbild desselben Punktes *O*. Denn die von dem fernen Punkte *O* ausgehenden und den Spiegel *s'* treffenden Strahlen sind parallel den Strahlen *OF*, welche direkt das Fernrohr treffen. Diese Strahlen werden nun nach *Cs* und von *s* nach *F* reflectirt, da der Winkel *Fsc* = *scO* und somit die Spiegelnormale *ct'* den Winkel *sCO* ebenso halbirt, wie die mit ihr parallele Spiegelnormale *st* des Spiegels *s* den Winkel *Fsc*.

Wird dann der Spiegel *s'* mit der Alhidade *CD* so weit gedreht, dass man jetzt von *F* aus in dem Spiegel *s* unmittelbar unter dem direkt gesehenen

Punkte O das Spiegelbild des Punktes O' sieht, sowie man vorher das Spiegelbild des Punktes O sah, so ist der Winkel OFO' gleich dem Doppelten des Winkels, um welchen man die Alhidade gedreht hat. Sind also, wie vorhin erwähnt, auf der Theilung die halben Grade als ganze gezählt, so ergibt eine einfache Ablesung den gesuchten Winkel OFO'.

Damit man nämlich in F durch die Reflexion bei s' und s die von O' kommenden Strahlen wahrnehme, muss der Spiegel s' so weit gedreht werden, dass die Strahlen $O'C$ nach cs reflectirt werden, also so weit, dass die Spiegelnormale Ct' den Winkel $O'Cs$ halbirt. Nennen wir nun den Winkel, den die Strahlen OC mit Cs bilden, x und den Winkel, den die Strahlen $O'C$ mit OC bilden, den Winkel, den wir suchen, y, so ist der Winkel

$$O'Cs = x + y.$$

In der anfänglichen Lage halbirte die Spiegelnormale den Winkel x oder

$$sCt' = \frac{1}{2}\, x,$$

nachdem wir den Spiegel und somit die Spiegelnormale um den an der Theilung abzulesenden Winkel α gedreht hatten, bis er in s das Bild von O' lieferte, halbirt sie den Winkel $x + y$, oder

$$sCt' + \alpha = \frac{1}{2}\,(x + y)$$

und daraus folgt

$$2\alpha = y.$$

Da nun der Winkel $O'CO = y$ gleich ist dem gesuchten Winkel $O'FO$, so gibt uns die Verdoppelung des Winkels, um welchen wir die Alhidade gedreht haben, den gesuchten Winkel.

Der Spiegelsextant dient besonders zu geographischen Ortsbestimmungen mittels der Messungen von Sternhöhen, wenn man, wie auf Reisen, nicht im Stande ist, genauere astronomische Beobachtungen zu machen.[1])

Wenn man zwei Spiegel unter irgend einem spitzen Winkel zusammensetzt, so erhält man von einem zwischen denselben angebrachten leuchtenden Punkte stets mehrere Bilder, indem gewissermassen die Bilder des einen Spiegels in dem andern Spiegel nochmals reflectirt werden und so zu neuen Bildern Anlass geben. Sind z. B. CA und CB (Fig. 28) zwei unter einem Winkel von 60^0 gegen einander geneigte Spiegel, so erhält man 5 Bilder von einem zwischen denselben liegenden leuchtenden Punkte L, welche alle auf dem Umfange eines mit dem Radius CL beschriebenen Kreises liegen, und welche mit dem leuchtenden Punkte zusammen die 6 Ecken eines in den Kreis beschriebenen Sechseckes bilden, das ein regelmässiges Kreissechseck wird, wenn L auf der Halbirungslinie des Winkels ACB liegt.

Der Spiegel CB gibt von L zunächst das Bild L', welches ebenso weit hinter CB wie L vor CB liegt; von L' gibt der Spiegel CA das Bild

1) Man sehe *Bohnenberger,* geographische Ortsbestimmungen vorzüglich mittels des Spiegelsextanten, 2. Aufl., besorgt von Jahn. Göttingen 1852.

L'' und von diesem CB das Bild L'''. Der Spiegel CA liefert von L das Bild $L_{,}$, von diesem CB das Bild $L_{,,}$ und davon CA wieder L'''.

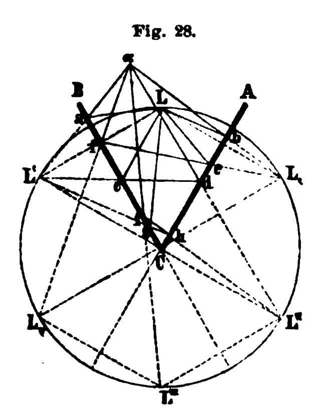


Fig. 28.

Wie die Bilder entstehen, sieht man, wenn man den Gang der von L ausgehenden und bei α das Auge treffenden Strahlen verfolgt. La und Lb werden direkt nach α reflectirt, sie geben die Bilder L' und $L_{,}$. Lc gelangt nach einer zweiten Reflexion bei d, Le nach einer zweiten Reflexion bei f ins Auge bei α, sie geben daher die Bilder L'' und $L_{,,}$. Lg schliesslich wird zunächst nach h und von dort nach i und weiter nach α reflectirt, es gibt L''' als Bild von L'' und auch von $L_{,,}$.

Dass die Bilder auf dem Umfange eines Kreises liegen, folgt unmittelbar daraus, dass jedes Bild so weit hinter dem Spiegel liegt, wie der es erzeugende Punkt vor dem Spiegel. Zwei von dem leuchtenden Punkte und seinem Bilde nach einem Punkte des Spiegels gezogene Geraden müssen daher gleich sein. Es müssen daher auch die nach dem beiden Spiegeln gemeinschaftlichen Punkte C gezogenen Geraden oder $CL = CL' = CL_{,}$ und ebenso $CL'' = CL'$, $CL''' = CL''$, $CL_{,,} = CL_{,} = CL'''$ sein, oder alle Punkte L müssen gleich weit von C entfernt sein. Die Bilder liegen demnach alle auf dem mit CL um C beschriebenen Kreise.

Dass in diesem Falle gerade 5 Bilder entstehen müssen, oder dass L''' das Bild von L'' und $L_{,,}$ ist, somit kein neues Bild mehr erzeugen kann, erhält man auf folgende Weise. Ist der Winkelabstand des Punktes L von CB oder der Winkel $LCB = \varphi$, so ist $LCA = 60^0 - \varphi$. Der Winkel LCL' ist dann, da die Kreissehne LL' von CB halbirt wird, gleich 2φ und $LCL_{,} = 120^0 - 2\varphi$. Der Winkel $L'CA$, der Winkelabstand des Punktes L' vom Spiegel CA, der das Bild L'' entwirft, ist $60^0 + \varphi$, also $L'CL'' = 2 \,.\, L'CA = 120^0 + 2\varphi$. Der Winkel $L''CL$, oder der Winkelabstand der Punkte L'' und L ist dann 120^0. Von L'' erzeugt der Spiegel CB das Bild L'''. Der Winkel $L''CB$ ist $120^0 + \varphi$, demnach $L''CL''' = 240^0 + 2\varphi$ und ziehen wir davon den Winkelabstand der Punkte L'' und L ab, so erhalten wir als Abstand des dritten Bildes L''' von L $120^0 + 2\varphi$.

Andrerseits erzeugt CB ein zweites Bild von $L_{,}$. Der Winkel $L'CB$ gleich $L'CL + LCB$ ist gleich $120^0 - 2\varphi + \varphi = 120^0 - \varphi$. Der Winkel BCL'' ist daher ebenfalls $120^0 - \varphi$. Von $L_{,,}$ erzeugt nun CA ein drittes Bild, dessen Winkelabstand ACL''' von AC gleich ist dem Winkel $ACL_{,,} = 120^0 - \varphi + BCA$ gleich $180^0 - \varphi$. Der Winkelabstand dieses Punktes von L ist daher $ACL''' + LCA$ gleich $180^0 - \varphi + 60^0 - \varphi = 240^0 - 2\varphi$.

Das Bild L''' des Punktes L'' liegt von L nach links herum in einem Abstande $120^0 + 2\varphi$, das Bild L''' des Punktes L'' nach rechts herum in 240^0

— 2φ. Die Summe beider ist aber 360°, das heisst, beide Bilder liegen an demselben Punkte des Kreisumfanges. Ist φ gleich 30°, so ist der Winkelabstand aller Bilder 60°.

Ist nun allgemein der Winkel, den die beiden Spiegel mit einander bilden, $\frac{1}{n}$ des Kreisumfanges, so ist, wenn n eine ganze Zahl ist, die Anzahl der Bilder, wie man in ganz gleicher Weise erhält, $n - 1$.

Die Vervielfachung der Bilder wird in dem Brewster'schen Kaleidoscop angewandt, um mittels weniger bunter Glasstückchen die mannigfachsten symmetrischen Figuren zu erhalten. Die Einrichtung des vielfach verbreiteten Apparates darf wohl als bekannt vorausgesetzt werden.

§. 11.

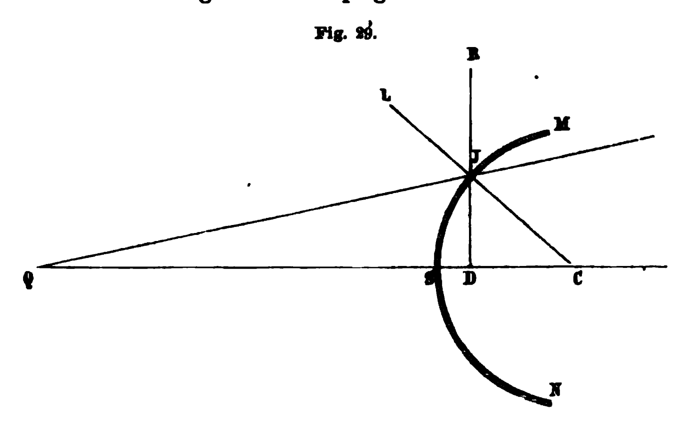
Reflexion an krummen Flächen. Krumme Flächen können wir als eine Reihenfolge gegen einander geneigter kleiner Ebenen bezeichnen, indem in jedem Punkte ein unendlich kleines Stück der Fläche mit der an diesem Punkte an die krumme Fläche gelegten Berührungsebene zusammenfällt. Das Reflexionsgesetz muss daher für krumme Flächen dasselbe sein, wie für ebene, die Reflexion geht so vor sich, als fände sie an den Berührungsebenen statt, welche den verschiedenen Punkten der reflectirenden Fläche entsprechen.

Der reflectirte Lichtstrahl liegt daher in derjenigen Ebene, welche durch den einfallenden Lichtstrahl und das Einfallsloth, die zu dem betreffenden Punkte gehörige Normale der Fläche, bestimmt wird, und bildet mit dieser Normale denselben Winkel, als der einfallende Lichtstrahl. Der Unterschied zwischen der Reflexion an ebenen und krummen Flächen besteht nur darin, dass an ebenen Flächen die Einfallslothe alle parallel sind, während sie an krummen Flächen alle verschiedene Richtungen haben, welche von der Natur der krummen Fläche bestimmt sind. Die Richtung, nach welcher die eine krumme Fläche treffenden Strahlen von derselben zurückgeworfen werden, hängt daher von dem Gesetze ab, nach welchem die Fläche gekrümmt ist, und kann, wenn dieses Gesetz bekannt ist, durch Rechnung oder Construction bestimmt werden. Die Lösung dieser Aufgabe gehört daher mehr in das Gebiet der Geometrie als der Physik; wir wollen sie daher auch nicht in ihrer allgemeinsten Form behandeln, sondern nur die Reflexion an kugelförmigen Spiegeln etwas ausführlicher betrachten, da sie die einzigen sind, welche wir später benutzen werden, und da sie fast ausschliesslich in der praktischen Optik angewandt werden.

Bei der Kugel fallen bekanntlich, da der an irgend einen Punkt derselben gezogene Radius auf der an denselben Punkt gelegten Berührungsebene senkrecht steht, die Normalen mit den Radien zusammen. Für einen die Kugel in irgend einem Punkte treffenden Lichtstrahl ist daher der an diesen Punkt gezogene Radius das Einfallsloth.

Sei nun MN (Fig. 29) ein Durchschnitt durch eine entweder an ihrer convexen oder ihrer concaven Seite spiegelnde Kugelfläche, C ihr Mittelpunkt und Q ein leuchtender Punkt, der im Abstande QC von dem Mittelpunkte des Spiegels einen Strahlenkegel auf den Spiegel sendet.

Fig. 29.



Die Richtung des von irgend einem Punkte J des Durchschnitts zurückgeworfenen Strahles wird bestimmt sein, wenn wir ausser dem Punkte J noch den Punkt D kennen, in welchem der Strahl JR entweder wirklich oder rückwärts verlängert, die Verbindungslinie QC des leuchtenden Punktes mit dem Mittelpunkte der Kugel schneidet. Wir bestimmen diesen Punkt am bequemsten dadurch, dass wir seinen Abstand CD vom Mittelpunkte oder Sd vom Scheitel S bestimmen. Zur Bestimmung von CD haben wir folgende Proportionen

$$CD : CJ = \sin DJC : \sin CDJ \ldots (1)$$
$$QC : CJ = \sin CJQ : \sin CQJ \ldots (2)$$

und indem wir die erste durch die zweite dividiren

$$\frac{CD}{QC} = \frac{\sin CQJ}{\sin CDJ} \cdot \frac{\sin DJC}{\sin CJQ}$$

Nun ist zunächst $DJC = QJL$, da CJD der Scheitelwinkel des Reflexionswinkels, dieser aber dem Einfallswinkel gleich ist, deshalb ist CJQ Nebenwinkel von DJC und somit $\sin DJC = \sin CJQ$. Nennen wir nun den Abstand des Punktes D vom Mittelpunkt $CD = g$ den Abstand des leuchtenden Punktes vom Mittelpunkte $QC = b$, den Radius $CJ = r$, den Einfallswinkel $QJL = i$, und den Winkel DCJ, der die Lage des Punktes J auf der Kugel bestimmt, β, so haben wir zunächst

$$\sin CQJ = \sin (LJQ - LCQ) = \sin (i - \beta)$$
$$\sin CDJ = \sin QDJ = \sin (DCJ + CJD) = \sin (i + \beta),$$

somit

$$\frac{g}{b} = \frac{\sin (i - \beta)}{\sin (i + \beta)} = \frac{\sin i \cdot \cos \beta - \cos i \cdot \sin \beta}{\sin i \cdot \cos \beta + \cos i \cdot \sin \beta}$$

$$\frac{g}{b} + 1 = \frac{g + b}{b} = \frac{2 \cdot \sin i \cdot \cos \beta}{\sin (i + \beta)} \cdot$$

Nun ist nach (1)

$$\frac{\sin i}{\sin (i + \beta)} = \frac{g}{r};$$

demnach

$$\frac{g + b}{b} = \frac{2 g \cdot \cos \beta}{r}$$

$$g = \frac{b \cdot r}{2 b \cdot \cos \beta - r} \cdots \text{I}$$

Da wir bei dieser Entwicklung Q als den leuchtenden und D als den Punkt betrachtet haben, in welchem der reflectirte Strahl die Axe schneidet, so gilt dieser Ausdruck zunächst nur für solche Kugelspiegel, die dem Lichte ihre convexe Seite darbieten; es ist indess leicht, den Nachweis zu liefern, dass der Ausdruck ganz in derselben Weise seine Gültigkeit hat, wenn das Licht auf die concave Seite der Kugel fällt. Ist nämlich D der leuchtende Punkt, DJ der einfallende Lichtstrahl, so ist JF der reflectirte Strahl; und da JF die Verlängerung von QJ ist, so schneidet der reflectirte Strahl die Axe im Punkte Q. Während wir also vorhin CD durch CQ ausdrücken mussten, müssen wir jetzt CQ durch CD bestimmen. Die obigen Gleichungen bleiben also ganz dieselben, wir haben sie nur anstatt nach CD jetzt nach CQ aufzulösen, oder was dasselbe ist nach b. Wir erhalten dann

$$b = \frac{g \cdot r}{2 g \cdot \cos \beta - r} \cdots \text{II}$$

Setzen wir nun ein für allemal den Abstand des leuchtenden Punktes vom Mittelpunkte gleich b, den Abstand des Punktes, in welchem der reflectirte Strahl die Axe schneidet vom Mittelpunkte gleich g, so haben wir in der Gleichung II die Zeichen g und b mit einander zu vertauschen, und wir erhalten

$$g = \frac{b \cdot r}{2 b \cdot \cos \beta - r};$$

ein Ausdruck, der mit dem Ausdruck I identisch ist. Ein und dieselbe Gleichung liefert uns also sowohl für convexe als concave spiegelnde Kugelflächen den Abstand vom Mittelpunkt, in welchem der reflectirte Strahl die Axe der spiegelnden Fläche, das heisst die Verbindungslinie des leuchtenden Punktes mit dem Mittelpunkte der Kugel schneidet.

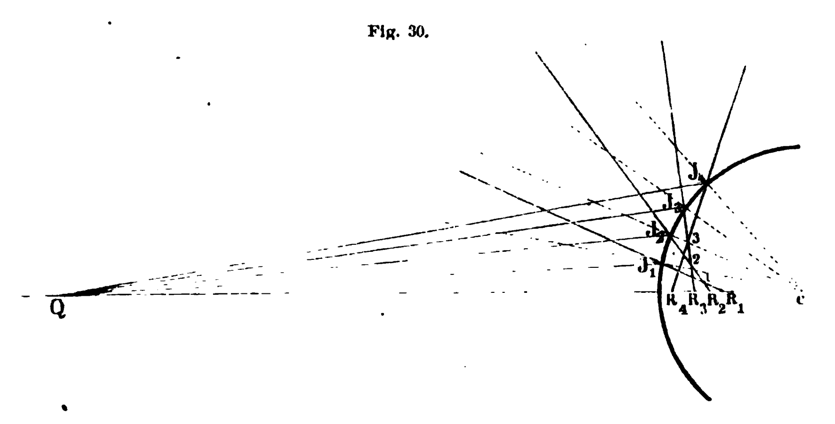
Wie man sieht hängt dieser Abstand wesentlich von drei Grössen ab, von dem Radius der spiegelnden Kugel, der Entfernung des leuchtenden Punktes vom Mittelpunkte, und von der Stelle, an welcher der Spiegel von dem einfallenden Strahl getroffen wird.

Was zunächst den letztern Umstand angeht, so sieht man, dass je weiter der spiegelnde Punkt von der Axe entfernt ist, je grösser der Winkel β ist, um so grösser auch g wird, dass also der reflectirte Strahl die Axe um so weiter vom Mittelpunkte schneidet, je weiter der spiegelnde Punkt des Spiegels von der Axe entfernt ist.

Nur jene Strahlen, für welche der Winkel β denselben Werth hat, schneiden nach der Reflexion die Axe in demselben Punkte; es sind das die Strahlen, welche den Spiegel auf einem zur Axe senkrechten Kreise treffen, wie ihn z. B. der Punkt J Fig. 29 beschreibt, wenn wir uns die Figur um die Axe des Spiegels, QC, gedreht denken. Alle diesen Kreis treffenden Strahlen schneiden sich nach der Reflexion im Punkte D, man nennt daher den Punkt D den Brennpunkt des betreffenden Ringes.

Da die Brennpunkte der einzelnen Ringe dem Spiegel um so näher rücken, je weiter der spiegelnde Punkt von der Axe entfernt ist, so müssen die von verschiedenen Ringen kommenden Strahlen sich schneiden, und zwar in immer andern Punkten; oder betrachten wir wieder nur einen Durchschnitt durch die Kugelfläche, so wird ein Strahl J_1 nach der Reflexion von einem unmittelbar neben ihm reflectirten Strahl J_2 in einem Punkte 1 geschnitten. Der Strahl

Fig. 30.

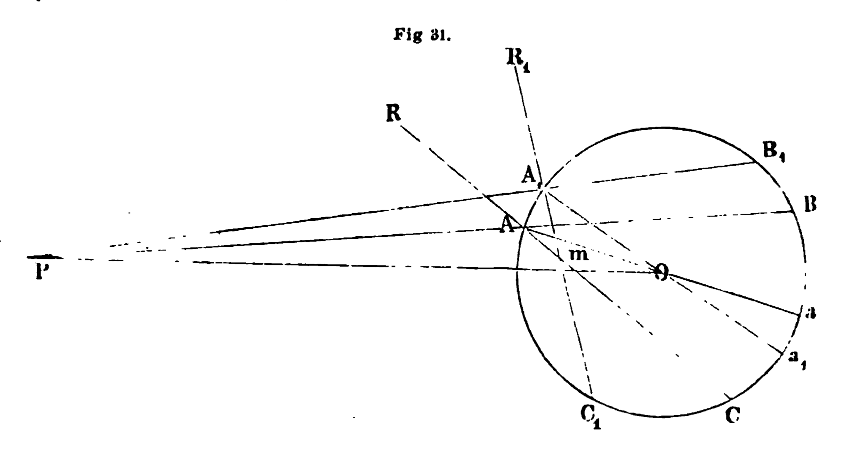


J_2 wird von J_3 nach der Reflexion in einem Punkte 2 geschnitten, der dem Punkte 1 sehr nahe liegt, und ebenso wird J_3 von dem Strahle J_4 in einem Punkte 3 geschnitten. Diese Punkte, in welchen sich die einzelnen Strahlen schneiden, ordnen sich auf bestimmten Linien, welche den Namen der Brennlinien führen. Da nämlich diese Linien aus einer stetigen Reihe von Punkten gebildet werden, in welchen sich mehrere Strahlen schneiden, so ist die Helligkeit dort grösser als in dem übrigen in der Nähe des Spiegels liegenden Raume, sie treten deshalb hell vor ihrer Umgebung hervor.

Um die Gestalt der Brennlinien zu erhalten, hat man die einzelnen Schnittpunkte ihrer Lage nach, oder die Gleichung der krummen Linie aufzusuchen, welche der geometrische Ort dieser Punkte ist. Die Ableitung dieser Gleichung erfordert ziemlich langwierige Rechnungen; wir können indess durch Bestimmung der Abstände der Punkte 1 ... von den spiegelnden Punkten J_1 ... leicht zu einem Ausdruck gelangen, der uns wenigstens dann, wenn der leuchtende Punkt unendlich weit entfernt ist, die spiegelnde Fläche also von parallelen Strahlen getroffen wird, die Gestalt der Brennlinie ohne Mühe zu bestimmen gestattet.

Sei Fig. 31 der Kreis ein Durchschnitt durch eine Kugel, welche entweder auf ihrer convexen oder ihrer concaven Seite spiegelnd ist, und P ein leuchtender Punkt, der seine Strahlen auf die Kugel sendet; seien PA und PA_1 zwei unmittelbar folgende Strahlen, deren Einfallswinkel so wenig von

Fig 31.



einander verschieden sind, dass wir den Bogen AA' als gerade betrachten dürfen, und seien AC und $A_1 C_1$ die in der Zeichnung rückwärts verlängerten reflectirten Strahlen, die sich im Punkte m schneiden; wir haben dann den Abstand Am gleich f zu bestimmen. Da nun die Dreiecke AmA_1 und C_1mC wegen Gleichheit aller Winkel ähnlich sind, so haben wir zunächst die Proportion

$$Am : C_1m = AA_1 : CC_1 \quad .. \ 1$$

Verlängern wir nun die einfallenden Strahlen, bis sie in B resp. B_1 den Kreis auf der andern Seite schneiden, so sind ebenfalls wegen Gleichheit aller Winkel die Dreiecke PAA_1 und PB_1B ähnlich, somit

$$AA_1 : BB_1 = PA : PB_1 \quad .. \ 2$$

Nun stehen als Peripheriewinkel auf den Bogen Ba der Einfallswinkel, auf Ca der Reflexionswinkel des Strahles PA, auf B_1a_1 der Einfallswinkel, auf C_1a_1 der Reflexionswinkel des Strahles PA_1; es ist deshalb

$$B_1a_1 = C_1a_1 : Ba = Ca$$
$$B_1a_1 - Ba = C_1a_1 - Ca; \ BB_1 + aa_1 = CC_1 - aa_1$$
$$BB_1 + 2\,aa_1 = CC_1.$$

Da nun weiter aa_1 und AA_1 die Bogen gleicher Scheitelwinkel sind, so ist $aa_1 = AA_1$ und $CC_1 = BB_1 + 2\,AA_1$. Damit erhalten wir aus Gleichung 2

$$AA_1 : BB_1 + 2\,AA_1 = AA_1 : CC_1 = PA : PB_1 + 2\,PA$$

und daraus nach 1

$$Am : C_1m + Am = PA : PB_1 + 3\,PA$$

Da schliesslich C_1m von Cm, PA_1 von PA nur unendlich wenig verschieden ist, so wird

$$Am = AC \cdot \frac{PA}{PB + 3\,PA} = AC \cdot \frac{PA}{AB + 4\,PA}$$

oder wenn wir den Abstand des leuchtenden Punktes von seinem Spiegelpunkte $PA = a$, die Sehne AB und die ihr gleiche AC mit s bezeichnen,

$$f = s \cdot \frac{a}{s + 4\,a}.$$

Wir haben bei dieser Ableitung die convexe Seite der Kugel als spiegelnd angenommen; ist die Kugel auf der concaven Seite spiegelnd, findet also die Reflexion bei B statt, so erhalten wir durch eine ganz gleiche Ableitung für f den Ausdruck

$$f = s \cdot \frac{a}{4\,a - s},$$

wenn a dann den Abstand PB, also wieder den Abstand des leuchtenden Punktes von dem Punkte des Spiegels bedeutet, wo der einfallende Strahl reflectirt wird. Um nun die Brennlinie zu construiren, hätten wir auf jedem reflectirten Strahl den Abstand f aufzutragen, und die so erhaltenen einzelnen Punkte m zu construiren.

Sehr leicht ist diese Linie zu construiren, wenn die einfallenden Strahlen parallel werden, wenn also für alle Strahlen a gleich und zwar gleich unendlich wird. Schreiben wir nämlich den Ausdruck für f in der Form

$$f = \frac{s}{\frac{s}{a} + 4} \quad \text{oder} \quad \frac{s}{4 - \frac{s}{a}},$$

so sieht man sofort, dass $\frac{s}{a} = o$, da $a = \infty$, und es wird in beiden Fällen

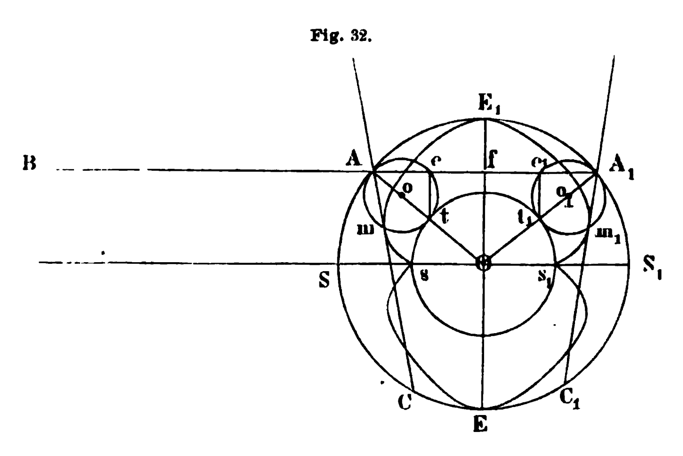
$$f = \frac{s}{4};$$

oder wir haben auf dem reflectirten Strahle jedesmal ein Viertel der zum einfallenden Strahle gehörigen Sehne abzutragen, um den betreffenden Punkt der Brennlinie zu erhalten.

Um nun sofort ein Viertel der betreffenden Sehne zu bekommen, haben wir nur Fig. 32 den zum Einfallspunkt A gehörigen Radius OA in vier gleiche Theile zu theilen, und um den $\frac{1}{4}\,r$ von A auf dem Radius entfernten Punkt o einen Kreis mit $\frac{r}{4}$ zu ziehen, so dass er den spiegelnden Kreis tangirt. Dieser Kreis schneidet in m von dem reflectirten Strahle $\frac{1}{4}\,s$ ab; somit ist m der diesem reflectirten Strahle angehörige Punkt der Brennlinie. Denn zunächst ist $Am = Ae$. Verbindet man nun den Punkt t, in welchem der Radius OA den kleinen Kreis schneidet, mit e, und zieht $Of \perp AB$, so sind OfA und teA rechtwinklige ähnliche Dreiecke, somit $Ae : Af = At : AO$; oder da $At = \frac{1}{2}\,AO$, so ist $Ae = \frac{1}{2}\,Af = \frac{1}{4}\,AB$ und deshalb auch $Am = \frac{1}{4}\,AC$.

Wir können so die Brennlinie Punkt für Punkt bestimmen, indem wir für eine Reihe von einfallenden Strahlen BA dieselbe Construction wiederholen; wir können aber hierdurch auch die Brennlinie durch eine stetige Bewegung construiren. Ziehen wir nämlich um den Mittelpunkt O einen Kreis

Fig. 32.



mit dem Radius $\frac{1}{2} r$, der den kleinen Kreis in t tangirt, und denken uns dann den kleinen Kreis auf dem mittlern Kreise rollen, so beschreibt der Punkt m des kleinen Kreises, dessen Lage wir vorhin bestimmten, die Brennlinie, denn dieser Punkt schneidet in jeder Lage des Kreises von dem Strahle, welcher an dem Punkte reflectirt ist, in welchem der kleine Kreis den Spiegel tangirt, die Länge $\frac{1}{4} s$ ab. Es ergibt sich das unmittelbar daraus, dass die Länge des Bogens tm gleich ist der des Bogens ts; denn im Winkelmass ist der Bogen tm doppelt so gross als ts, da auf tm derselbe Winkel als Peripheriewinkel steht, wie auf ts als Centriwinkel. Da nun der Radius des kleinen Kreises gleich der Hälfte des andern Kreises ist, so ist die Länge von ts gleich der von tm. Die Lage des Punktes m ist somit dadurch charakterisirt, dass er auf dem kleinen Kreise von dem Tangirungspunkt stets so weit entfernt ist, wie der Tangirungspunkt selbst auf dem grössern Kreise von der Axe. Daraus ergibt sich aber, dass die Brennlinie jene Curve ist, welche der Punkt des kleinen Kreises beschreibt, welcher den Punkt s des grössern Kreises berührt, wenn der kleine Kreis auf der Axe des Spiegels beschrieben ist.

Die Brennlinie ist somit eine Epicykloide, wie sie ein Punkt eines Kreises beschreibt, wenn er auf einem Kreise von doppelt so grossem Radius rollt, und wie sie Fig. 32 dargestellt ist, auf der einen Seite Es_1E_1, wie sie von der concaven, auf der andern EsE_1, wie sie von der convexen Seite eines spiegelnden Halbkreises erzeugt wird.

Denken wir uns die Fig. 32 um die Axe S_1OS gedreht, so beschreibt die Epicykloide eine Rotationsfläche, und diese ist die Brennfläche, welche eine reflectirende Kugel oder Halbkugel erzeugt.

Aehnlich wird die Form der Brennlinie und Brennfläche bei spiegelnden Kugelflächen auch dann, wenn der leuchtende Punkt nicht unendlich weit entfernt ist, sie bekommt immer eine der Epicykloide ähnliche Gestalt, und die Spitze der Curve liegt immer in der Verbindungslinie des leuchtenden Punktes und des Mittelpunktes, in einem Abstande vom Spiegel, der abhängig ist von der Entfernung des leuchtenden Punktes vom Spiegel. Bei parallel einfallenden Strahlen ist dieser Abstand, da für den in der Axe einfallenden Strahl immer $s = 2r$ ist, der Abstand $s\ S$ oder $s_1\ S_1$ gleich $^1/_2\ r$. Rückt der leuchtende Punkt näher, so entfernt sich die Spitze der Brennlinie vom Spiegel bei concaven spiegelnden Flächen, sie nähert sich bei convexen; ihr Abstand ist gegeben im letzten Falle durch

$$f = \frac{ra}{2a + r},$$

im ersten Falle durch

$$f = \frac{ra}{2a - r}.$$

Es ergibt sich somit, dass eine spiegelnde Kugelfläche im Allgemeinen kein Bild eines leuchtenden Punktes liefert, wie das ein ebener Spiegel thut, da sich die Strahlen nach der Reflexion nicht alle wieder in einem Punkte schneiden. Es ist vielmehr im Allgemeinen jeder Punkt der Brennfläche ein Bild des leuchtenden Punktes, da in jedem Punkte derselben sich reflectirte Strahlen schneiden. Denn wenn unser Auge von den Strahlen getroffen wird, welche sich in dem betreffenden Punkte schneiden, so sehen wir dort einen leuchtenden Punkt, der das Bild des ursprünglich leuchtenden Punktes ist.

Nur in einem Falle bekommen wir ein einziges Bild des leuchtenden Punktes, indem dann die Brennfläche sich auf einen Punkt reducirt, wenn nämlich der leuchtende Punkt im Mittelpunkte der spiegelnden Kugel selbst liegt, ein Fall, der im Allgemeinen praktisch nur bei einer spiegelnden Hohlkugel vorkommt. Für diese Lage des leuchtenden Punktes ist nämlich $a = r$, s stets gleich $2r$, somit

$$f = \frac{2r \cdot r}{4r - 2r} = r;$$

die reflectirten Strahlen schneiden sich alle im Mittelpunkte des Spiegels, dort ist also ein einziges Bild des leuchtenden Punktes. Dass dieses der Fall sein muss, ergibt sich auch schon daraus, dass wenn der leuchtende Punkt im Mittelpunkt liegt, alle Strahlen den Spiegel in der Richtung des Einfallslothes treffen, somit in derselben Richtung zurückgeworfen werden.

Um diesen Fall bei convexen Spiegeln zu realisiren, müssen die Strahlen so auf die Kugelfläche fallen, dass sie vor der Reflexion passend verlängert sich im Mittelpunkte schneiden, der leuchtende Punkt muss also ein virtueller im Abstande des Radius hinter dem Spiegel liegender sein. In der Gleichung für f müssen wir, um dieses auszudrücken, für a einsetzen $-r$, wir erhalten dann für f ebenfalls r.

Mit sehr grosser Annäherung dasselbe, das heisst ebenfalls einen Bildpunkt eines leuchtenden Punktes können wir von Kugelspiegeln erhalten, wenn wir nur ein sehr kleines Segment der Kugel als spiegelnde Fläche benutzen. Ein allerdings strenge genommen unendlich kleines bei S oder S_1, Fig. 32, liegendes Segment der Kugel erzeugt von der Brennlinie nur die Spitze s oder s_1, somit nur einen bestimmten Bildpunkt eines leuchtenden Punktes. Aber auch dann, wenn der Spiegel nicht unendlich klein, wenn die Oeffnung des Spiegels, das ist der Winkel, den die äussersten Radien des Spiegels mit einander bilden, nur wenige Grade beträgt, wird nur ein so kleiner Theil der Brennlinie erzeugt, dass, wo wir auch das Auge halten, das Bild des leuchtenden Punktes immer fast genau an derselben Stelle, bei s oder s_1 erscheint.

Unter dieser Voraussetzung erhalten wir also auch von kugelförmigen Spiegeln Bilder von leuchtenden Punkten, welche in der Verbindungslinie des leuchtenden Punktes mit dem Mittelpunkte des Spiegels liegen, und deren Abstand von dem Spiegel bei convexen Spiegeln gegeben ist durch

$$f = \frac{r\,a}{2\,a + r},$$

bei concaven durch

$$f = \frac{r\,a}{2\,a - r}.$$

Dasselbe Resultat liefert uns die im Anfange dieses §. abgeleitete Gleichung für den Punkt, in welchem die reflectirten Strahlen die Axe schneiden, dessen Abstand vom Mittelpunkt gegeben ist durch

$$g = \frac{b\,r}{2\,b\,.\cos\beta - r}.$$

Denn wenn die Oeffnung des Spiegels oder β nur wenige Grade beträgt, dürfen wir ohne merklichen Fehler $\cos\beta$ stets gleich 1 setzen; dann wird aber

$$g = \frac{b\,r}{2\,b - r}$$

oder alle Strahlen, welche von einem so kleinen Kugelsegmente reflectirt werden, schneiden die Axe in demselben Punkte, dieser ist somit der Bildpunkt des leuchtenden Punktes. Dass dieser Ausdruck uns dieselbe Lage des Bildpunktes gibt, wie die aus den Brennlinien abgeleiteten, lässt sich leicht zeigen. Ist nämlich Fig. 33 wieder Q der leuchtende Punkt, wenn die convexe Seite des Kugelsegmentes spiegelnd ist, D der Bildpunkt, dessen Abstand CD vom Mittelpunkte gleich g ist, so ist, wenn wir auch jetzt $DS = f$, $QS = a$ setzen,

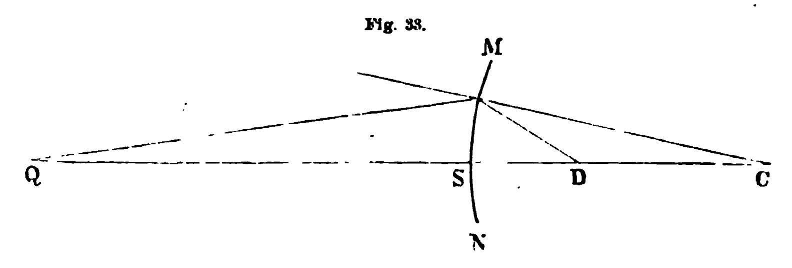
$$f + g = r,\ g = r - f$$
$$a + r = b,$$

und setzen wir diese Werthe für g und b in die Gleichung für g, so wird

$$f = \frac{r\,a}{2\,a + r}.$$

Ist die concave Seite der Fläche spiegelnd und D der leuchtende, Q der Bildpunkt, so haben wir in der vorstehenden Gleichung nur f und a mit einander

Fig. 33.



zu vertauschen, da dann $SD = a$ und $SQ = f$ wird. Dann ist

$$a = \frac{r f}{2 f + r}$$

und daraus

$$f = - \frac{a r}{2 a - r}.$$

Da wir vorhin a positiv rechneten, wenn der leuchtende Punkt auf der convexen, f positiv rechneten, wenn der Bildpunkt auf der concaven Seite des Spiegels lag, so folgt, da wir einfach f und a vertauschten, dass in der letzten Gleichung a positiv ist, wenn der leuchtende Punkt auf der concaven Seite, dagegen f positiv ist, wenn der Bildpunkt auf der convexen Seite liegt. Da nun bei concaven Spiegeln der Bildpunkt meist auf der concaven Seite liegt, wollen wir der grössern Bequemlichkeit wegen f positiv rechnen, wenn der Bildpunkt auf der concaven Seite liegt; wir haben dazu in der letzten Seite rechts nur das Vorzeichen zu ändern und erhalten dann

$$f = \frac{a r}{2 a - r}.$$

Auf die eine oder andere Weise finden wir also, dass kleine Kugelspiegel Bildpunkte entwerfen, welche in der Spitze der Brennfläche liegen.

§. 12.

Kugelförmige Convexspiegel. Bilder. Untersuchen wir jetzt die Lage der Bilder von Kugelspiegeln mit hinreichend kleiner Oeffnung genauer, und nehmen wir dabei zunächst an, die Verbindungslinie des leuchtenden Punktes mit dem Mittelpunkte sei zugleich die Rotationsaxe, um welche wir einen Durchschnitt des Spiegels rotirt denken können, um die spiegelnde Kugelfläche zu erzeugen. Man nennt dann die Verbindungslinie des leuchtenden Punktes und des Mittelpunktes die Hauptaxe oder Axe des Spiegels und den Punkt, wo diese den Spiegel schneidet, den Scheitel des Spiegels. Der für den Abstand des Bildpunktes vom Mittelpunkte gefundene Werth

$$g = \frac{b r}{2 b - r}$$

zeigt nun, dass so lange $b > r$, also der leuchtende Punkt sich vor dem Spiegel befindet, g immer kleiner als r ist, somit ist der Bildpunkt eines reellen leuchtenden Punktes immer virtuell; es verhält sich in dieser Beziehung der Convexspiegel wie ein ebener Spiegel. Der Abstand des Bildpunktes vom Spiegel ist aber im Allgemeinen ein anderer als der Abstand des leuchtenden Punktes. Man erkennt das unmittelbar aus der Gleichung für f

$$f = \frac{a\,r}{2\,a + r} = \frac{r}{2 + \frac{r}{a}},$$

denn nach dieser ist immer $f < \frac{r}{2}$, ausser wenn $a = \infty$, also paralleles Licht einfällt. In dem Falle wird einfach $f = \frac{r}{2}$, oder der Vereinigungspunkt paralleler den Spiegel treffender Strahlen liegt in dem Halbirungspunkte des Radius. Man nennt diesen Punkt deshalb den Brennpunkt oder Hauptbrennpunkt des Spiegels. Für alle Werthe von a, die kleiner sind, liegt der Bildpunkt zwischen Hauptbrennpunkt und Spiegel, und da mit abnehmendem a der Werth von f abnimmt, so rückt der Bildpunkt dem Spiegel um so näher, je näher auch der Bildpunkt dem Spiegel rückt. Ist schliesslich $a = o$, liegt der leuchtende Punkt also unmittelbar auf dem Spiegel selbst, so fällt der Bildpunkt mit ihm zusammen, denn dann wird auch $f = o$.

Nur wenn die leuchtenden Punkte virtuell werden, das heisst die Strahlen nach einem hinter dem Spiegel liegenden Punkte convergiren, können wir reelle Bildpunkte erhalten, denn mit a ändert auch f sein Vorzeichen; da wir nun den Werth von f positiv gesetzt haben, wenn der Bildpunkt hinter dem Spiegel liegt, auf der concaven Seite, so bedeutet ein negativer Werth von f, dass der Bildpunkt vor dem Spiegel liegt, also hier ein reeller ist. Indem nun a auf der negativen Seite von $o - \frac{r}{2}$ wächst, nimmt f von o bis ∞ zu, es rückt also der Bildpunkt vom Spiegel immer weiter fort, bis schliesslich die Strahlen als parallele zurückkehren, wenn die einfallenden Strahlen nach dem Hauptbrennpunkte convergiren.

Für leuchtende Punkte, welche ausserhalb der Hauptaxe des Spiegels liegen, gelten ganz dieselben Sätze über die Lage der Bildpunkte, nur mit dem Unterschiede, dass sie anstatt auf die Hauptaxe auf die Verbindungslinien dieser leuchtenden Punkte mit dem Mittelpunkte, die sogenannten Nebenaxen, sich beziehen. Wir müssen demnach die Entfernungen g oder f auf diesen nehmen.

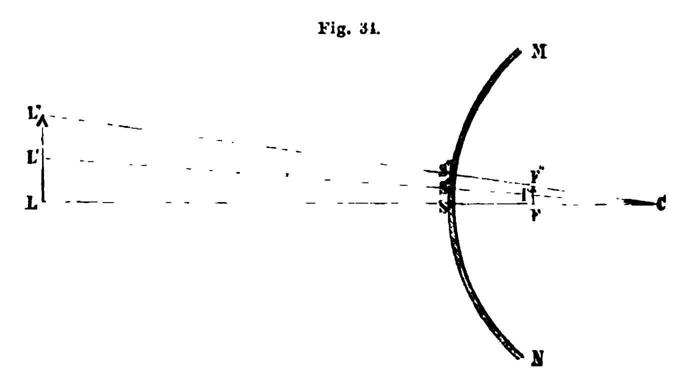
Ist demnach L, L', L'' Fig. 34 eine leuchtende Linie, die wir senkrecht zur Axe LC nehmen, so werden die Strahlen, welche der Punkt L'' auf den Spiegel sendet, so reflectirt, als kämen sie von einem Punkte F'', welcher so auf der Nebenaxe CL'' liegt, dass

$$CF'' = \frac{C\,L''\,.\,r}{2\,C\,L'' - r},$$

während die von L ausgehenden Strahlen in F vereinigt werden, so dass

$$CF = \frac{CL \,.\, r}{2\,CL - r} \;.$$

Fig. 31.



Aus der ersten Gleichung folgt nun, wenn wir den Winkel $L''CL = \alpha$ setzen,

$$\frac{CF''}{CL''} = \frac{r}{2\,CL'' - r} = \frac{r \,.\, \cos\alpha}{2\,CL - r\cos\alpha} \;;$$

da aber bei der vorausgesetzten kleinen Oeffnung des Spiegels $\cos\alpha$ nur sehr wenig von 1 verschieden ist, können wir ohne merklichen Fehler

$$\frac{r \,.\, \cos\alpha}{2\,CL - r\cos\alpha} = \frac{r}{2\,CL - r}$$

und damit

$$CL'' : CF'' = CL : CF$$

setzen; oder der Bildpunkt F'' liegt senkrecht über dem Bildpunkte F, wie L'' senkrecht über L liegt. Gleiches gilt von allen zwischen L und L'' liegenden Punkten, sie geben zwischen F und F'' auf FF'' liegende Bildpunkte.

Die einzelnen Bildpunkte folgen sich einander wie die Axen $L''C$, $L'C$, LC, und da diese sich folgen wie die leuchtenden Punkte und sich erst jenseits der Bildpunkte schneiden, so folgt, dass die gegenseitige Lage der Bildpunkte ähnlich ist derjenigen der leuchtenden Punkte.

Es folgt daraus, dass ein sphärischer Convexspiegel ein aufrechtstehendes Bild hinter dem Spiegel von leuchtenden Gegenständen vor dem Spiegel liefert.

Da das Bild in dem Winkel $L''CL$ näher beim Scheitel liegt als der Gegenstand LL'', so folgt, dass FF'' kleiner ist als LL''.

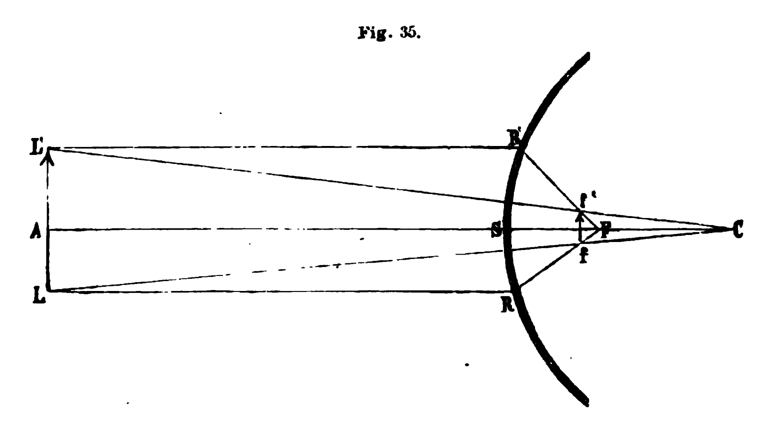
Das Bild, welches ein Convexspiegel von vor ihm befindlichen leuchtenden Gegenständen liefert, ist somit ein aufrechtstehendes verkleinertes Bild.

Mit Hülfe der beiden Sätze, dass der Bildpunkt eines leuchtenden Punktes auf der dem Punkte angehörigen Nebenaxe liegt, und dass der Hauptaxe parallele Strahlen nach der Reflexion den Hauptbrennpunkt schneiden, lässt sich leicht für jeden leuchtenden Punkt der Bildpunkt construiren.

Ist LL' Fig. 35 eine leuchtende Linie, die irgendwo vor dem Spiegel liegt, so liegt der Bildpunkt von L auf LC, und der von L' auf $L'C$.

Die von L und L' ausgehenden der Hauptaxe parallelen Strahlen LR und $L'R'$ schneiden nun nach der Reflexion die Hauptaxe in dem Hauptbrenn-

Fig. 35.



punkte F. Verbinden wir daher R und R' mit F, so sind die Punkte f und f' die gesuchten Bildpunkte von L und L', und ff' ist das aufrechte verkleinerte Bild von LL'.

Diese Sätze über die Reflexion an sphärischen Convexspiegeln finden in der Erfahrung ihre volle Bestätigung. Solche Spiegel, wie z. B. die in den Gärten oft aufgestellten Kugeln von dunkelm Glase liefern aufrecht stehende verkleinerte Bilder der aussen befindlichen Gegenstände. Die Bilder sind regelmässig, so lange die Gegenstände weit entfernt sind, so dass der von den Axen der äussersten Strahlenkegel eingeschlossene Theil des Spiegels nur klein ist. Sobald aber die Entfernung der Gegenstände vom Spiegel gegen ihre Dimensionen nur klein ist, sind die Bilder verzerrt, wie man sich leicht überzeugt, wenn man sich selbst in einem derartigen Spiegel betrachtet.

§. 13.

Reflexion an kugelförmigen Hohlspiegeln; Bilder. In ganz ähnlicher Weise, wie wir es für die convexen spiegelnden Flächen gethan haben, können wir die Lage der Bildpunkte und Bilder für Hohlspiegel erhalten. Bei hinreichend kleiner Oeffnung des Spiegels sahen wir, dass alle von einem Punkte der Hauptaxe ausgehenden Strahlen sich wieder nach der Reflexion in einem Punkte der Hauptaxe schneiden, dessen Abstand vom Mittelpunkt gegeben war durch

$$g = \frac{br}{2b - r}.$$

Für den Abstand dieses Punktes vom Spiegelscheitel erhielten wir, indem wir die Abstände des Bildpunktes auf der concaven Seite mit dem positiven Vorzeichen versahen:

$$f = \frac{a\,r}{2a - r}.$$

Der auf diese Weise bestimmte Schnittpunkt der reflectirten Strahlen ist der Bildpunkt des leuchtenden Punktes; die Lage desselben hängt wiederum wesentlich ab von der Lage des leuchtenden Punktes und je nach der letztern kann der Bildpunkt ein reeller sein, die reflectirten Strahlen schneiden sich wirklich, oder ein virtueller, der Bildpunkt liegt hinter dem Spiegel, wie bei ebenen oder convexen Spiegeln.

Nehmen wir zunächst an, der leuchtende Punkt sei unendlich weit entfernt, es treffen den Spiegel parallele Strahlen, so wird f nach der Gleichung

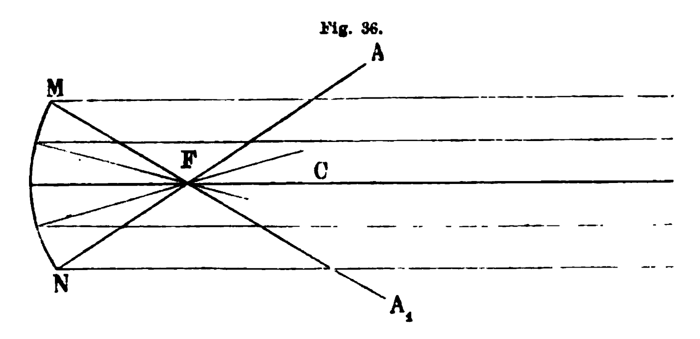
$$f = \frac{r}{2 - \frac{r}{a}},$$

da $\frac{r}{a} = \frac{r}{\infty} = o$ ist,

$$f = \frac{r}{2}.$$

Der Axe parallele Strahlen schneiden sich nach der Reflexion also auf der concaven Seite des Spiegels in der Mitte zwischen Mittelpunkt und Spiegel; die Lage des Hauptbrennpunktes ist also hier genau dieselbe, wie bei den Convexspiegeln. Da aber jetzt dieser Punkt auf derselben Seite liegt, von welcher die Strahlen kommen, so ist der Hauptbrennpunkt ein reeller. Lassen wir z. B. die Strahlen der Sonne auf einen Hohlspiegel fallen, so sehen wir in dem Hauptbrennpunkt ein reelles Bild der Sonne, wenn wir unser Auge in der Richtung des reflectirten Strahlenbündels halten, also innerhalb des Kegels *FAA'* Fig. 36, innerhalb dessen sich die reflectirten Strahlen fortpflanzen. Darin unterscheidet sich ein solches reelles Bild von einem wirklich leuchten-

Fig. 36.



den Punkte, dass wir letztern von allen Seiten sehen können, sobald nur kein Schirm zwischen Auge und Lichtquelle ist, während wir das reelle Bild nur von solchen Punkten aus sehen, nach welchen hin die dasselbe bildenden Strahlen sich fortpflanzen. Will man das reelle Bild auch von andern Punkten sehen, muss man bewirken, dass sich von demselben auch dorthin die Strahlen ausbreiten. Am besten geschieht das durch die später zu besprechende

unregelmässige Reflexion, indem man in F' einen nicht polirten Gegenstand, etwa einen kleinen Papierschirm hält.

Wird der Abstand a des leuchtenden Punktes kleiner, so wächst f, der Abstand des Bildpunktes vom Spiegel, da dann in dem Ausdruck für f der Quotient $\frac{r}{a}$ grösser und damit der Nenner kleiner wird. Nimmt a von ∞ bis r ab, rückt also der leuchtende Punkt allmählich bis zum Mittelpunkte, so wächst f von $\frac{r}{2}$ bis r, der Bildpunkt rückt also vom Hauptbrennpunkt bis zum Mittelpunkt. Im Mittelpunkte fällt, wie wir schon früher erwähnten, der leuchtende Punkt und sein Bild zusammen.

Rückt der leuchtende Punkt dem Spiegel noch näher als der Mittelpunkt, so rückt der Bildpunkt über den Mittelpunkt hinaus, f wird grösser als r, denn dann wird $\frac{r}{a} > 1$, somit der Nenner des Ausdruckes für $f < 1$. Der Bildpunkt rückt bis in unendliche Entfernung, die Strahlen werden nach der Reflexion einander und der Axe parallel, wenn $a = \frac{r}{2}$ wird, denn dann wird

$$f = \frac{r}{2 - 2} = \infty$$

Die Lage der Bildpunkte, wenn die leuchtenden Punkte zwischen Mittelpunkt und Hauptbrennpunkt liegen, ergibt sich unmittelbar aus der Gleichheit der Einfalls- und Reflexionswinkel; sie liegen dort, wo ein leuchtender Punkt sich befinden müsste, um an der Stelle des jetzt leuchtenden Punktes seinen Bildpunkt zu haben. Das lässt auch die Gleichung für f unmittelbar erkennen, wenn wir den reciproken Werth von f bilden

$$\frac{1}{f} = \frac{2}{r} - \frac{1}{a};$$

setzen wir für a irgend einen Werth ein, so erhalten wir einen bestimmten Werth für f. Setzen wir aber jetzt diesen für f gefundenen Werth als a ein, so ergibt die Form der Gleichung, dass jetzt f den Werth bekommt, der vorher für a angenommen wurde. Leuchtende Punkte und Bildpunkte sind also conjugirte Punkte, so dass jedesmal, wenn der eine der leuchtende ist, der andere dessen Bild wird.

Wird $a < \frac{r}{2}$, rückt also der leuchtende Punkt zwischen Hauptbrennpunkt und Spiegel, so wird $\frac{r}{a} > 2$, somit der Werth für f negativ. Da nun ein positives f bedeutet, dass der Brennpunkt auf der concaven Seite des Spiegels liegt, so bedeutet ein negatives, dass der Bildpunkt auf der convexen Seite, also jetzt hinter dem Spiegel liegt. Sobald also die leuchtenden Punkte zwischen dem Hauptbrennpunkte und dem Spiegel liegen, sind die Bilder, wie bei den ebenen Spiegeln, virtuelle. Die Lage hängt aber auch hier wesentlich von dem Abstande des leuchtenden Punktes vom Spiegel ab; das virtuelle Bild rückt mit Annäherung des leuchtenden Punktes an den Spiegel aus unendlicher Entfernung bis zum Spiegel, so dass wenn $a = 0$ wird, auch f

gleich 0 wird. In der Spiegelfläche fallen also leuchtender Punkt und Bild zusammen. Wenn man deshalb, wie bei den Versuchen von Foucault, zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit mit einem Hohlspiegel in die Fläche eines zweiten ein reelles Bild wirft, so werden die Strahlen so zurückgeworfen, als wenn das reelle Bild selbst seine Strahlen aussende, wie wir das §. 4 erwähnten.

Die Lage der virtuellen Bilder bei Hohlspiegeln lässt sich unmittelbar durch die Sätze über die Convexspiegel bestimmen; das virtuelle Bild liegt an der Stelle hinter dem Spiegel, wo ein leuchtender Punkt sich befinden müsste, um, wenn die convexe Seite der Kugel spiegelnd wäre, seinen Bildpunkt dort zu erzeugen. Es ergibt sich das so unmittelbar aus den aufgestellten Gleichungen, dass es überflüssig ist die Rechnungen hier durchzuführen.

Lassen wir die leuchtenden Punkte virtuell werden, das heisst, senden wir Strahlen auf den Spiegel, die sich erst hinter demselben schneiden, so werden die Bildpunkte wieder reell. In der Gleichung für f wird dann a negativ, also

$$f = \frac{-ar}{-2a - r} = \frac{ar}{2a + r},$$

die Gleichung wird also für ein negatives a identisch mit jener für convexe Flächen. Die Bildpunkte von virtuellen leuchtenden Punkten liegen also genau an derselben Stelle, wie die Bildpunkte reeller leuchtender Punkte, wenn die convexe Seite der Fläche spiegelnd ist.

Was hier betreffs der Bildpunkte von leuchtenden Punkten, die auf der Hauptaxe liegen, entwickelt worden ist, lässt sich sofort auch auf leuchtende Punkte übertragen, die ausserhalb der Hauptaxe liegen, jedoch müssen wir auch hier, wie bei Convexspiegeln, die Sätze auf die zu jenen Punkten gehörigen Nebenaxen beziehen. So ist z. B. Fig. 37 l' der Bildpunkt des Punktes L', und der Abstand $l's$ vom Spiegel aus der Gleichung gegeben

$$l's = \frac{r}{2 - \frac{r}{L's}}.$$

Fig. 37.

Fällen wir nun eine Senkrechte von L' auf die Hauptaxe, so ist die Lage des Bildpunktes von L, dem Fusspunkte dieser Senkrechten, nämlich l gegeben durch

$$lS = \frac{r}{2 - \frac{r}{LS}}.$$

Durch eine der im vorigen §. ganz analoge Rechnung gelangt man auch hier leicht zu dem Satze

$$ll' : lC = LL' : LC \ . \ . \ . \ (a)$$

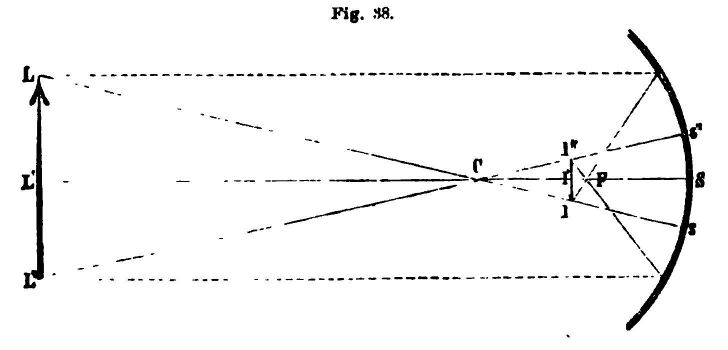
oder die Punkte l und l' liegen in einer zur Axe senkrechten Geraden. Sind nun alle Punkte der Linie LL' leuchtend, so liegen die Bildpunkte sämmtlich auf ll', somit ist ll' das Bild von LL'; dieses Bild ist indess ein umgekehrtes. Denn da der Bildpunkt eines ausser der Hauptaxe liegenden Punktes auf der betreffenden Nebenaxe liegt, und zwar so lange der Bildpunkt ein reeller ist, auf der entgegengesetzten Seite des Mittelpunkts als der leuchtende Punkt, und da alle Axen sich im Mittelpunkte schneiden, so folgt, dass die leuchtenden Punkte und ihre Bildpunkte auch auf der entgegengesetzten Seite der Hauptaxe liegen, in Abständen, die sich verhalten, wie die Abstände der leuchtenden Punkte von der Axe.

Ist der Bildpunkt dagegen ein virtueller, so liegt er auf seiner Nebenaxe auf derselben Seite des Mittelpunktes, wie der leuchtende Punkt, deshalb auch auf derselben Seite der Hauptaxe. Die virtuellen Bilder sind also wie bei den Convexspiegeln aufrechte.

Zur Construction der Bilder können wir hier dieselbe Methode anwenden, wie bei den Convexspiegeln, da auch hier die beiden Sätze bestehen, dass der Brennpunkt eines Punktes auf der ihm zugehörigen Nebenaxe liegt, und dass die der Hauptaxe parallelen Strahlen die Hauptaxe nach der Reflexion im Hauptbrennpunkte schneiden.

Ist demnach $LL'L''$ Fig. 38 eine leuchtende Linie, C der Mittelpunkt des Spiegels, so liefert die angegebene Construction das umgekehrte Bild $ll'l''$, welches zwischen dem Mittelpunkte C und dem Hauptbrennpunkte F liegt.

Fig. 38.



Aus der Lage des Bildes und der oben hingeschriebenen Gleichung (a) nach der sich die Grösse des Bildes zu der des Gegenstandes verhält wie die respectiven Abstände vom Mittelpunkt, ergibt sich, dass die Bilder von ausserhalb des Mittelpunkts liegenden leuchtenden Gegenständen verkleinerte sind.

Ist ll'' die leuchtende Linie, so ist LL'' das Bild, wie sich nach dem Frühern unmittelbar ergibt. Das Bild eines zwischen Mittelpunkt und Haupt-

brennpunkt liegenden Gegenstandes liegt ausserhalb des Mittelpunktes, es ist umgekehrt und vergrössert.

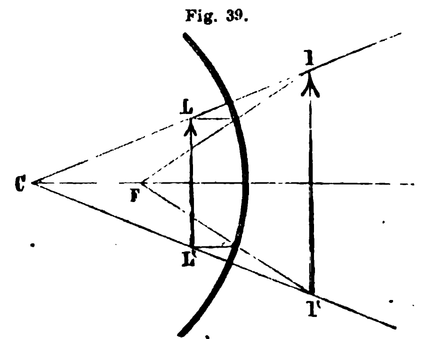
Je näher der leuchtende Gegenstand dem Mittelpunkte rückt, um so näher rückt ihm auch das Bild; rückt der Gegenstand in den Mittelpunkt, so entsteht dort ein demselben an Grösse gleiches und umgekehrtes Bild.

Liegt der leuchtende Gegenstand seitlich von der Hauptaxe in der Nähe des Mittelpunktes, so erzeugt der Spiegel an der andern Seite der Hauptaxe in der Nähe des Mittelpunktes und nahezu in derselben Entfernung ein reelles Bild. Dadurch ist die in §. 4 besprochene Spiegelanordnung bei dem Versuche Foucault's zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit erklärt.

Rückt der Gegenstand in den Brennpunkt, so rückt das Bild ins Unendliche, es verschwindet, und rückt der Gegenstand dem Spiegel noch näher, so erscheint wieder ein Bild, aber jetzt ein virtuelles aufrechtstehendes hinter dem Spiegel.

So gibt die leuchtende Linie LL' Fig. 39 das vergrösserte aufrecht stehende Bild ll'. Es wird überflüssig sein, dasselbe näher zu entwickeln, da sich die Beschaffenheit des Bildes aus den bisherigen Betrachtungen zur Genüge ergibt, und da Lage und Grösse desselben nach der angegebenen Construction und dem eben entwickelten Satze sich unmittelbar ergeben. Gegenstand und Bild verhalten sich genau wie Bild und Gegenstand bei Convexspiegeln.

Fig. 39.



Man kann leicht die hier abgeleiteten Sätze durch den Versuch bestätigen. Stellt man eine Kerze vor einem Hohlspiegel so auf, dass ungefähr die Mitte der Flamme auf der Hauptaxe des Spiegels und vom Spiegel weiter entfernt als der Hauptbrennpunkt sich befindet, und bringt man in dem nach der Entfernung der Kerze und dem Radius des Spiegels berechneten Abstand des Bildes einen kleinen Schirm an, so erhält man auf demselben ein umgekehrtes Bild der Flamme, welches nach allen Seiten sichtbar ist, da das auf den Schirm fallende Licht unregelmässig zerstreut wird. Will man das Bild direkt ohne Schirm sehen, so muss man das Auge so stellen, dass es von den reflectirten Strahlen getroffen wird.

Rückt die Flamme dem Spiegel näher als der Hauptbrennpunkt, so erhält man ein vergrössertes aufrecht stehendes Bild hinter dem Spiegel.

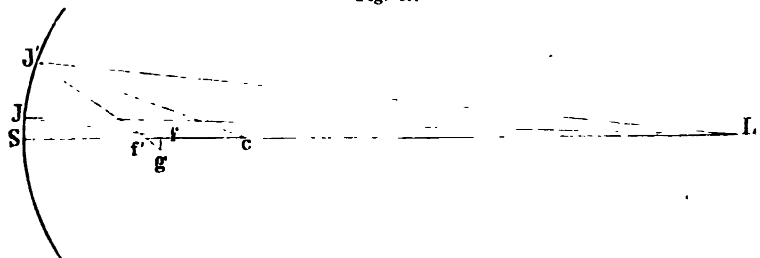
§. 14.

Sphärische Aberration. Die in den beiden letzten §§. gemachte Voraussetzung, dass die Spiegel so klein seien, dass wesentlich die Spitze der Brennlinie allein aufträte, oder dass wir die Oeffnung des Spiegels so klein

setzen dürfen, dass $\cos \beta$ gleich 1 angenommen werden darf, lässt sich in der Praxis nicht erreichen. Der Erfolg davon ist, dass man als Bild des leuchtenden Punktes nicht genau einen leuchtenden Punkt bekommt, sondern einen sogenannten Brennraum, in welchem sich die einzelnen vom Spiegel herkommenden Strahlenkegel schneiden. So schneiden sich die vom Spiegel bis etwa zum Punkte J Fig. 40 reflectirten Strahlen im Punkte f der Axe, dessen Lage durch die Gleichung gegeben ist (§. 11)

$$Cf = \frac{br}{2b - r},$$

Fig. 40.



während die auf den Ring J' treffenden Strahlen sich im Punkte f' der Axe schneiden, der hier, wo der Winkel $J'CS = \beta$ noch nicht 20^0 beträgt, nach der Gleichung

$$Cf' = \frac{br}{2b \cos \beta - r}$$

dem Spiegel schon merklich näher liegt als der Punkt f.

In dem Abstand ff' schneiden sich nun die zwischen J und J' den Spiegel treffenden Strahlen, so dass dieser ganze Abstand mehr Strahlen erhält als die übrigen Punkte der Axe. Der Abstand ff' derjenigen Punkte der Axe, in welchen sich die reflectirten centralen und Randstrahlen schneiden, nennt man die Länge des Brennraums, oder die Längenabweichung des Spiegels. Diese Länge ist

$$Cf' - Cf = \frac{2bbr\,(1 - \cos \beta)}{4bb \, . \cos \beta - 2br\,(1 + \cos \beta) + rr},$$

sie hängt also ab von dem Abstand des leuchtenden Punktes und von β der Oeffnung des Spiegels. Sehr leicht ist die Grösse derselben für parallele Strahlen zu bestimmen. Dort ist $b = \infty$

$$ff' = r\left(\frac{1 - \cos \beta}{2 \, . \cos \beta}\right),$$

also für $\beta = 20^0$ gleich $0{,}03\, r$.

Da die reflectirten Strahlen von ihren Brennpunkten aus sich kegelförmig ausbreiten, so umgeben die Strahlen, welche von dem Rande näher liegenden Kreisen ausgehen, den Brennpunkt f der mittlern Strahlen als leuchtende Kreise, ein im Brennpunkte f senkrecht zur Axe aufgestellter kleiner Schirm wird daher als Bild des leuchtenden Punktes L nicht einen scharf begrenzten leuchtenden Punkt, sondern einen kleinen leuchtenden Kreis

zeigen. Den Radius dieses Kreises oder die Grösse fg, um welche sich der zurückgeworfene Strahl $J' f' g$ im Brennpunkte der mittlern Strahlen von der Axe entfernt, nennt man die Seitenabweichung.

Die Grösse der Seitenabweichung ergibt sich einfach aus der Gleichung

$$\frac{fg}{ff'} = \text{tang}\, gf' f = \text{tang}\,(i + \beta).$$

Für parallele Strahlen wird der Einfallswinkel der Randstrahlen gleich β, somit

$$\frac{fg}{ff'} = \text{tang}\ 2\,\beta.$$

Hauptsächlich die Seitenabweichung ist es, welche bei der Erzeugung der Bilder durch sphärische Spiegel störend wirkt; während nämlich in Folge der Längenabweichung nur die Lichtstärke der Bilder etwas geschwächt wird, erzeugt die Seitenabweichung Undeutlichkeit der Bilder. Denn da durch dieselbe das Bild jedes leuchtenden Punktes ein Kreis wird, so fallen die Bilder benachbarter Punkte theilweise über einander und stören so eins das andere.

Man kann die Abweichung in Folge der Kugelgestalt des Spiegels nun zwar sehr klein machen, indem man Spiegel von grossem Radius oder grosser Brennweite anwendet, ganz zum Verschwinden kann man sie aber nicht bringen. Die Geometrie hat sich daher die Aufgabe gestellt, zu untersuchen, ob es nicht eine Fläche gibt, bei der die bei der Kugel stattfindende annähernde Vereinigung der Strahlen in einen Punkt in der That stattfindet.

Die Lösung dieser Aufgabe hat jedoch nur theoretisches Interesse, da die hiernach bestimmte Fläche, es ist eine parabolische, sich nur schwierig in der Praxis darstellen lässt.

Wie bei der Kugel genau im Mittelpunkt liegende Punkte nur einen einzigen Punkt zum Brennpunkt haben, so gibt es noch einige andere Flächen, welche für Punkte in bestimmter Lage ebenfalls bestimmte Brennpunkte haben, es sind Rotationsflächen der Ellipse, der Hyperbel und der Parabel. Die Ellipse wie die Hyperbel hat zwei im Endlichen liegende Brennpunkte; befindet sich in einem derselben ein leuchtender Punkt, so liegt der Bildpunkt im andern Brennpunkte, da die von den beiden Brennpunkten an irgend einen Punkt der Curven, oder der aus ihrer Rotation um die grosse Axe entstandenen Flächen, gezogenen Radien Vectoren mit der an denselben Punkt gezogenen Normale gleiche Winkel bilden. Bei der Parabel ist der eine der beiden Brennpunkte unendlich weit von dem Scheitel der Parabel entfernt; deshalb werden die auf die Innenseite eines durch Rotation um die Axe entstandenen Paraboloides parallel mit der Axe auffallenden Strahlen in dem Brennpunkte der Parabel vereinigt, und die auf die Aussenseite in gleicher Richtung auffallenden Strahlen divergiren nach der Reflexion, als kämen sie aus dem Brennpunkte des Paraboloids.

Für andere krumme Flächen gibt es gar keine Punkte, deren Strahlen nach der Reflexion auch nur annähernd in einem Punkte vereinigt werden.

Die auf solche Flächen auffallenden Strahlen zerstreuen sich und zwar nach verschiedenen Gesetzen, je nach der Krümmung der Flächen, oder was dasselbe ist, nach der Richtung der an benachbarten Punkten gezogenen Normalen. Die Schnittpunkte der reflectirten Strahlen ordnen sich dann ebenso wie bei der Kugel in Linien oder Flächen, die Brennlinien oder Brennflächen, welche durch grössere Helligkeit vor ihrer Umgebung ausgezeichnet sind. Auf die Beschaffenheit dieser krummen Linien und Flächen kann natürlich ohne Hülfe weiterer Rechnungen nicht eingegangen werden; ihre Bestimmung ist Aufgabe der Geometrie, nicht der Physik, es sind in den meisten Fällen ziemlich verwickelte Linien und Flächen [1]).

Nur in einzelnen Fällen ist es ziemlich leicht, diese Flächen zu bestimmen. So z. B. ergibt sich aus den Entwicklungen des §. 11 unmittelbar, dass wenn auf einen Kreiscylinder paralleles Licht fällt, dessen Strahlen zur Cylinderaxe senkrecht sind, dass dann ein zur Axe senkrechter Durchschnitt eine ebensolche Epicykloide ist, wie wir sie dort als Brennlinie für einen Kugeldurchschnitt bekamen. Daraus folgt dann, dass die kaustische Fläche in dem Falle ein gerader epicykloidischer Cylinder ist. Man überzeugt sich leicht davon, wenn man ein offenes cylindrisches Gefäss, welches mit irgend einer trüben Flüssigkeit, am besten mit Dinte gefüllt ist, in die Sonne stellt, man sieht dann die Epicykloide sehr schön auf der Oberfläche der dunklen Flüssigkeit.

Nimmt man nur ein sehr kleines Stück der Cylinderfläche, so bildet sich auch hier nur die Spitze der Brennlinie, oder die Kante der Brennfläche, daraus ergibt sich dann als Bild eines leuchtenden Punktes eine der Cylinderaxe parallele Linie. Eine der Axe des Cylinders parallele Linie erhält als Bild ebenfalls eine der Axe parallele Linie, eine zur Axe senkrechte Linie liefert als Bild schon eine Fläche.

§. 15.

Brechung des Lichtes in ebenen Flächen. Kommt das Licht bei seiner Ausbreitung an einem Hinderniss an, so tritt, wie wir bereits erwähnten, eine Theilung des Lichtes ein, indem ein Theil des Lichtes zurückgeworfen wird, ein Theil aber in die Körper eindringt. Zunächst nimmt man den letztern Theil zwar nur wahr bei einer bestimmten Gattung von Körpern, bei denen, durch welche das eintretende Licht hindurchgehen kann, bei den durchsichtigen Körpern. Indess lässt sich durch den Versuch zeigen, dass eine solche Theilung des Lichtes allgemein bei allen Körpern eintritt, dass zwischen den durchsichtigen und undurchsichtigen Körpern nur ein gradueller Unterschied stattfindet. Wenn man nämlich von einem undurchsichtigen Körper sehr dünne Blättchen darstellt, so werden dieselben durchscheinend

---

1) Eine allgemeinere Behandlung der Reflexion an krummen Flächen und der Brennlinien gibt *Herschel* in seinem On light. I. §. IV und §. V. Ferner *Coddington* a treatise on the reflection and refraction of light, being Part. I of a System of Optics. Cambr. 1829.

oder durchsichtig. So kann man durch ein Blatt dünnen Papieres wenn auch eine Lichtquelle nicht deutlich sehen, so doch ein Mehr oder Minder von Helligkeit wahrnehmen, je nachdem man dasselbe vor eine Lichtquelle oder vor einen dunklern Raum hält, während mehrere auf einander gelegte Blätter einen solchen Unterschied nicht mehr bemerken lassen.

Das Gold ist in gewöhnlichen Fällen ein undurchsichtiger Körper, wenn es aber möglichst fein in dünne Blätter ausgewalzt ist, so wird es durchscheinend, ja selbst durchsichtig, wie Faraday gezeigt hat; ebenso wird Silber durchsichtig, wenn es nach dem Liebig'schen Verfahren in ganz dünnen Schichten auf Glas niedergeschlagen wird.

Ein anderer Grund für die Annahme, dass auch bei den undurchsichtigen Körpern ein Theil des Lichtes in dieselben übergeht, ist die Schwächung des reflectirten Lichtes auch an diesen Körpern. Der Unterschied zwischen der Intensität des einfallenden und reflectirten Lichtes kann nur daher rühren, dass ein Theil des Lichtes in die Körper übergeht.

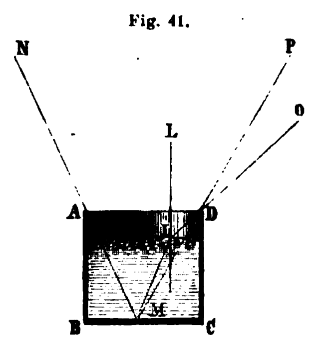
Wir müssen daher schliessen, dass in alle Körper Licht, welches an ihrer Oberfläche ankommt, eindringt, und dass der Unterschied zwischen durchsichtigen und undurchsichtigen Körpern nur darin besteht, dass in die durchsichtigen das Licht ohne merkliche Schwächung bis zu grosser Tiefe eindringen kann, während es in die undurchsichtigen Körper nur bis zu geringer Tiefe eindringt und bald so sehr geschwächt wird, dass es nicht mehr wahrzunehmen ist.

Wir betrachten hier zunächst nur den in durchsichtigen Körpern sich fortpflanzenden Theil des Lichtes.

Fällt das Licht schief auf die Trennungsfläche zweier durchsichtigen Körper, z. B. Luft und Wasser oder Luft und Glas, so pflanzt es sich in den beiden Körpern nicht in derselben Richtung fort, sondern wird an der Grenzfläche gebrochen; der Weg des Lichtstrahles bildet in dem zweiten Körper mit demjenigen des Lichtes in dem ersten Körper einen Winkel.

Wenn man in ein cylindrisches Gefäss mit undurchsichtigen Wänden *ABCD* (Fig. 41) auf dem Boden eine Marke macht, so kann man dieselbe nur sehen, wenn sich das Auge in dem von der Marke ausgehenden durch den Umfang *AB* der Wand begrenzten Strahlenkegel befindet. Wenn man daher das Auge bei *O* hält, so dass eine gerade Linie zum Rande des Gefässes gezogen *OD* den Boden jenseits der Marke trifft, also ganz ausserhalb des Strahlenkegels *PMN* fällt, so ist die Marke *M* dem Auge nicht sichtbar, sie wird von der Wand bedeckt.

Fig. 41.



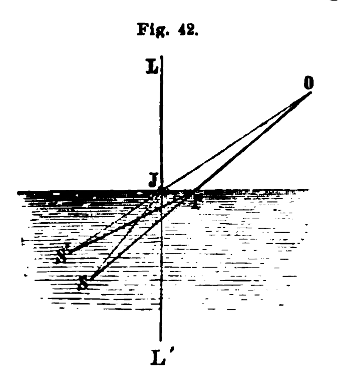
Füllt man nun aber das Gefäss mit Wasser, so wird die Marke in der Richtung *OD* wieder sichtbar, sie erscheint in der Verticalebene *NMP* verschoben. Aus dieser

Verschiebung der Marke schliessen wir, dass der Lichtstrahl *MO* beim Austritt aus dem Wasser in die Luft gebrochen, von seinem geraden Wege abgelenkt ist, so dass er in der durch das Einfallsloth und den Strahl *MD* gelegten Ebene bleibt, ausserhalb des Wassers aber einen grössern Winkel *OJL* mit dem Einfallslothe bildet als im Wasser.

Dass diese Richtungsänderung des Lichtstrahles nur an der Oberfläche des Wassers eintritt, und nicht etwa daher rührt, dass das Licht im Wasser eine krummlinige Bahn besitzt, zeigt uns die Thatsache, dass wir die Marke nicht aus der Stelle gerückt sehen, wenn wir das Auge in das Wasser tauchen.

Eine andere Bestätigung dafür, dass das Licht beim Uebergange aus Luft in Wasser oder aus Wasser in Luft gebrochen wird, gibt uns die bekannte Thatsache, dass ein Stab, den wir schief in Wasser mit ruhiger Oberfläche tauchen, an der Oberfläche des Wassers plötzlich gebrochen erscheint. Das im Wasser befindliche Ende des Stabes erscheint stets in derselben Verticalebene als der ausserhalb des Wassers befindliche Stab, aber der Oberfläche des Wassers näher zu liegen, als es in der That der Fall ist. Der Grund ist die Brechung des Lichtes an der Oberfläche des Wassers; wir verlegen das Stabende in die Richtung, in welcher die von ihm ausgehenden Strahlen das Auge treffen. Befindet sich nun das Auge in *O* am Ende des Stabes, so beweist uns die Thatsache, dass wir das Stabende *S* in *S'* zu sehen glauben, dass die von *S* ausgehenden Strahlen nicht in der Richtung *SO* das Auge treffen, sondern in der Richtung *JO*. In der Luft pflanzt sich das Licht nun geradlinig fort, der Strahl *JO* hat daher das Wasser bei *J* verlassen.

Fig. 42.



Nach *J* hat sich nun von dem Stabende *S* aus der Strahl *SJ* fortgepflanzt. An der Grenzfläche hat sich derselbe daher in der Ebene *SJL* umgebogen, er ist gebrochen, so dass der Winkel *LJO* grösser ist als der Winkel *SJL'*, welchen der Strahl im Wasser mit dem Einfallslothe bildete.

Wenn man nun den Stab *SO* unter verschiedenen Neigungen gegen die Oberfläche des Wassers eintaucht, so findet man auch die Grösse der Knickung, welche der Stab scheinbar bei *P* erfährt, oder den Winkel *S'PO* verschieden. Er wird um so grösser, je geringer, um so kleiner, je grösser die Neigung des Stabes gegen die Wasserfläche ist. Wenn endlich der Stab senkrecht zur Oberfläche des Wassers eingetaucht wird, so erscheint er gar nicht geknickt, das Ende *S* des Stabes liegt in der Verlängerung *OP*.

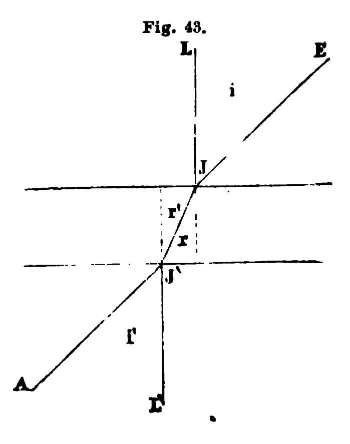
Gehen wir nun von den Winkeln aus, welchen die Strahlen im Wasser oder in der Luft mit dem Einfallslothe bilden, den Winkeln *SJL'* und *OJL*, deren einen wir den Einfallswinkel, den andern den Brechungswinkel nen-

nen, so fragt es sich, ob zwischen diesen beiden eine bestimmte Gesetzmässigkeit besteht.

Es ist nun an sich klar, dass das Licht auf demselben Wege, auf welchem es von S nach O gelangt, auch wenn O leuchtend wäre, nach S gelangen würde, oder dass ein Lichtstrahl OJ, der unter dem Winkel OJL auf die Wasserfläche auftrifft, unter dem Winkel SJL' im Wasser sich weiter fortpflanzt. Um demnach zu untersuchen, ob ein bestimmtes Gesetz die beiden Winkel verknüpft, können wir auch unter bestimmten Winkeln Licht auf eine Wasserfläche fallen lassen und die Winkel messen, unter welchen sich das Licht im Wasser weiter fortpflanzt.

Für die Richtigkeit dieses Verfahrens können wir auch einen experimentellen Beweis führen. Schliessen wir nämlich eine Wasserschicht zwischen ebenen und parallelen Glasplatten ein, und lassen durch diese oder überhaupt durch einen durchsichtigen mit parallelen Ebenen begrenzten Körper Licht hindurchtreten, so zeigt uns die Erfahrung, dass der austretende Strahl dem eintretenden parallel ist, unter welchem Winkel wir auch das Licht auf die Vorderfläche auffallen lassen. Sehen wir durch eine planparallele Glasplatte hindurch, so sehen wir die Gegenstände nicht von ihrer Stelle gerückt. Da wir nun wissen, dass der unter dem Winkel $AJ'L'$ oder i' austretende Strahl (Fig. 43) im Glase einen gewissen andern Winkel r' mit dem Einfallslothe $J'L'$ bildet, da uns ferner dieser Versuch zeigt, dass der Winkel i, welchen der einfallende Strahl mit dem Einfallslothe LJ bildet, gleich ist dem Winkel i', da $EJ \parallel J'A$ und $LJ \parallel L'J'$, und da schliesslich, weil JJ' eine gerade Linie ist, der Winkel r', den der Strahl an der Austrittsstelle mit dem Einfallslothe bildet, gleich ist dem Winkel r, den der gebrochene Strahl an der Eintrittsstelle bildet, so schliessen wir daraus, dass die Brechung gerade so vor sich geht, wenn das Licht aus dem ersten Mittel in das zweite übergeht, als wenn es aus dem zweiten Mittel in das erste übergeht. Die Winkel i und r sind dieselben, wenn das Licht den Weg EJJ' oder den Weg $J'JE$ zurücklegt.

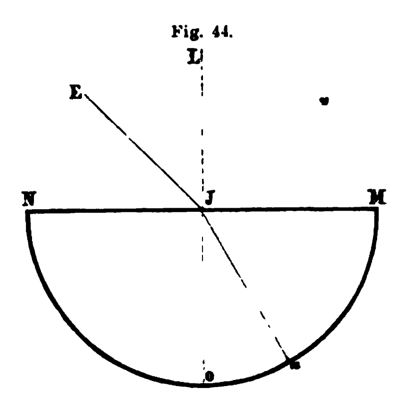
Fig. 43.



Zum Vergleiche der beiden Winkel können wir nun folgendes Verfahren einschlagen. Wir stellen ein Glasgefäss her, dessen Vorderwand aus einer ebenen, dessen Rückwand aus einer kreisförmig gebogenen Glasplatte besteht, z. B. der Hälfte eines Glascylinders, so dass die ebene Glasplatte ein Verticaldurchschnitt durch die Cylinderaxe ist. Die Glasplatte machen wir durch Bekleben mit Papier, bis auf eine kleine verticale Spalte, in ihrer Mitte undurchsichtig. Auf den Halbcylinder kleben wir einen mit einer Theilung versehenen Streifen durchscheinenden Papieres, so dass die auf die

durchsichtige Spalte der ersten Fläche gedachte Senkrechte, das Einfallsloth, verlängert gerade den Nullpunkt der Theilung trifft. Fig. 44 stellt einen Horizontaldurchschnitt dieses Gefässes dar. Bei J ist die verticale Platte durchsichtig, und der Nullpunkt der auf MON geklebten Theilung ist bei O, wo das Loth LJ die cylindrische Wand MON trifft. Wir stellen dann das Gefäss auf eine drehbare Scheibe, so dass die verticale Drehungsaxe gerade durch den durchsichtigen Spalt der vordern Fläche J geht, welche zugleich die Axe des Halbcylinders ist. Diesen Apparat stellen wir dann einem Fenster, durch das wir mittels eines Heliostaten einen Bündel Lichtstrahlen horizontal eintreten lassen, gerade gegenüber, so dass das eintretende Strahlenbündel den Spalt J auf der Vorderfläche trifft. An der drehbaren Scheibe ist ein Zeiger, welcher auf der Theilung eines festen mit der Scheibe concentrischen getheilten Kreises endigt. Wenn die Wandfläche senkrecht auf dem einfallenden Lichtbündel steht, was wir daran erkennen, dass die durchscheinende Theilung, da das Licht bei senkrechter Incidenz von seiner geraden Bahn nicht abgelenkt wird, an ihrem Nullpunkte beleuchtet ist, zeigt der Zeiger der Scheibe auf den Nullpunkt des getheilten Kreises.

Fig. 44.



Drehen wir nun das Gefäss, nachdem es mit Wasser gefüllt ist, mit der Scheibe, so fällt das Licht immer noch auf die vordere durchsichtige Spalte der Gefässwand, aber unter immer andern Einfallswinkeln, die wir direkt an der Theilung des getheilten Kreises ablesen, da die Richtung des Einfallslothes mit dem an der Scheibe befestigten Radius zusammenfällt. Auf der Theilung an der Rückwand sehen wir dann immer andere Theilstriche erleuchtet, und da die Richtung JO diejenige des Einfallslothes ist, gibt uns der Winkel, den der nach dem beleuchteten Theilstriche α (Fig. 44) gezogene Radius $J\alpha$ mit JO bildet, den wir direkt an dem Bogen $O\alpha$ ablesen, den Winkel, den der Lichtstrahl im Wasser mit dem Einfallslothe einschliesst oder den Brechungswinkel.

Stellen wir nun den Versuch an, indem wir die Einfallswinkel EJL vielfach variiren, so sehen wir

1) der gebrochene Strahl liegt ganz in der durch das Einfallsloth und den einfallenden Strahl gelegten Ebene EJL.

2) Die Sinus der Einfallswinkel $EJL = i$ und der Brechungswinkel $OJ\alpha = r$ stehen in einem constanten Verhältniss oder

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n.$$

Diese constante Zahl n, welche angibt, um wie viel mal der Sinus des Einfallswinkels grösser oder kleiner ist als der des Brechungswinkels, nennt man den relativen Brechungsexponenten zwischen dem ersten und dem zweiten Mittel, also hier zwischen Luft und Wasser [1]).

Da nun, wie wir vorhin gesehen haben, Einfalls- und Brechungswinkel in demselben Verhältnisse stehen, wenn das Licht aus dem ersten in das zweite oder aus dem zweiten in das erste Mittel geht, so folgt, dass, wenn der Einfallswinkel in dem Falle r ist und der Brechungswinkel i, dass für den Brechungsexponenten beim Uebertritt des Lichtes aus dem zweiten Mittel in das erste die Relation besteht

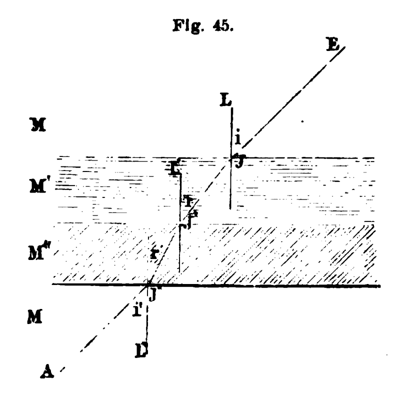
$$\frac{\sin r}{\sin i} = n' = \frac{1}{n}$$

oder der Brechungsexponent aus dem zweiten Mittel in das erste ist der reciproke Werth desjenigen aus dem ersten Mittel in das zweite.

Die Brechungsgesetze gelten mit wenigen im zweiten Abschnitt zu betrachtenden Ausnahmen für alle Körper und für alle Flächen, der numerische Werth des Sinusverhältnisses ist jedoch verschieden für verschiedene Substanzen.

Den Brechungsexponenten aus dem leeren Raum in irgend einen durchsichtigen Körper nennt man den absoluten Brechungsexponenten, und diese Zahl wird als der Brechungsexponent der betreffenden Substanz bezeichnet. Man kann nun das Brechungsverhältniss aus dem leeren Raum in eine Substanz sehr leicht bestimmen, wenn man das des leeren Raumes und der Luft, und das der Luft und der betreffenden Substanz kennt, denn das relative Brechungsverhältniss zwischen zwei Substanzen ist zugleich das reciproke Verhältniss der beiden absoluten Brechungsexponenten. Es folgt das unmittelbar aus der Thatsache, dass Licht, welches durch zwei Schichten verschiedener Substanz mit parallelen Wänden hindurchgetreten ist, parallel mit dem einfallenden Lichte austritt.

Fig. 45.



Nennen wir nämlich den Einfallswinkel EJL an der ersten Fläche i und den Brechungswinkel r, so ist der Einfallswinkel an der zweiten Fläche $JJ'L'$ ebenfalls r. Bezeichnen wir nun den zweiten Brechungswinkel beim Ueber-

---

1) Das Brechungsgesetz in dieser Form wurde zuerst von *Cartesius* aufgestellt in seiner Dioptrik. Leyden 1637. Schon früher war es in einer unbequemern Form von Willibrord Snellius aufgestellt. Man sehe *Wilde*, Geschichte der Optik. I. Band.

tritt des Lichtes aus dem Mittel M' in das Mittel M'' mit r', so ist der Brechungsexponent aus dem Mittel M' in M''

$$n'' = \frac{\sin r}{\sin r'}.$$

Sei nun das Mittel M der leere Raum und der Brechungsexponent aus dem leeren Raume M in M' gleich n, und derjenige aus M in M'' gleich n'. Dann ist

$$n = \frac{\sin i}{\sin r}$$

und da der Winkel $i' = i$ ist, der Brechungsexponent n'

$$n' = \frac{\sin i'}{\sin r'} = \frac{\sin i}{\sin r'}.$$

Daraus folgt dann der angeführte Satz:

$$n'' = \frac{\sin r}{\sin r'} = \frac{n'}{n}.$$

Ist demnach n der absolute Brechungsexponent der Luft und n'' das relative Brechungsverhältniss aus Luft in Wasser, so ist der absolute Brechungsexponent des Wassers n' gleich

$$n' = n \, . \, n''.$$

Ist das relative Brechungsverhältniss aus einem Mittel in ein zweites grösser wie eins, so nennt man das zweite Mittel optisch dichter als das erste, und das erste das optisch dünnere, und zwar ist der Unterschied der optischen Dichtigkeit um so grösser, je mehr der Brechungsexponent von eins verschieden ist.

Aus jenem Versuche folgt nun auch weiter der Satz unmittelbar, dass die Brechung des Lichtes in einem Mittel gerade so erfolgt, wenn das Licht unter dem Winkel i direkt in ein Mittel M'' eintritt, als wenn es schon eine Reihe von Mitteln durchlaufen hat, vorausgesetzt nur, dass der erste Einfallswinkel gleich i war.

§. 16.

Brechung des Lichtes durch Prismen. Wenn das Licht durch ein Mittel mit parallelen Grenzflächen hindurchdringt, wird es nicht aus seiner Richtung abgelenkt, wenn es schliesslich wieder in dasselbe Mittel eintritt, in welchem es sich zuerst bewegte, indem der Brechungsexponent aus dem zweiten in das erste der reciproke Werth des Brechungsexponenten aus dem ersten Mittel in das zweite und deshalb der Winkel, unter dem das Licht austritt, gleich ist dem, unter welchem das Licht auf die erste Fläche auftraf.

Wird aber das Mittel von zwei gegen einander geneigten ebenen Flächen begrenzt, so muss eine Ablenkung eintreten. Denn, wenn die brechenden Flächen, durch welche das Licht in das Mittel eintrat und aus dem Mittel austritt, gegen einander geneigt sind, so sind es auch die Einfallslothe. Der Lichtstrahl, der nun unter dem Winkel i auf der ersten Fläche auftrifft und

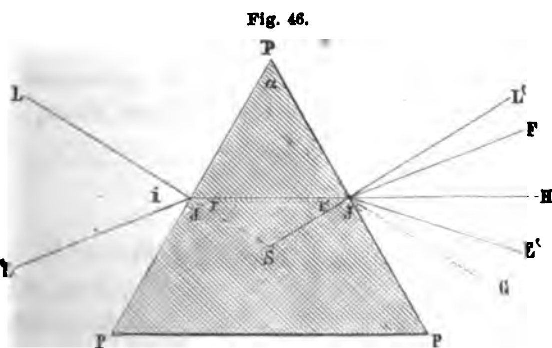
dort unter dem Winkel r gebrochen wird, bildet dann mit dem Einfallslothe an der zweiten Fläche im Innern des Mittels einen andern Winkel r', der Winkel, den der austretende Strahl mit dem Einfallslothe bildet, ist dann ein Winkel i', der von dem Winkel i verschieden ist, so dass der austretende Strahl in einer andern Richtung fortschreitet, als der einfallende.

Die Erfahrung bestätigt nun auch diese Schlüsse, denn wenn wir durch ein Prisma hindurchsehen, so erscheinen die angesehenen Gegenstände von ihrer Stelle verschoben und zwar entweder nach der brechenden Kante, der Kante, in welcher die beiden Flächen, durch welche wir hindurchsehen, sich schneiden, hin oder von ihr fort, je nach der Natur des Mittels, aus welchem das Prisma besteht. Die Verschiebung der Gegenstände ist ferner verschieden je nach dem Einfallswinkel des Lichtes und nach der Grösse des Winkels, welchen die beiden Prismenseiten mit einander einschliessen, dem brechenden Winkel des Prismas.

Kennt man nun den Winkel, unter welchem das Licht auf die erste Prismenfläche auftrifft, sowie das relative Brechungsverhältniss aus Luft in die Substanz des Prismas und den brechenden Winkel, so kann man leicht die Ablenkung, welche das Licht erfährt, berechnen; oder kennt man durch Beobachtung die letztere, so kann man mit Hülfe des brechenden Winkels und Einfallswinkels das Brechungsverhältniss zwischen Luft und der Prismensubstanz erhalten. Es ist die Beobachtung der Ablenkung durch ein Prisma sogar das genaueste Mittel zur Bestimmung der Brechungsexponenten.

Sei nun, um die Ablenkung allgemein zu bestimmen, PPP ein zur brechenden Kante senkrechter Durchschnitt durch das Prisma, und zugleich die Einfallsebene eines das Prisma bei J treffenden Lichtstrahles EJ (Fig. 46). Der brechende Winkel des Prismas sei α und wir wollen die Ablenkung δ ausdrücken durch den Einfallswinkel $EJL = i$ den brechenden Winkel α und den relativen Brechungsexponenten n zwischen der Prismensubstanz und der Luft.

Fig. 46.



Der Weg des Lichtes sei $EJJ'E'$. Ziehen wir durch J' die Linie $J'F$ parallel mit EJ, so ist der Winkel

$$E'J'F = \delta.$$

Nun ist, wenn wir ferner durch J' die Linie $J'G$ parallel dem Einfallslothe LJ der ersten Fläche legen und die Richtung des gebrochenen Lichtstrahles JJ' über J hinaus in $J'H$ verlängern, der Winkel $E'J'F$ gleich

$$E'J'F = GJ'F - GJ'H + E'J'H.$$

Ferner aber ist

$$E'J'H = E'J'L' - HJ'L'$$

und demnach

$$E'J'F = \delta = GJ'F - GJ'H + E'J'L' - HJ'L'.$$

Da nun

$$J'F \parallel EJ$$

und

$$J'G \parallel LJ,$$

so ist

$$GJ'F = i,$$

und da $J'H$ die Verlängerung von JJ', so ist

$$HJ'G = SJJ' = r,$$

dem Brechungswinkel an der ersten Fläche. Der Winkel $E'J'L'$ ist der Winkel, welchen der austretende Lichtstrahl an der zweiten Fläche mit dem Einfallslothe bildet, wir bezeichnen ihn mit i', und der Winkel $HJ'L'$ schliesslich ist gleich dem Winkel $JJ'S = r'$, dem Winkel, unter welchem der Strahl im Prisma die zweite Fläche trifft. Für die Ablenkung δ erhalten wir demnach

$$\delta = i - r + i' - r$$
$$\delta = i + i' - (r + r').$$

Nun ist weiter

$$JSJ' + r + r' = 180^0$$
$$JSJ' + \alpha = 180^0$$

und daraus

$$r + r' = \alpha.$$

Die Summe der beiden Winkel, welche der gebrochene Lichtstrahl im Innern des Prismas mit den beiden Einfallslothen bildet, ist gleich dem brechenden Winkel des Prismas.

Dadurch wird dann

$$\delta = i + i' - \alpha.$$

Die Ablenkung des Strahles ist gleich der Summe der beiden Winkel, welche der Lichtstrahl vor dem Eintritt und nach dem Austritt aus dem Prisma mit den Einfallslothen bildet weniger dem brechenden Winkel des Prismas.

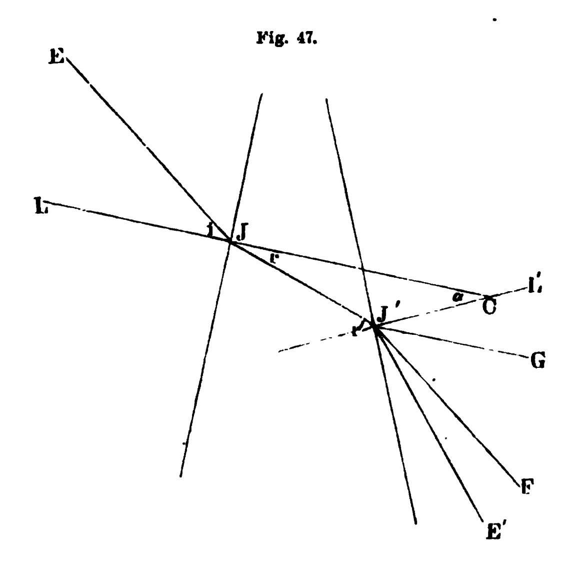
Dieselbe Beziehung zwischen der Ablenkung, dem Einfalls- und Austrittswinkel sowie den beiden Brechungswinkeln besteht auch, wenn der einfallende Strahl in dem Quadranten LJP liegt, nur müssen wir dann den

Winkel i und r, die dann an der andern Seite des Einfallslothes liegen, mit dem negativen Vorzeichen versehen. Man sieht das auch unmittelbar, wenn man wie in Fig. 47 den Gang des Strahles construirt, $EJJ'E'$, und nun durch J'

$J'G \parallel JL$ und $J'F \parallel EJ$

legt. Der Winkel $E'J'F$ ist dann gleich δ, und wir haben

$\delta = EJ'L' - FJ'G - GJ'L'$



Von den drei Winkeln auf der rechten Seite ist nun der erste i', der zweite i und der dritte, den die beiden Einfallslothe mit einander bilden, gleich dem brechenden Winkel α. Somit erhalten wir

$$\delta = i' - i - \alpha.$$

Die Beziehung zwischen α und den beiden Brechungswinkeln erkennen wir unmittelbar, wenn wir LJ über J hinaus verlängern, bis es $J'L'$ in C schneidet. Es ist dann, da $J'CJ = \alpha$,

$$r' = \alpha + r; \; \alpha = r' - r.$$

Um nun i' durch i und den Brechungsexponenten n der Substanz des Prismas auszudrücken, haben wir

$$\sin i' = n \,.\, \sin r' = n \,.\, \sin (\alpha - r)$$

oder

$$\sin i' = n \,.\, (\sin \alpha \,.\, \cos r - \cos \alpha \,.\, \sin r)$$

und ferner

$$\sin r = \frac{\sin i}{n}$$

$$\cos r = \sqrt{1 - \sin^2 r} = \frac{1}{n} \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2 i}$$

woraus

$$\sin i' = \sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos \alpha \sin i.$$

Mit Hülfe dieses durch i, n und α gegebenen Werthes für i' können wir nun für jeden Einfallswinkel die Ablenkung δ berechnen. Man sieht, bei gegebenem brechenden Winkel α des Prismas hängt dieselbe ab von dem Brechungsexponenten n und dem Einfallswinkel i. Sind daher drei von den Grössen α, i, δ, n durch die Beobachtung gegeben, so ist die vierte zu berechnen.

Man wendet daher die Beobachtung der Ablenkung durch ein Prisma von bekanntem brechenden Winkel an, um das Brechungsverhältniss der Prismensubstanz zu erhalten. Vorzugsweise geeignet dazu sind zwei bestimmte Richtungen, in welchen man den Strahl hindurchgehen lässt, da man dann einer direkten Messung des Einfallswinkel überhoben ist; entweder lässt man den Lichtstrahl so durch das Prisma hindurchgehen, dass der Einfallswinkel i gleich ist dem Winkel i', unter welchem der Lichtstrahl das Prisma verlässt, oder man lässt den Strahl die zweite Fläche unter dem Winkel $i' = 0$, in der Richtung des Einfallslothes verlassen.

Ersteres erkennt man daraus, dass der austretende Lichtstrahl in dem Falle das Minimum der Ablenkung erfährt, dass der Winkel δ dann den kleinsten bei dem Prisma möglichen Werth erhält.

Dass dem in der That so ist, lässt sich auf folgende von Fr. Eisenlohr[1] angegebene Weise ableiten. Wie wir sahen, ist allgemein

$$\delta = i + i' - \alpha,$$

der Werth von δ wird deshalb dann ein Minimum werden, wenn die Summe $i + i'$ ihren kleinsten Werth hat, da α eine constante Grösse ist. Diese Summe hat aber dann ihren kleinsten Werth, wenn $\sin(i + i')$ seinen kleinsten Werth hat. Nach dem Brechungsgesetz haben wir nun

$$\sin i = n \, . \, \sin r, \quad \sin i' = n \, . \, \sin r'$$
$$\sin i + \sin i' = n\,(\sin r + \sin r')$$
$$\sin i - \sin i' = n\,(\sin r - \sin r').$$

Die beiden letzten Gleichungen können wir nun nach bekannten trigonometrischen Formeln schreiben

$$\sin {}^1\!/_2\,(i + i') \, . \, \cos {}^1\!/_2\,(i - i') = n \, . \, \sin {}^1\!/_2\,(r + r') \, . \, \cos {}^1\!/_2\,(r - r') \quad . \; . \; . \quad (1)$$
$$\cos {}^1\!/_2\,(i + i') \, . \, \sin {}^1\!/_2\,(i - i') = n \, . \, \cos {}^1\!/_2\,(r + r') \, . \, \sin {}^1\!/_2\,(r - r') \quad . \; . \; . \quad (2).$$

Dividiren wir die erste Gleichung durch die zweite, so erhalten wir

$$\operatorname{tang} {}^1\!/_2\,(i + i') \, . \, \cot {}^1\!/_2\,(i - i') = \operatorname{tang} {}^1\!/_2\,(r + r') \, . \, \cot {}^1\!/_2\,(r - r'),$$

oder auch indem wir die beiden cot auf die andere Seite bringen

$$\operatorname{tang} {}^1\!/_2\,(i + i') . \operatorname{tang} {}^1\!/_2\,(r - r') = \operatorname{tang} {}^1\!/_2\,(r + r') . \operatorname{tang} {}^1\!/_2\,(i - i') \quad . \; . \; . \quad (3).$$

Da nun i und i' die Einfallswinkel sind, zu denen r und r' als Brechungswinkel gehören, so ist immer

$$i + i' > r + r',$$

somit auch

$$\operatorname{tang} {}^1\!/_2\,(i + i') > \operatorname{tang} {}^1\!/_2\,(r + r'),$$

aus Gleichung (3) folgt deshalb auch, dass wenn $i - i'$ oder $r - r'$ von Null verschieden ist

$$\operatorname{tang} {}^1\!/_2\,(i - i') > \operatorname{tang} {}^1\!/_2\,(r - r')$$

1) *Fr. Eisenlohr*, Zeitschrift für Mathematik und Physik von Schlömilch. Bd. XII. p. 434.

und damit

$$i - i' > r - r'$$

sein muss. Aus Gleichung (1) folgt dann aber, da, so lange die letzte Ungleichung besteht,

$$\cos {}^1/_2 (i - i') < \cos {}^1/_2 (r - r'),$$

dass im Allgemeinen

$$\sin {}^1/_2 (i + i') > n \,.\, \sin {}^1/_2 (r + r')$$

sein muss. Der kleinste Werth, den $\sin {}^1/_2 (i + i')$ annehmen kann, ist derjenige, welcher dem Werthe

$$\cos {}^1/_2 (i - i') = \cos {}^1/_2 (r - r') = 1$$

entspricht, denn dann ist

$$\sin {}^1/_2 (i + i') = n \,.\, \sin {}^1/_2 (r + r').$$

Dieses Minimum tritt also ein, wenn $i = i'$ und damit $r = r'$ ist, somit tritt der kleinste Werth, den $i + i'$ annehmen kann, und damit die kleinste Ablenkung δ dann ein, wenn der Strahl so durch das Prisma hindurchgeht, dass der Eintrittswinkel gleich ist dem Austrittswinkel.

In dem Falle ist somit

$$\delta = 2i - \alpha$$

$$i = \frac{\delta + \alpha}{2},$$

oder der Einfallswinkel ist gleich der halben Summe des brechenden Winkels und der Ablenkung. In dem Falle ist dann gleichzeitig

$$r = r'$$

und da

$$r + r' = \alpha,$$

so folgt

$$r = \frac{\alpha}{2}.$$

Für den Brechungsexponenten n erhalten wir dann

$$n = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin \frac{\delta + \alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Die Beobachtung der Ablenkung und des brechenden Winkels des Prismas liefert uns also sofort den Brechungsexponenten. Dasselbe ist der Fall, wenn wir das Prisma so aufstellen, dass von den durch das Prisma durchtretenden Strahlen nur diejenigen beobachtet werden, welche senkrecht zu der letzten Fläche austreten, wenn wir also etwa ein Prisma so vor ein Rohr stellen, dass die Axe senkrecht zur letzten Prismenfläche steht, und dann durch das Rohr und Prisma nach einer Lichtquelle sehen und die Ablenkung messen. In dem Falle ist $i' = 0$, deshalb

$$\delta = i - \alpha$$

und

$$i = \alpha + \delta.$$

Ist nun $i' = 0$, so ist auch $r' = 0$ und demzufolge

$$r = \alpha;$$

zur Bestimmung des Brechungsexponenten haben wir demzufolge

$$n = \frac{\sin(\delta + \alpha)}{\sin \alpha}.$$

Kennt man den Brechungsexponenten und den brechenden Winkel des Prismas, so kann man sofort die Werthe von i bestimmen, damit die beiden besprochenen Fälle eintreten. Damit wir das Minimum der Ablenkung erhalten, muss

$$\sin i = n \,.\, \sin \frac{\alpha}{2},$$

damit die Strahlen senkrecht aus der zweiten Prismenfläche austreten

$$\sin i = n \,.\, \sin \alpha$$

sein. Letztere Gleichung lässt erkennen, dass ein solcher Durchgang des Lichtes bei einigermassen grossem Brechungsexponenten nur möglich ist, wenn der brechende Winkel hinreichend klein ist, es muss, da $\sin i$ stets kleiner als 1 sein muss,

$$\sin \alpha < \frac{1}{n}.$$

Misst man ausser der Ablenkung auch den Einfallswinkel, so liefert uns die Gleichung (3)

$$\operatorname{tang} \frac{i + i'}{2} \cdot \operatorname{tang} \frac{r - r'}{2} = \operatorname{tang} \frac{r + r'}{2} \cdot \operatorname{tang} \frac{i - i'}{2}$$

ein Mittel, um für beliebige Incidenz i den Brechungswinkel r und somit den Brechungsexponenten n zu berechnen. Die einzelnen Winkelsummen und Differenzen in jener Gleichung können wir nämlich schreiben

$$i + i' = \delta + \alpha \qquad i - i' = 2i - (\delta + \alpha)$$
$$r - r' = 2r - \alpha \qquad r + r' = \alpha$$

und indem wir diese Ausdrücke einsetzen, wird

$$\operatorname{tang} \frac{\delta + \alpha}{2} \cdot \operatorname{tang} \left(r - \frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tang} \left(i - \frac{\delta + \alpha}{2}\right)$$

oder

$$\operatorname{tang} \left(r - \frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tang} \left(i - \frac{\delta + \alpha}{2}\right) \cdot \cot \cdot \frac{\delta + \alpha}{2}.$$

Daraus berechnet man r und aus diesem und dem bekannten i dann n.

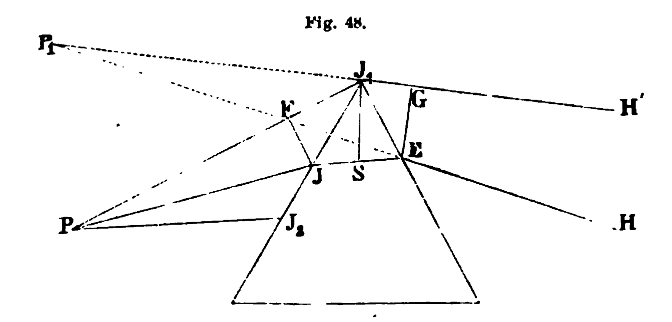
Da indess diese Methode ziemlich ausgedehnte Rechnungen verlangt, und wie wir später sehen werden, nicht genauer ist, als die Minimummethode, so wird man im Allgemeinen bei Ausführung von Bestimmungen letztere vorziehen.

§. 17.

Abbildung von Punkten und Linien durch ein Prisma. Im vorigen §. haben wir nur den Gang eines Strahles durch das Prisma verfolgt, setzen wir jetzt voraus, es treffe in der Einfallsebene des vorhin betrachteten Strahles ein sehr schmales aus dem Punkte P kommendes Strahlenbündel PJJ_1 auf das Prisma, von dem der Strahl PJ_1 so nahe der brechenden Kante durch das Prisma trete, dass wir den Punkt J_1 Fig. 48 als einen Punkt der brechenden Kante ansehen können. Bezeichnen wir den Einfallswinkel des Strahles PJ mit i, den Austrittswinkel mit i', so erhalten wir für die Ablenkung des austretenden Strahles EH

$$\delta = i + i' - \alpha.$$

Fig. 48.



Bezeichnen wir die entsprechenden Winkel des Strahles PJ_1 mit $i + \Delta i$ und $i' + \Delta i'$, so wird der Werth von $\Delta i'$ aus der Gleichung des vorigen Paragraphen

$$\sin i' = n \,.\, \sin(\alpha - r)$$

erhalten, indem wir haben

$$\sin(i' + \Delta i') = n \,.\, \sin(\alpha - (r + \Delta r)),$$

worin Δr die dem Werthe Δi entsprechende Aenderung des Brechungswinkels bedeutet. Entwickeln wir diese Sinus, so wird, wenn wir Δi und Δr so klein voraussetzen, dass wir für ihre Cosinus 1 und für die Sinus die Bögen setzen können,

$$\cos i' \,\Delta i' = -n \,.\, \cos(\alpha - r)\,\Delta r.$$

Aus der Gleichung

$$\sin i = n \,.\, \sin r$$

folgt dann

$$\sin(i + \Delta i) = n \,.\, \sin(r + \Delta r)$$

$$\cos i \,\Delta i = n \cos r \,\Delta r$$

$$\Delta r = \frac{1}{n} \cdot \frac{\cos i}{\cos r} \cdot \Delta i,$$

und indem wir diesen Werth in die Gleichung für $\Delta i'$ einsetzen und für $\alpha - r$ das ihm gleiche r' schreiben

$$\Delta i' = -\frac{\cos r' . \cos i}{\cos i' . \cos r} \cdot \Delta i.$$

Aus diesem Werthe von $\Delta i'$ folgt, dass wenn der Einfallswinkel des zweiten Strahles grösser ist als der des zuerst betrachteten, Δi also positiv ist, der Austrittswinkel $i' + \Delta i'$ kleiner ist als i', ist dagegen der Eintrittswinkel des zweiten Strahles kleiner, würde er in der Richtung PJ_2 das Prisma treffen, somit Δi negativ sein, so ist $i' + \Delta i'$ grösser als i'. Daraus folgt dann, dass sich jedenfalls die beiden Strahlen PJ und PJ_1 rückwärts verlängert in einem Punkte P_1 schneiden. Den Abstand $P_1E = f$ dieses Punktes von der zweiten Prismenfläche können wir auf folgende Weise erhalten. Ziehen wir $JF \perp PJ_1$, $EG \perp J_1H'$, $J_1S \perp JE$, so wird

$$\frac{EG}{EP_1} = \sin EP_1G = \sin(-\Delta i') = -\Delta i'$$

$$\frac{JF}{JP} = \sin JPF = \sin \Delta i = \Delta i,$$

somit, wenn wir $JP = a$ setzen,

$$\frac{EP_1}{JP} = \frac{f}{a} = -\frac{EG}{JF} \cdot \frac{\Delta i}{\Delta i'} = \frac{EG}{JF} \cdot \frac{\cos i' . \cos r}{\cos r' . \cos i}.$$

Nun ist ferner

$$EG = J_1E \cdot \sin EJ_1G = J_1S \cdot \frac{\sin EJ_1G}{\sin J_1ES}$$

$$JF = JJ_1 \cdot \sin JJ_1F = J_1S \cdot \frac{\sin JJ_1F}{\sin J_1JS},$$

somit

$$f = a \cdot \frac{\cos i' \cos r}{\cos r' \cos i} \cdot \frac{\sin EJ_1G . \sin J_1JS}{\sin J_1ES . \sin JJ_1F}.$$

Von den 4 letzten Winkeln ist nun

$$EJ_1G = 90 - (i' - \Delta i'),\ \sin EJ_1G = \cos(i' - \Delta i')$$
$$JJ_1F = 90 - (i + \Delta i),\ \sin JJ_1F = \cos(i + \Delta i)$$
$$J_1JS = 90 - r,\ \sin J_1JS = \cos r$$
$$J_1ES = 90 - r',\ \sin J_1ES = \cos r',$$

demnach

$$f = a \cdot \frac{\cos^2 r . \cos i' . \cos(i' - \Delta i')}{\cos^2 r' . \cos i . \cos(i + \Delta i)}.$$

Bei dem vorausgesetzten kleinen Werthe von Δi und $\Delta i'$ begehen wir nun nur einen verschwindend kleinen Fehler, wenn wir den Quotienten

$$\frac{\cos(i' - \Delta i')}{\cos(i + \Delta i)} = \frac{\cos i' + \sin i' \Delta i'}{\cos i - \sin i \Delta i} = \frac{\cos i'}{\cos i}$$

setzen, denn der Quotient wird dadurch, dass wir im Zähler und Nenner die sehr kleinen Glieder fortlassen, nur unendlich wenig geändert. Dann aber erhalten wir

$$f = a \cdot \frac{\cos^2 r . \cos^2 i'}{\cos^2 r' . \cos^2 i}.$$

Für ein derartiges unendlich schmales Strahlenbündel folgt somit, dass alle in derselben Einfallsebene das Prisma treffenden Strahlen nach allen Brechungen das Prisma so verlassen, als kämen sie von einem Punkte her, der an derselben Seite des Prismas liegt als der wirklich leuchtende Punkt, und dessen Abstand von der zweiten Prismenfläche abhängt von der Entfernung des leuchtenden Punktes von der ersten Prismenfläche und von dem Winkel i, unter welchem die mittlern Strahlen das Prisma treffen.

Haben wir anstatt eines leuchtenden Punktes P eine leuchtende der brechenden Kante des Prismas parallele Linie, von der jeder Punkt nur in seiner Einfallsebene ein schmales Strahlenbündel auf das Prisma sendet, so wird für jeden Punkt der Linie die vorige Ableitung gelten, es wird also eine solche leuchtende Linie durch ein Prisma betrachtet von ihrer Stelle verschoben erscheinen, oder die Strahlen treten aus dem Prisma hervor, als kämen sie von einer Linie, deren Projection auf eine zur brechenden Kante senkrechte Ebene P_1 ist, wenn die Projection der leuchtenden Linie P Fig. 48 ist.

Eine solche leuchtende Linie können wir mit grosser Annäherung herstellen, wenn wir ein Bündel Sonnenstrahlen durch einen engen der brechenden Kante des Prismas parallelen Spalt gehen lassen, dessen Länge derjenigen der brechenden Kante ungefähr gleich ist.

Sehr viel verwickelter werden die Erscheinungen, wenn die von einem Punkte der Linie ausgehenden Strahlen nicht nur in derselben zur brechenden Kante senkrechten Ebene liegen; auch dann entwirft das Prisma ein virtuelles Bild der Linie, dieselbe ist aber gekrümmt, wenn die leuchtende Linie gerade ist und zwar so, dass sie der brechenden Kante ihre concave Seite zuwendet.

Da man nun den von uns betrachteten einfachen Fall vollständig nicht realisiren kann, so erscheinen im Allgemeinen die Bilder von Linien stets gekrümmt. Es würde indess zu weit führen, diesen allgemeinern Fall näher zu untersuchen [1]).

Abgesehen von der Krümmung der Linien können wir aber auch dann die obigen Gleichungen für die Entfernung der Bilder anwenden. Dieselben zeigen, dass im Allgemeinen der Abstand f von dem Abstande a verschieden ist, dass in einem Falle sogar, wenn der Einfallswinkel $i = 90^0$ ist, die Strahlen also das Prisma mit streifender Incidenz treffen, f für jedes a gleich unendlich wird, also ein paralleles Strahlenbündel das Prisma verlässt. Ist a selbst unendlich, so ist nach der Gleichung auch f unendlich, ein das Prisma treffendes paralleles Strahlenbündel verlässt dasselbe ebenfalls als paralleles Bündel.

1) Man sehe darüber: *Reusch,* Poggend. Annal. Bd. CXVII. p. 241. *Dittscheiner,* Sitzungsberichte der Wiener Akademie. LI. p. 368.

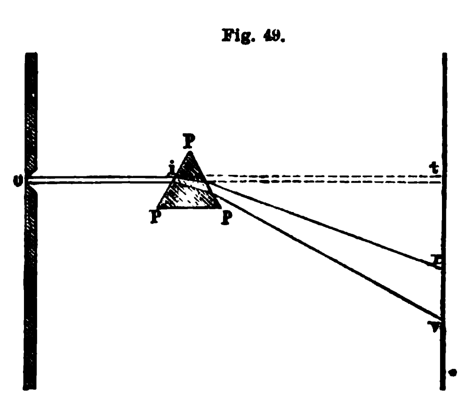
Nur für einen Einfallswinkel ist bei endlichem a der Abstand $f = a$, nämlich, wenn i der Einfallswinkel für das Minimum der Ablenkung ist. Denn dann ist $i = i'$, $r = r'$, der Quotient, mit welchem a in der Gleichung multiplicirt ist, wird also gleich 1.

Anwendungen dieser Sätze werden wir demnächst kennen lernen.

§. 18.

Zerstreuung des Lichtes. Lassen wir nun auf ein Prisma durch eine enge Oeffnung ein Bündel paralleler Lichtstrahlen auffallen, so zeigt sich das austretende Licht ganz anders, als wir es nach dem Bisherigen erwarten sollten. Bringen wir in dem Fensterladen eines sonst dunkeln Zimmers eine kleine Oeffnung an, und lassen mit Hülfe eines Heliostaten ein Bündel Sonnenstrahlen in das Zimmer horizontal einfallen, so zeigt sich auf einem dem Fenster senkrecht zu den eintretenden Strahlen gegenüber gestellten Schirme ein kleines rundes Sonnenbildchen. Bringt man dann nahe bei der Oeffnung in den Weg der Lichtstrahlen ein Prisma, dessen brechende Kante horizontal ist, so an, dass der eintretende Lichtstrahl das Minimum der Ablenkung erfährt, so sollte nach unsern bisherigen Betrachtungen auf dem Schirme wiederum ein kleines Bildchen der Sonne entstehen, nur an einer andern Stelle, und zwar, wenn wir ein Prisma anwenden, dessen Brechungsexponent grösser ist als eins, und die brechende Kante nach oben gerichtet ist, nach unten gegen das einfallende Licht verschoben. Das Bild dürfte, da sämmtliche Strahlen des einfallenden Lichtes nahezu unter dem gleichen Winkel auf das Prisma auffallen, also der Winkel i für alle fast denselben Werth hat, nur eine geringe Abweichung von der Kreisgestalt zeigen, es müsste ein einfach abgelenktes Bildchen der Sonne sein. Statt dessen sehen wir aber auf dem Schirme einen beleuchteten Streifen, als ein in der Einfallsebene sehr in die Länge gezogenes Bild der Sonne, welches um so länger wird, je weiter der Schirm von dem Prisma entfernt ist. Dieses Bild rv (Fig. 49) hat zugleich eine ganz andere Beschaffenheit als das Bildchen t, welches bei ungestörter Fortpflanzung des einfallenden Lichtbündels auf dem Schirme entsteht. Letzteres ist ein weisser runder Fleck; das in der Einfallsebene in die Länge gezogene Bild rv erscheint dagegen in den verschiedensten Farben, die, vorausgesetzt dass die Oeffnung o nur klein ist, in allmählichen Abstufungen in einander übergehen. An dem obern Ende des Streifens zunächst der Stelle t, wo das nicht abgelenkte Bild

Fig. 49.



der Sonne entstanden wäre, ist der Streifen tief roth gefärbt, die rothe Färbung wird gegen die Mitte des Bildes zu allmählich heller und geht in Orange über, weiter verliert sich der rothe Ton des Orange immer mehr und die Färbung wird rein gelb. Auf die gelbe Färbung folgt grün und hierauf anfangs noch mit grün gemischt, allmählich immer reiner werdend, ein helles Blau. Dieses wird immer dunkler und schliesslich ein tiefes Indigo. Noch etwas weiter tritt zum Blau wieder ein rother Ton, so dass das Ende *v* dieses Streifens violett gefärbt ist. (Man sehe Tafel I.)

Diesen Farbenstreifen nennt man das Spectrum. Unsere Sprache unterscheidet in demselben nur diese sieben Farben, roth, orange, gelb, grün, blau, indigo, violett, indess unterscheidet das Auge zugleich alle Uebergänge und die verschiedensten Töne dieser Färbungen, für welche die Sprache keine besondern Namen hat.

Dieser Versuch zeigt uns somit, dass das auffallende Bündel paralleler Strahlen weissen Lichtes das Prisma nicht wieder als ein Bündel paralleler Strahlen verlässt, sondern dass die austretenden Strahlen über einen grössern Raum zerstreut und durch diese Zerstreuung zugleich gefärbt werden. Es sind nun zwei Möglichkeiten vorhanden, welche diese eigenthümliche Erscheinung hervorrufen können, entweder ist sie Folge einer specifischen Einwirkung des Prismas auf das Licht, oder sie wird dadurch hervorgebracht, dass diese einzelnen Strahlen, welche im Spectrum in der Einfallsebene neben einander gelegt sind, im einfallenden Lichte schon vordanden sind, dass sie aber verschieden brechbar sind, und dass sie deshalb nach dem Austritte aus dem Prisma verschieden stark abgelenkt werden. Diese Möglichkeit ergibt sich unmittelbar aus dem vorigen Paragraphen, denn wir sahen, die Ablenkung eines Lichtstrahles hängt bei gegebenem Einfallswinkel und bei einem Prisma von gegebenem brechenden Winkel nur ab von dem Brechungsexponenten n. Da nun das Spectrum nur in der Einfallsebene in die Länge gezogen ist, seine Breite aber genau derjenigen des einfallenden Strahlenbündels gleich ist, so ist es möglich, dass eine verschiedene Brechbarkeit der im Sonnenlichte zugleich vorhandenen Strahlen diese Erscheinung hervorruft. Dann würde aus dieser Erscheinung zu folgern sein, einmal, dass Licht verschiedener Farbe bei ein und derselben Substanz eine verschiedene Brechbarkeit besitzt und weiter, dass in dem scheinbar einfachen weissen Sonnenlicht Licht der verschiedensten Brechbarkeit, der verschiedensten Farbe enthalten ist.

Schon Newton, der die Farbenerscheinungen bei Brechung des Lichtes durch ein Prisma gewissermassen zum ersten Male beobachtete, gibt in seiner Optik[1]) die entscheidendsten Beweise für die Richtigkeit der letztern Annahme, er wies nach, dass es nicht eine specifische Einwirkung des Prismas auf das Licht ist, welches die Farben erzeugt, sondern dass in der That Licht ver-

---

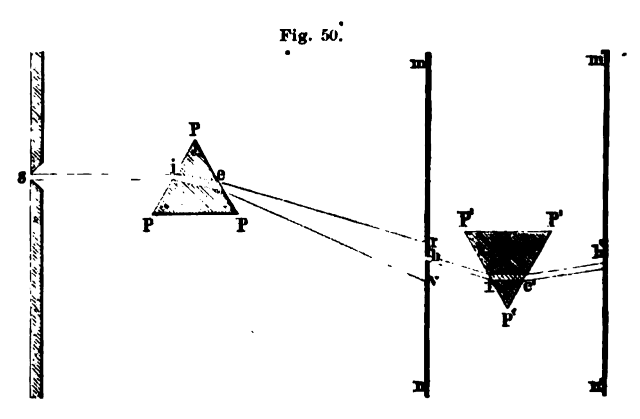
1) *Newton,* Optice liber I. pars I. Ausgabe von Samuel Clark. Lausannae et Genevae 1740.

schiedener Farbe einen verschiedenen Grad der Brechbarkeit besitzt, und dass das Spectrum Folge ist der verschiedenen Ablenkung des im Sonnenlichte enthaltenen farbigen Lichtes.

Dass das Prisma nicht durch eine besondere Einwirkung auf das Licht die Farben erzeugt, beweist zunächst der Umstand, dass es auf die Natur und Folge der Farben, welche uns das Spectrum darbietet, durchaus ohne Einfluss ist, aus welcher Substanz das Prisma besteht, vorausgesetzt, dass dieselbe durchsichtig und farblos ist. Zwar ändert sich das Spectrum mit dem Prisma, jedoch nur darin, dass dasselbe länger oder kürzer ist, und dass die Länge der einzelnen Farben etwas verschieden sein kann. Die auftretenden Farben und ihre Folge sind aber bei allen Prismen dieselben. Wenn nun die Farben durch das Prisma erst erzeugt würden, so wäre diese Unveränderlichkeit des Spectrums schwer zu erklären.

Dass Licht verschiedener Farbe verschieden brechbar ist, hat Newton[1]) durch folgenden Versuch auf das überzeugendste dargethan. Das durch eine schmale Spalte in das dunkele Zimmer eindringende Bündel paralleler Lichtstrahlen traf auf ein Prisma *PPP* (Fig. 50). In dem Schirme *mn*, wel-

Fig. 50.



cher das durch das Prisma hervorgerufene Spectrum auffing, befand sich eine kleine runde Oeffnung. Durch diese Oeffnung trat dann in der Richtung *bi'* ein Lichtstrahl von der Farbe, welche gerade an der Stelle der Oeffnung sich befand. Sah man durch die Oeffnung in der Richtung des austretenden Lichtstrahles, so erblickte man ein glänzendes Bild der Sonne von der Farbe des Lichtes. Lässt man den Lichtstrahl, welcher durch die Oeffnung *b* hindurchtritt, auf ein anderes Prisma *P'P'P'* fallen, so wird er in demselben gebrochen und in der Richtung *bi'e'b'* abgelenkt. Er wird aber nicht weiter in ein Farbenband, in ein Spectrum *rv* verwandelt, sondern erscheint als einfacher Fleck von der Farbe des auf das Prisma *P'P'P'* auftreffenden Lichtstrahles.

1) A. a. O. experim. 6. p. 30.

Es folgt daraus, dass in einem Prisma nur das weisse Licht in ein solches Spectrum zerlegt wird, nicht aber das einfarbige, und dass das im Spectrum neben einander gelegte Licht bei nochmaliger Brechung in einem Prisma nicht weiter zerstreut werden kann.

Wenn man nun aber durch Drehung des Prismas *PPP* um eine der brechenden Kante parallele Axe den Einfallswinkel des Lichtes ändert, so wird dadurch auch die Ablenkung eine andere, und dadurch werden an der Oeffnung *b* des Schirmes *mn* allmählich die verschiedenen Farben des Spectrums vorüber geführt. Lässt man nun das Prisma *P′P′P′* an seiner Stelle, so fallen dadurch auch nach und nach Strahlen aller Farben in der Richtung *bi′*, also unter demselben Einfallswinkel auf das Prisma *P′P′P′*. Bemerkt man nun auf dem zweiten Schirme *m′n′* die Stelle, wo z. B. der rothe Fleck erscheint, wenn gerade der rothe Strahl in der Richtung *bi′* auf das Prisma fällt, so sieht man, wenn, wie es in der Zeichnung angenommen, die brechende Kante des zweiten Prismas nach unten gerichtet ist, dass die violetten Strahlen viel stärker abgelenkt werden als die rothen, dass der violette Fleck viel höher liegt als die Stelle, an welcher vorher der rothe Fleck erschien. Die übrigen Farben fallen zwischen beide, zunächst dem Roth orange, darüber gelb und so fort, und der tiefblaue mit Indigofarbe gefärbte Fleck unmittelbar unter dem violetten.

Dieser von Newton als Experimentum crucis bezeichnete Versuch beweist auf das entschiedenste, dass die verschieden gefärbten Lichtstrahlen eine verschiedene Brechbarkeit besitzen.

Wenn das Spectrum Folge einer Einwirkung des Prismas auf das Sonnenlicht wäre und nicht durch die verschiedene Brechbarkeit des im Sonnenlicht enthaltenen farbigen Lichtes entstände, müsste das Spectrum, wenn es auf ein Prisma mit verticaler brechender Kante fallen gelassen wird, durch dasselbe ebenso sehr in die Breite gezogen werden, als das Sonnenbildchen durch das erste Prisma in die Länge gezogen war. Der Versuch[1]) zeigt aber, dass die Breite des Spectrums nicht merklich geändert wird, sondern dass es nur verschoben und gegen das erste Spectrum geneigt wird.

Ist *RV* (Fig. 51) das Spectrum, wie es durch das Prisma mit horizontaler brechender Kante hervorgerufen wird, so wird es in das Spectrum *R′V′* verwandelt, wenn man die aus dem ersten Prisma austretenden Strahlen mit gleichem Einfallswinkel auf ein Prisma mit verticaler brechender Kante fallen lässt, dessen brechender Winkel dem des ersten Prismas an Grösse gleich ist. Die Breite des Farbenbildes ist ungeändert geblieben, nur ist jede Farbe seitlich verschoben, das Roth am wenigsten, das Violett am meisten und zwar, wie man sieht, wenn man das Spectrum durch das Prisma mit verticaler brechender Kante hervorruft, um so viel mehr seitlich verschoben als das Roth, als die Länge des horizontalen Spectrums betragen würde. Das zweite

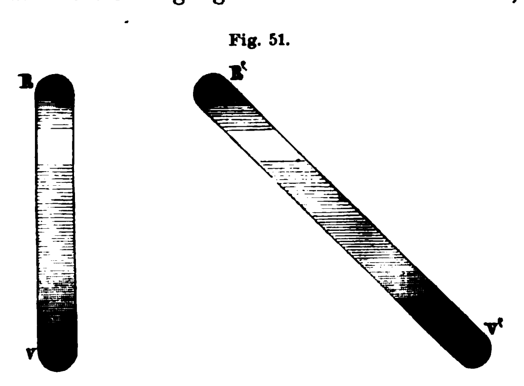
1) A. a. O. lib. I. pars I. exper. 5. p. 23.

Prisma bringt also gar keine Veränderung in den Farben hervor, die stärkere Ablenkung des Violetten beträgt aber gerade so viel, wie die Differenz der Ablenkungen zwischen roth und violett im ersten Spectrum.

Der Versuch zeigt die stärkere Brechbarkeit des violetten Lichtes, die verschiedene Brechbarkeit des verschieden gefärbten Lichtes ebenso deutlich als das erwähnte Experimentum crucis.

Ohne die mannigfachen andern Versuche zu betrachten, welche Newton zur Vervielfältigung dieses Beweises anstellte[1]), werden wir Newton's Schluss beipflichten, dass bei jedem besondern Lichtstrahle, sobald derselbe an der Grenzfläche zweier Mittel gebrochen wird, der Sinus des Einfallswinkel zu dem des Brechungswinkel in einem constanten Verhältnisse steht, so lange die beiden Mittel und der einfallende Strahl dieselben sind, dass aber das Verhältniss sich nicht nur mit den Mitteln, sondern auch mit der Farbe der einfallenden Strahlen ändert. Oder es gibt so viele Arten oder Verschiedenheiten von Licht, als sich in dem Spectrum, welches aus einem einfallenden weissen Strahle sich bildet, verschieden gefärbte Strahlen finden. Die verschiedene Brechbarkeit ist somit ein Kennzeichen der verschiedenen Qualität des Lichtes, und die Zerstreuung des Lichtes rührt daher, dass in dem weissen Lichte die verschiedenen Lichtarten ebenso enthalten sind, wie in einem Accorde die verschiedenen Töne.

Fig. 51.



§. 19.

Zusammensetzung des weissen Lichtes aus farbigem. Um den Beweis vollständig zu führen, dass es nur die verschiedene Brechbarkeit der verschiedenen im weissen Lichte enthaltenen Lichtarten ist, welche das Spectrum erzeugt, genügt es nicht, gezeigt zu haben, dass das farbige, aus dem weissen entstandene Licht verschieden brechbar ist, da dann immer noch der Einwurf möglich ist, dass diese verschiedene Brechbarkeit erst Folge des Durchganges durch das Prisma sei, und dass daher die Entstehung des Spectrums dennoch einer besondern Einwirkung des Prismas zugeschrieben werden müsse. Wir müssen weiter noch nachweisen, dass die aus dem Prisma hervorgehenden Farben wieder zu weiss zusammengesetzt werden können. Auch hierfür hat bereits Newton[2]) die überzeugendsten Beweise geliefert, er

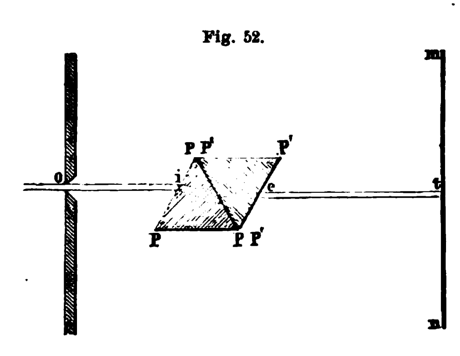
1) Man sehe *Wilde*, Geschichte der Optik. II. Bd.

2) *Newton*, Optice. Man sehe *Wilde*, Geschichte der Optik. Bd. II. Berlin 1843.

hat gezeigt, dass die Zusammenwirkung aller Farben den Eindruck des Weissen macht, dass aber die Mischung nur eines Theiles der Farben eine andere als die weisse Farbe erzeugt. Die Versuche lassen sich auf die verschiedenste Art anstellen.

Wenn man zwei aus derselben Substanz mit gleichem brechenden Winkel hergestellte Prismen so zusammenstellt (Fig. 52), dass ihre brechenden Kanten entgegengesetzt, die eine oben, die andere unten, aber beide horizontal liegen, so tritt aus der letzten Fläche des zweiten Prismas ein auf die Vorderfläche des ersten fallendes Bündel paralleler weisser Lichtstrahlen nicht als ein divergirendes Büschel verschiedenfarbiger Lichtstrahlen, sondern als ein paralleles Bündel weisser Lichtstrahlen. Es zeigt sich auf dem Schirme *mn* bei *t* nicht ein Spectrum, sondern ein weisses Bild der Oeffnung *o*.

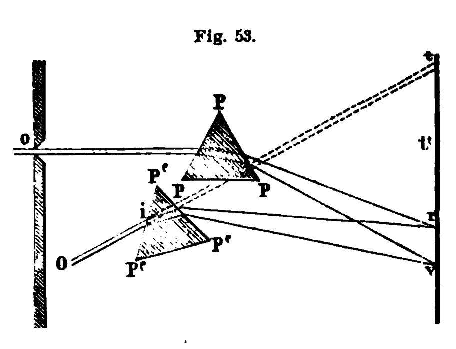
Fig. 52.



Da nun jedes Prisma ein Spectrum erzeugt, so traten aus dem ersten offenbar die farbigen Strahlen getrennt hervor, so dass der violette Strahl am meisten, der rothe am wenigsten nach unten abgelenkt war. In dem zweiten Prisma wird nun jeder Strahl wieder ebenso stark nach oben abgelenkt, wie er in dem ersten nach unten hin abgelenkt war; alle Strahlen treten also nach *et* und zwar parallel mit *oi* aus dem zweiten Prisma hervor. Da nun in *t* ein ungefärbtes Bild der Oeffnung entsteht, so zeigt der Versuch, dass durch das Zusammenwirken aller Farben wiederum Weiss entsteht. Bringt man in den Weg der Strahlen *et* noch ein drittes Prisma, so erzeugt dieses gerade so ein Spectrum, wie es das einzelne Prisma *PPP* oder *P'P'P'* gethan haben würde.

Statt dieser Anordnung der beiden Prismen kann man auch folgende anwenden. Ruft man in der vorhin beschriebenen Weise durch ein Prisma *PPP* ein Spectrum hervor (Fig. 53) und betrachtet dasselbe durch ein zweites Prisma *P'P'P'*, welches so gestellt ist, dass ein vom Auge *O* ausgehendes Strahlenbündel *Oi* an derselben Stelle *rv* des Schirmes ein Spectrum erzeugen würde, so sieht man nicht mehr das Spectrum *rv*, sondern bei *t* in der Richtung *Oi* ein einfach weiss gefärbtes Bild der Sonne, wie es ohne Prisma bei *t'* sich gezeigt hätte.

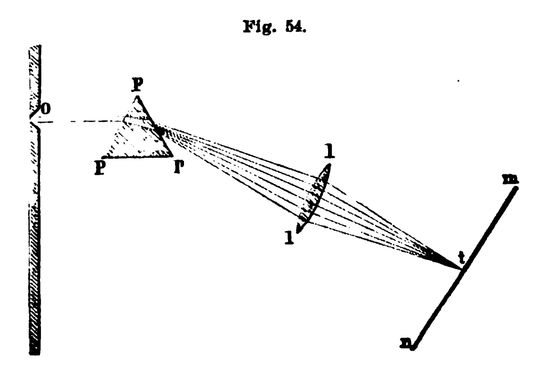
Fig. 53.



Da ein vom Auge *O* ausgehender Strahl so gebrochen würde, dass er aus dem Prisma austretend bei *rv* ein Spectrum von derselben Grösse *rv* erzeugen würde, so folgt nach dem schon mehrfach erwähnten Gesetze der Reciprocität, dass die von dem Spectrum *rv* aus auf das Prisma *P'P'P'* treffenden Strahlen alle so abgelenkt werden, dass sie in der Richtung *iO* austreten. Da nun das Auge dann in der Richtung *Oi* nicht mehr ein Farbenbild, sondern ein weisses Bild der Oeffnung *O* sieht, so müssen wir aus diesem Versuche schliessen, dass durch das Zusammenwirken aller Farben im Auge der Eindruck des Weissen entsteht.

Die Vereinigung aller Strahlen zu weiss kann noch durch einen andern Versuch gezeigt werden, der auf der demnächst zu betrachtenden Eigenschaft der Linsen beruht, alle auf sie fallenden parallelen Strahlen gleicher Brechbarkeit in einen Punkt zu vereinigen. Lässt man durch eine kleine kreisförmige Oeffnung Sonnenlicht auf ein Prisma *PPP* (Fig. 54) fallen, und fängt man das aus dem Prisma austretende zerstreute Licht auf einer achromatischen Linse *ll* auf, so erhält man in einem gewissen Abstande von der Linse auf einem Schirme einen kleinen weissen Kreis. Die auf eine solche Linse auffallenden Strahlen werden alle in einem Punkte vereinigt; hält man nun den Schirm an die Stelle des Vereinigungspunktes, so erhält man auf demselben ein weisses Bild der Sonne. Rückt man der Linse näher, so liegen die Strahlen noch zum Theile neben einander, man erhält ein Spectrum, als wenn die Linse nicht da wäre, nur etwas verwaschen, und entfernt man den Schirm weiter, so erhält man ein umgekehrtes Spectrum, ein Beweis, dass sämmtliche Strahlen bei *t* sich kreuzten.

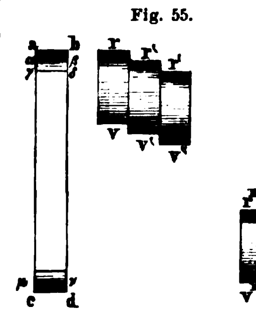
Fig. 54.



Noch auf eine andere Art können wir die Entstehung des Weissen aus dem Zusammenwirken der prismatischen Farben nachweisen, welche auf der schon früher erwähnten Thatsache beruht, dass jeder Lichteindruck in unserm Auge eine gewisse Dauer hat, dass wenn ein leuchtender Punkt ungefähr 11 Mal in der Sekunde an einer Stelle sich befindet, er uns immer dort zu sein scheint; eine Thatsache, die uns durch den einfachen Versuch bewiesen wird, dass eine rasch im Kreise geschwungene glühende Kohle uns als feuriger Kreis erscheint. Wenn demnach in sehr kurzer Zeit nach einander an einer und derselben Stelle alle Farben auftreten, so werden sich beim Anblicke dieser Stelle in unserem Auge die Eindrücke derselben summiren, und dieselbe muss uns weiss erscheinen. Um dieses mit reinen prismatischen Farben nachzuweisen, verbindet man nach dem Vorgange von Münchow das

Prisma mit einem Uhrwerke, welches demselben eine rasche hin und her drehende Bewegung um eine der brechenden Kante parallele Axe ertheilt. Dadurch ändert sich der Winkel, unter welchem die einfallenden Strahlen das Prisma treffen und mit diesem die Ablenkung derselben. Das Spectrum erhält dadurch eine rasche hin und her gehende Bewegung, wodurch auf einem Streifen des auffangenden Schirmes in sehr rascher Folge an allen Stellen alle prismatische Farben auftreten. Der Erfolg ist der, dass man anstatt des Spectrums in den verschiedenen Lagen einen blendend weissen Streifen sieht, dessen Enden dort, wo das Spectrum sich in seiner Bewegung umkehrt, geringe gefärbt ist; dort, wo nur das rothe Ende des Spectrums hinkommt, roth, an dem entgegengesetzten Ende, wo nur das violette auftritt, violett. Die Erscheinung ist dieselbe und aus denselben Gründen, welche ein langer rein weisser Streifen darbietet, wenn man ihn durch ein Prisma ansieht, dessen brechende Kante der kurzen Seite des Streifens parallel ist, mit dem Unterschiede, dass das, was bei jenem Versuche durch die Bewegung des Prismas in rascher Folge an derselben Stelle auftritt, hier in der That neben einander vorhanden ist und sich deckt. Sei *abcd* jener Streifen und die brechende Kante des Prismas mit der kürzern Seite *ab* des Streifens parallel, so wird jeder schmale Streifen *ab* $\alpha\beta$ Fig. 55 ein Spectrum *rv* bilden, indem die einzelnen farbigen Bilder des Streifens neben einander fallen. Der zweite Streifen $\alpha\beta\gamma\delta$ bildet ebenfalls ein Spectrum $r'v'$, welches in der Zeichnung neben das erste gelegt ist, in der That aber das erste zum Theil deckt, so dass oben der Streifen $r'r$ des ersten, unten der violette Streifen vv' des zweiten Spectrums ungefähr von der Breite *ab* $\alpha\beta$ hervorragt. Ein dritter Streifen gleicher Breite bildet ein ebenso verschobenes Spectrum und so fort. Gleiches gilt von der untern Seite *cd*. Jede der brechenden Kante parallele Linie des Streifens *abcd* bildet auf diese Weise ihr Spectrum, deren jedes nachfolgende gegen das vorhergehende nahezu um die Breite der Linie verschoben ist. Diese Spectra fallen in der ganzen Länge des Streifens über einander, sie decken sich in der erwähnten Weise, so dass an allen Stellen des Streifens ausser am Rande *ab* und *cd* zugleich alle Farben auftreten. Der Streifen erscheint daher weiss mit farbigen Rändern. Das Ende *ab* ist roth und geht durch gelb in weiss, der Rand *cd* ist violett und geht durch blau in weiss über.

Fig. 55.



Man kann auch mit farbigen Pigmenten durch einen dem vorigen ähnlichen Versuch die Entstehung des Weiss aus den prismatischen Farben nachweisen, nur erhält man da nicht reines Weiss, weil man keine Pigmente hat, deren Farben genau denen des Spectrums entsprechen. Theilt man eine kreisförmige Scheibe in sieben Sectoren und bestreicht dieselben mit farbigen

Pigmenten, welche sich den Farben des Spectrum möglichst annähern, und zwar wie Newton angibt, in der Reihenfolge roth, orange, gelb, grün, blau, indigo, violett, so dass die Sectoren

Roth, Grün, Violett je $60^{0}\,45'$ — Gelb, Blau je $54^{0}\,41'$ — Orange, Indigo je $34^{0}\,11'$

umfassen, so erscheint die Scheibe bei rascher Rotation um eine durch den Mittelpunkt gehende Axe gleichförmig weiss, und die Färbung ist um so reiner, je näher die Farben der Pigmente mit denen des Spectrums übereinstimmen. Rein weiss kann die Scheibe niemals erscheinen, da es einmal nicht möglich ist, genau die einzelnen Farben und die zahlreichen im Spectrum vorhandenen Nüancen auf der Scheibe zu vereinigen, und da man andererseits den einzelnen Farben nicht genau die Intensität und Ausdehnung geben kann, mit der sie im Spectrum vertreten sind.

Dass die Vereinigung aller Farben, welche uns das Spectrum darbietet, nothwendig ist, um das reine Weiss zu erzeugen, kann dadurch gezeigt werden, dass man bei dem erwähnten Versuche mit der Linse einen Theil des Spectrums aufhält, ehe es auf die Linse fällt.

Wird z. B. das Roth aufgehalten, indem man einen undurchsichtigen Körper von der rothen Seite her in die aus dem Prisma austretenden Strahlen schiebt, so wird die Färbung der von der Linse vereinigten Strahlen eine blassgrüne, nimmt man das Roth ganz fort, und indem man den dunkeln Körper stetig voran schiebt, allmählich auch orange und gelb, so sieht man die blassgrüne Färbung in hellgrün, blaugrün, blau und endlich violett übergehen. Nimmt man dagegen von der andern Seite her das Violett fort, so erhält man eine gelbliche Färbung, welche entschieden gelb wird, wenn auch das Blau fortgenommen wird, und nach Fortnahme des grünen Lichtes in Roth übergeht. Hält man die mittlern grünen Strahlen auf, so ergeben die übrig bleibenden verschiedene Arten von Roth. So kann nach und nach durch Unterdrückung einzelner Farben jede Farbe erzeugt werden, und es gibt in der Natur keinen Farbenton, den man nicht auf diese Weise auf das schönste nachahmen könnte.

Durch Unterdrückung bestimmter Farben erhält das übrig bleibende Sammelbild eine gewisse Färbung. Die zurückgehaltenen Strahlen geben ebenso in ihrer Gesammtheit einen gewissen Farbenton. Diese beiden Farben zusammen genommen enthalten aber alle Farben des Spectrums, sie geben daher Weiss. Jede dieser beiden Färbungen completirt also die andern zu dem Gesammteindruck aller Farben zu Weiss. Man nennt daher die beiden Farben complementäre Farben. Nach Fortnahme der rothen Strahlen zeigten die übrig bleibenden eine grünliche Färbung. Die verschiedenen Töne des Grünen werden demnach durch die verschiedenen rothen Töne zu Weiss ergänzt, Grün und Roth sind demnach Complementärfarben. Durch Fortnahme

des Blauen erhielten wir gelbe Färbungen; Blau und Gelb sind demnach ebenfalls complementäre Farben. Jede Mischfarbe können wir uns auf diese Weise durch Fortnahme einer andern Mischfarbe entstanden denken, jede hat somit ihre complementäre Farbe.

Nach allen diesen Erscheinungen sind wir demnach zu dem Schlusse berechtigt, dass das weisse Licht kein einfaches, sondern ein aus den verschiedensten farbigen Lichtern zusammengesetztes Licht ist. Die unserm Auge durch die Farbe unterschiedenen Lichtarten unterscheiden sich physikalisch durch ihre verschiedene Brechbarkeit. Die Strahlen gleicher Brechbarkeit haben gleiche Farbe, wir nennen sie daher im Gegensatze zu dem zusammengesetzten weissen oder durch eine Mischung gefärbten Lichte homogen. Die Farben des Spectrums sind homogen, sie enthalten nur eine Lichtqualität, die Mischfarben sind zusammengesetzter, das zusammengesetzteste Licht ist das weisse.

Das physikalische Merkmal des verschiedenen Lichtes ist verschiedene Brechbarkeit. Wir werden daher verschiedene Lichtarten nach dieser beurtheilen, selbst wenn das Auge einen Unterschied in der Färbung nicht mehr wahrnehmen sollte, und nur solches Licht als homogen einfarbiges betrachten, welches gleiche Brechbarkeit besitzt, also keine Zerstreuung mehr erfährt.

§. 20.

Physikalische Erklärung der Brechung und Zerstreuung des Lichtes. Undulationstheorie. Die Thatsachen der Brechung des Lichtes haben wir in den letzten Paragraphen zusammengestellt, sie sind kurz zusammengefasst folgende:

1) Trifft ein Bündel Lichtstrahlen auf die Grenzfläche zweier Mittel, so dringt ein Theil des Lichtes in das zweite Mittel ein.

2) Beim Uebergange des Lichtes in das zweite Mittel tritt eine Ablenkung des Lichtes aus seiner Bahn ein; der gebrochene Strahl befindet sich mit dem einfallenden in der Einfallsebene, die Sinus des Einfallswinkels und Brechungswinkels stehen in einem constanten Verhältnisse, welches der Brechungsexponent genannt wird.

3) Dieses Verhältniss zwischen dem Einfallswinkel und dem Brechungswinkel ist aber verschieden, je nach der Farbe des gebrochenen Lichtes.

Vergleichen wir nun diese Sätze mit den beiden Vorstellungen über das Wesen des Lichtes, mit denen wir die Gesetze der ungestörten und gestörten Ausbreitung des Lichtes bisher zusammengestellt haben, so ergeben sich die ersten der drei Sätze als im Wesen des Lichtes unmittelbar begründet und auch der dritte mit demselben vereinbar. Indess kommen beide Theorien hier zu einem entgegengesetzten Resultate in so weit, als die eine von ihnen die Brechung des Lichtes einer Vergeringerung, die andere einer Vergrösserung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes zuschreibt. Wir werden daher an

dieser Stelle ein Mittel erhalten, experimentell die Zulässigkeit der einen oder andern Annahme zu prüfen.

Ist das Licht eine Wellenbewegung, so muss nach den Entwicklungen des ersten Kapitels, III. Abschnitt I. Theil, an der Grenze zweier Mittel eine ankommende Lichtwelle zum Theil in das erste Mittel zurückkehren, zum Theil in das zweite Mittel übergehen, sobald die Dichtigkeit oder Elasticität des Aethers im zweiten Mittel von derjenigen des ersten Mittels verschieden ist. Nach der von uns angenommenen, jedoch nicht ausschliesslichen Hypothese ist nun die Dichtigkeit des Aethers in den verschiedenen Mitteln verschieden, die Elasticität dieselbe. Nach unserem Ausdrucke für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Wellenbewegung

$$c = C\sqrt{\frac{e}{d}}$$

oder wenn wir die Elasticität des Aethers in den verschiedenen Mitteln constant und

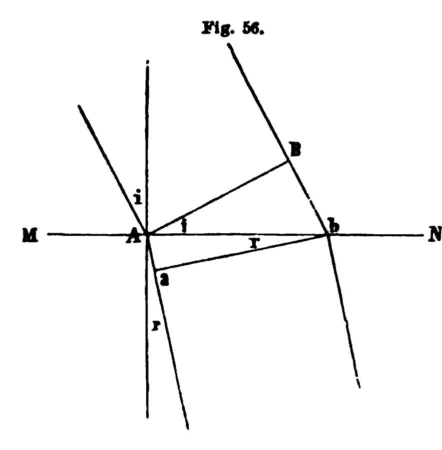
$$C\sqrt{e} = a$$

setzen,

$$c = \frac{a}{\sqrt{d}},$$

ist dann die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der optischen Dichtigkeit der Mittel, wenn wir die Dichte des Aethers in einem Mittel als die optische Dichtigkeit desselben bezeichnen. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist demnach in optisch dichtern Mitteln kleiner als in optisch dünnern. Mit Anwendung des Huyghens'schen Principes erhielten wir nun für die Richtung der fortgepflanzten Welle ab (Fig. 56), wenn die einfallende Welle AB mit der Grenzfläche oder die Normale der Welle, der Strahl mit dem Einfallslothe den Winkel i bildet als Beziehung zwischen dem Einfalls- und Brechungswinkel r

Fig. 56.



$$\sin i : \sin r = Bb : Aa = c : c'.$$

Die Sinus des Einfallswinkels und Brechungswinkels verhalten sich wie die Geschwindigkeiten der Fortpflanzung im ersten und im zweiten Mittel. Da diese nun bei isotropen Mitteln unabhängig ist von der Richtung, in welcher der Strahl das Mittel durchläuft, so folgt, dass das Verhältniss von c zu c' constant ist, welches auch der Winkel i ist, unter welchem die einfallende Welle die Fläche trifft. Wir erhalten somit

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n$$

und da überdies die Normale der in das zweite Mittel übergegangenen Welle nach unseren frühern Entwicklungen (I. Theil, §. 127) mit derjenigen der einfallenden Welle in derselben Ebene liegt, so folgt, dass nach der Wellentheorie die beiden ersten Gesetze durchaus im Wesen des Lichtes begründet sind[1]).

Ebenso ist es mit dem dritten Gesetze, nach welchem das Brechungsverhältniss verschieden ist, je nach der Farbe des Lichtes, nach welchem also die Geschwindigkeit des Lichtes eine verschiedene ist im zweiten Mittel, je nachdem das Licht gefärbt ist. Die Undulationstheorie macht die Annahme, dass die Farbe abhängt von der Anzahl der Stösse, welche wir in gleichen Zeiten erhalten, also von der Oscillationsdauer des Lichtes, dass die langsamsten unserm Auge überhaupt wahrnehmbaren Oscillationen unserm Auge den Eindruck des rothen, schnellere den des gelben, grünen, blauen, die schnellsten den des violetten Lichtes machen. Da nun während einer Oscillationsdauer das Licht sich um eine Wellenlänge fortpflanzt, und da das Licht aller Farben im leeren Raume sich mit gleicher Geschwindigkeit fortpflanzt, wie wir daraus schliessen müssen, dass uns die überhaupt mit weissem Lichte leuchtenden Gestirne immer gleichmässig weiss erscheinen, so folgt, dass das Licht verschiedener Farbe auch eine verschiedene Wellenlänge besitzt; dass die Wellenlänge des rothen Lichtes die grösste, die des violetten die kleinste ist, und dass die Wellenlängen für die übrigen Farben zwischen diesen beiden liegen.

Der Unterschied der Brechbarkeit zwischen verschiedenfarbigen Strahlen bedeutet daher nach der Undulationstheorie eine Verschiedenheit der Aenderung in der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes beim Uebergang desselben in ein zweites Mittel, je nach der Wellenlänge des an der Grenze ankommenden Lichtes, oder eine Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes von der Wellenlänge des Lichtes. Die rothen Strahlen werden am wenigsten gebrochen, für sie ist n am kleinsten, der Einheit am nächsten, es folgt, dass für rothe Strahlen die Geschwindigkeit c' im zweiten Mittel grösser ist als für die Strahlen mit kleinerer Wellenlänge, und dass die Strahlen mit kleinster Wellenlänge, die violetten, im zweiten Mittel die kleinste Geschwindigkeit haben, da für diese das Verhältniss

$$\frac{c}{c'} = n$$

den am meisten von der Einheit verschiedenen Werth hat.

1) *Huyghens,* Traité de la lumière chap. III. Leiden 1690. *Fresnel,* Mémoire sur la diffraction de la lumière, Mémoires de l'Acad. de France. Tome V. *Poggend.* Annal. Bd. XXX. Anhang zur Abhandlung. Oeuvres complèts. T. I. p. 373.

Bei der Entwicklung der theoretischen Principien der Wellenbewegung[1] gelangten wir allerdings zu einem Ausdrucke für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung

$$c = C \cdot \sqrt{\frac{e}{d}}$$

nach welchem dieselbe, vorausgesetzt dass die Schwingungen immer nach derselben Richtung erfolgen, nur von der Elasticität und Dichtigkeit des betreffenden Mediums abhängig ist. Wir bemerkten aber schon damals, dass wenn die Schwingungen nicht longitudinale sind, diese Ableitung nur gültig ist, wenn die Länge der Welle gegen die Amplitude der Schwingung oder gegen die Abstände der Moleküle unendlich gross ist, denn nur dann können wir die Verschiebungen der Moleküle gegen einander den Verschiebungen derselben aus ihrer Gleichgewichtslage proportional setzen. Das ist nicht mehr der Fall, wenn die Länge der Wellen einen mit den Abständen der Moleküle vergleichbaren Werth hat; dann aber verschwindet die Wellenlänge nicht aus dem Ausdrucke für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Wir führten damals ferner schon an, dass Cauchy bei einer von obiger Beschränkung freien Behandlung[2]) dieses Gegenstandes gezeigt habe, dass und wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit transversaler Wellen von der Wellenlänge abhängig sei, indem er für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c einen Ausdruck von folgender Form erhielt,

$$c^2 = a_0 + \frac{a_1}{\lambda^2} + \frac{a_2}{\lambda^4} + \cdots$$

worin λ die Wellenlänge und a_0, a_1, a_2 ... Constante sind, welche nur von der Natur des Mittels abhängig sind, in welchem die Wellen sich ausbreiten.

Setzen wir deshalb voraus, dass die Schwingungen des Aethers, die wir als Licht wahrnehmen, transversale sind, so muss die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes von der Länge der Wellen abhängen, mit dieser aber, wie sich leicht zeigen lässt, auch der Brechungsexponent.

Da die Brechung nicht mit einer Aenderung der Farbe verbunden ist, so folgt, dass die Oscillationsdauer des Lichtes dadurch nicht geändert wird. Da aber das Licht im zweiten Mittel sich langsamer fortpflanzt als im ersten, so muss die Länge der Wellen im zweiten Mittel kleiner sein als im ersten, und zwar in demselben Verhältnisse kleiner, als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit kleiner ist.

Sind demnach λ und λ' die Wellenlängen einer gewissen Lichtart im ersten und zweiten Mittel, so ist

$$\lambda : \lambda' = c : c'$$

$$\lambda' = \frac{c' \cdot \lambda}{c}.$$

1) Man sehe im 3. Abschnitt des I. Theiles §. 122.

2) *Cauchy*, Mémoire sur la dispersion de la lumière. Prag 1836. *Beer*, Einleitung in die höhere Optik. p. 209. Braunschweig 1853.

Geht nun das Licht aus dem ersten Mittel in das zweite über, so ist, wenn wir nur bis zu den Quadraten von λ fortschreiten, für das erste Mittel

$$c^2 = A_0 + \frac{A_1}{\lambda^2},$$

für das zweite

$$c'^2 = a_0 + \frac{a_1}{\lambda'^2},$$

oder wenn wir λ' durch c, λ und c' ausdrücken,

$$c'^2 = a_0 + a_1 \cdot c^2 \frac{1}{c'^2 \lambda^2}.$$

Lösen wir diese Gleichung nach c'^2 auf, so wird

$$c'^4 - a_0 c'^2 = \frac{a_1 c^2}{\lambda^2}$$

$$c'^2 = {}^1/_2\, a_0 \pm \sqrt{\frac{a_1 c^2}{\lambda^2} + {}^1/_4\, a_0^2}.$$

Da nun c'^2 grösser als $^1/_2\, a_0$ ist, so ist das Vorzeichen der Wurzel positiv zu nehmen, und somit

$$c'^2 = {}^1/_2\, a_0 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4 a_1 c^2}{a_0^2 \lambda^2}}\right).$$

Ziehen wir die Wurzel durch Annäherung aus, so wird

$$c'^2 = {}^1/_2\, a_0 \left(1 + 1 + \frac{2 a_1 c^2}{a_0^2 \lambda^2}\right) = a_0 + \frac{a_1 c^2}{a_0 \lambda^2}.$$

Daraus folgt dann weiter

$$\frac{1}{c'} = \frac{1}{\sqrt{a_0 + \frac{a_1 c^2}{a_0 \lambda^2}}} = \left(a_0 + \frac{a_1 c^2}{a_0 \lambda^2}\right)^{-1/2}.$$

Entwickeln wir nun die Potenz auf der rechten Seite nach dem binomischen Satze, so wird

$$\frac{1}{c'} = a_0^{-1/2} \left(1 - {}^1/_2\, \frac{a_1 c^2}{a_0^2 \lambda^2}\right),$$

wenn wir die höhern Potenzen von $\frac{a_1 c^2}{a_0 \lambda^2}$ vernachlässigen. Daraus erhalten wir dann

$$\frac{c}{c'} = a_0^{-1/2} \cdot c \left(1 - {}^1/_2\, \frac{a_1 c^2}{a_0^2 \lambda^2}\right)$$

oder

$$n = \frac{c}{c'} = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{1}{\lambda^2},$$

wenn wir die Coefficienten in unserm Ausdrucke für $\frac{c}{c'}$ mit α_0 und α_1 bezeichnen, welche von den durch die Natur des Aethers im zweiten Mittel abhängigen Coefficienten a_0 und a_1 sowie der Geschwindigkeit des Lichtes im ersten Mittel bestimmt werden.

Das Verhältniss $\frac{c}{c'}$ ist nun der Brechungsexponent n, und wir sehen, wie derselbe nach den vollständigern Cauchy'schen Rechnungen aus einem von λ, der Wellenlänge im ersten Mittel, unabhängigen Gliede besteht, und einem zweiten, welches dem reciproken Werthe des Quadrates von λ proportional ist, welches somit um so grösser ist, einen je kleinern Werth λ besitzt. Der Brechungsexponent beim Uebergange des Lichtes aus einem Mittel in ein zweites ist somit um so mehr von 1 verschieden, je kleiner die Wellenlänge des Lichtes ist. Das Licht kleinerer Wellenlänge ist somit stärker brechbar als das Licht grösserer Wellenlänge.

Die Gleichung von Cauchy gibt die Brechungsexponenten in Form einer nach fallenden geraden Potenzen von λ geordneten Reihe, von der wir nur das von λ unabhängige und das mit λ^{-2} behaftete Glied beibehalten haben. Der vollständige Ausdruck für n bricht nicht da ab, und wir werden später sehen, dass vielfach wenigstens noch ein drittes mit λ^{-4} behaftetes Glied hinzugenommen werden muss.

Eine in vielen Fällen bequemere, und wie wir nachweisen werden genauere Formel als die von Cauchy, wenigstens wenn wir dieselbe nur mit zwei Gliedern anwenden, hat Christoffel[1]) aus der Theorie von Cauchy abgeleitet. Dieselbe hat folgende Gestalt:

$$n = \frac{n_0 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{1 + \frac{\lambda_0}{\lambda}} + \sqrt{1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}}}.$$

Die beiden Grössen n_0 und λ_0 sind ebenfalls Constante, welche lediglich von der Beschaffenheit der Mittel abhängen, zwischen denen die Brechung stattfindet, oder wenn wir n als den absoluten Brechungsexponenten eines Mittels ansehen, von der Beschaffenheit des Mittels abhängt, in welches das Licht übertritt.

Aus alledem folgt, dass die Annahme, das Licht sei eine Wellenbewegung des Aethers, auch die Dispersion des Lichtes zu erklären vermag, ja dieselbe als nothwendig erscheinen lässt, wenn wir die allgemeine Annahme, dass das Licht eine schwingende Bewegung sei, dahin präcisiren, dass die Schwingungen in einer zur Fortpflanzungsrichtung senkrechten Richtung, also parallel der fortgepflanzten Welle erfolgen. Es ist das allerdings für uns an dieser Stelle eine Hülfshypothese, die wir der allgemeinen Annahme hinzufügen, die auf den ersten Blick sogar sehr auffallend erscheinen muss, da sie dem Aether die Eigenschaft eines festen Körpers vindicirt. Denn wir sahen im ersten Theile, dass transversale Schwingungen in flüssigen und gasförmigen Körpern in Folge der elastischen Kräfte nicht stattfinden können, dass in diesen nur mit Verdichtungen und Verdünnungen sich fortpflanzende Longitudinalschwingungen möglich sind, da in ihnen die Moleküle keine festbestimmte Lage

1) *Christoffel*, Poggend. Ann. Bd. CXVII.

haben, dieselben vielmehr jede Lage annehmen können, welche nur nicht mit Verdichtungen, also Volumänderung, verbunden ist. Die Annahme von Transversalschwingungen verlangt aber, dass jedes Aethermolekül eine bestimmte durch seine Umgebung bedingte Gleichgewichtslage habe, wie sie den Molekülen der festen Körper zukommt, somit dass der Aether sich verhält wie ein fester Körper.

Es muss indess bemerkt werden, dass die Annahme von Transversalschwingungen eigentlich keine neue Hypothese ist, die der allgemeinen der Wellentheorie zu Grunde liegenden fremd ist. Im Gegentheil, sie ist nur eine Vervollständigung der früher allgemein hingestellten Hypothese, dass das Licht eine schwingende Bewegung sei; es muss dann, wenn wir den Aether nicht ausdrücklich als eine Flüssigkeit ansehen, entweder eine transversale oder longitudinale sein, da die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der beiden Arten von schwingenden Bewegungen so verschieden sein muss, dass in geringer Entfernung von der Lichtquelle, wenn auch beide Bewegungen erregt werden, die beiden sie fortpflanzenden Wellen von einander getrennt sein müssen. Die Dispersion nöthigt uns nun, von den beiden möglichen Wellensystemen die transversalen als die Wellen des Lichtes zu betrachten, und somit macht sie die Undulationstheorie erst zu einer fest bestimmten. Allerdings war in der historischen Entwicklung der Undulationstheorie es nicht die Dispersion, die zur Annahme der Transversalwellen führte, vielmehr hat Cauchy die Theorie der Dispersion erst gegeben, nachdem Young und Fresnel aus den Polarisationserscheinungen geschlossen, dass die Lichtschwingungen transversale sein müssten.

§. 21.

Erklärung der Brechung und Dispersion des Lichtes nach der Emissionshypothese. Die andere Vorstellung über das Wesen des Lichtes, die Emissionshypothese, leitet ebenfalls die Gesetze der Brechung und Dispersion des Lichtes theoretisch ab. Nach den Annahmen der Theorie über die Wechselwirkung zwischen den Lichttheilchen und den Molekülen der wägbaren Körper ist die von den letztern ausgehende Kraft abwechselnd eine anziehende und abstossende. Die nächste, die Moleküle umgebende Schicht, ist nach derselben aber jedenfalls anziehend bis zur Berührung, auf diese folgt dann nach aussen eine abstossende Schicht und so fort. Die Lichttheilchen eines Strahles befinden sich in periodisch wechselnden Zuständen, den Anwandlungen des leichtern Zurückgeworfenwerdens und des leichtern Durchgehens. Die Theilchen eines Strahles, welche sich in dem erstern Zustande befinden, können, wenn sie an der Grenzfläche zweier Mittel anlangen, die Schicht der zurückstossenden Kräfte nicht durchdringen, sie werden, wie wir sahen, zurückgeworfen, diejenigen aber, welche in der Anwandlung des leichtern Durchgehens auf der Grenzfläche ankommen, durchdringen den Raum,

in welchem die Kräfte nur zurückwerfende sind, und werden von den Molekülen des zweiten Mittels angezogen.

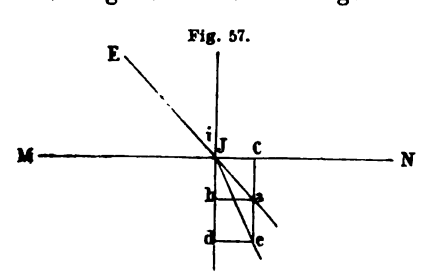
In der Grenze wirken dann zwei Kräfte auf die Bewegung des Theilchens ein; diejenige, welche es in das erste Mittel zurückzieht, und diejenige, welche es in das zweite Mittel hineinzieht.

Da nun auch hier wie bei der Reflexion alle Moleküle in ganz gleicher Weise auf das Lichttheilchen einwirken, so folgt, dass die Resultirende sämmtlicher Anziehungen jedenfalls senkrecht gegen die als eben vorausgesetzte Grenzfläche der Mittel gerichtet ist; es kann daher durch diese Kräfte nur die senkrecht gegen die Fläche gerichtete Geschwindigkeit des Lichttheilchens geändert werden. Daraus folgt zunächst, dass das Lichttheilchen im zweiten Mittel sich ebenfalls in der Einfallsebene bewegen muss.

Ferner diese senkrecht gegen die Grenzfläche gerichtete auf das Lichttheilchen wirkende Kraft hat nur so weit, als die Wirkungssphäre der Moleküle reicht, eine nach der einen oder andern Seite gerichtete Resultirende. innerhalb jeden Mittels sind die Anziehungen nach allen Seiten genau gleich: es kann daher nur an der Grenze eine Aenderung der gegen die Grenzfläche senkrechten Componente der Geschwindigkeit eintreten, innerhalb des zweiten Mittels muss das Lichttheilchen sich ebenso mit constanter Geschwindigkeit fortbewegen, wie innerhalb des ersten Mittels.

Kommt nun (Fig. 57) in der Richtung EJ ein Lichttheilchen in der Anwandlung des leichtern Durchgehens an der Grenzfläche MN zweier Mittel an, so können wir seine Geschwindigkeit, welche durch die Länge JA gemessen werde, in zwei zu einander senkrechte Componenten

Fig. 57.



$$ba = x$$

$$Jb = y$$

zerlegen, und erhalten

$$c^2 = x^2 + y^2.$$

Durch die nach entgegengesetzten Seiten in der Grenzfläche MN auf das Lichttheilchen wirkenden anziehenden Kräfte des ersten und des zweiten Mittels wird, wie wir sahen, nur die gegen die Fläche senkrechte Componente der Geschwindigkeit geändert. Werde dieselbe anstatt $Jb = y$

$$Jd = ky,$$

worin k grösser oder kleiner als 1 sein kann, je nachdem die Anziehung des zweiten oder ersten Mittels grösser ist, so wird nun die Geschwindigkeit bestimmt durch das Rechteck $Jdec$, in welchem Jd die jetzt stattfindende gegen die Fläche MN senkrechte und Jc die der Fläche parallele Componente der Geschwindigkeit darst llt. Die Geschwindigkeit im zweiten Mittel c' wird dadurch

$$c'^2 = x^2 + k^2y^2.$$

Dafür können wir setzen

$$c'^2 = x^2 + y^2 + (k^2 - 1)y^2 = c^2 + mc^2,$$

worin m eine nur von der Natur der Mittel abhängige Constante bezeichnet, da die schliessliche Geschwindigkeit c' nur von der Natur des Mittels, nicht von der Richtung, in welcher das Licht dasselbe durchsetzt, abhängen kann.

Daraus folgt dann

$$c'^2 = c^2(1 + m)$$

$$c' = c\sqrt{(1 + m)} = n \, . \, c,$$

indem wir die Constante $\sqrt{1 + m} = n$ setzen. Daraus erhalten wir weiter

$$\frac{c'}{c} = n,$$

das Verhältniss der beiden Geschwindigkeiten ist ein constantes. Nennen wir nun den dem Einfallswinkel gleichen Winkel $aJb = i$, und den Winkel, welchen der gebrochene Lichtstrahl mit dem Einfallslothe macht, $dJe = r$, so haben wir zur Bestimmung der Richtung des gebrochenen Lichtstrahls

$$\frac{ab}{aJ} = \sin i; \ \frac{de}{eJ} = \sin r.$$

Nun ist aber $ab = de = x$

$$aJ = c, \ eJ = c',$$

demnach

$$\frac{x}{c} = \sin i, \ \frac{x}{c'} = \sin r,$$

und daraus

$$\frac{x}{c} : \frac{x}{c'} = \frac{\sin i}{\sin r}$$

$$n = \frac{c'}{c} = \frac{\sin i}{\sin r},$$

oder das constante Verhältniss der Geschwindigkeiten ist auch das der Sinus des Einfalls- und Brechungswinkels, oder der Sinus des Winkels, den der Lichtstrahl im ersten Mittel mit dem Einfallslothe bildet, verhält sich zum Sinus des Mittels, den Strahl und Einfallsloth im zweiten Mittel einschliessen, wie die Geschwindigkeit des Lichtes im zweiten Mittel zu derjenigen im ersten Mittel. Das Verhältniss dieser Sinus, das wir den Brechungsexponenten nannten, ist somit für ein und dasselbe Mittel constant, welches auch der Werth des Einfallswinkels ist.

Die beiden ersten Gesetze der Lichtbrechung folgen also aus den Annahmen der Emissionshypothese unmittelbar.[1])

Ist die Geschwindigkeit im zweiten Mittel grösser als im ersten, so ist n grösser als 1, $i > r$. Der Strahl wird durch die Brechung also dem Ein-

1) *Newton,* Philosophiae naturalis Principia mathematica. Liber I, prop. 94 bis 96. *Herschel,* On Light III, §. I. art. 528 ff.

fallslothe genähert. Solche Mittel nannten wir vorhin optisch dichtere; es folgt demnach, dass das Licht in dichtern Mitteln sich rascher bewegt als in dünnern.

Die Grösse m, welche uns die Aenderung des Quadrates der Geschwindigkeit angibt, welche das Lichttheilchen in Folge der anziehenden Wirkung der ponderabeln Moleküle erfährt, kann uns ein Maass dieser Kräfte abgeben. Bezeichnet nun c die Geschwindigkeit des Lichtes im leeren Raume, so ist m ein Maass der von dem brechenden Mittel auf das Lichttheilchen ausgeübten Anziehung. Newton nannte daher die Grösse m unter dieser Voraussetzung die brechende Kraft des Mittels. Bezeichnet nun ebenso n den absoluten Brechungsexponenten des Mittels, so ist

$$n = \sqrt{m + 1}$$

$$n^2 - 1 = m,$$

oder das um 1 verminderte Quadrat des absoluten Brechungsexponenten ist das Maass für die brechende Kraft eines Mittels. Ist c nicht die Geschwindigkeit im leeren Raume, sondern in irgend einem Mittel, so ist m der positive oder negative Zuwachs des Quadrates der Geschwindigkeit des Lichtes beim Uebergange desselben aus dem ersten Mittel in das zweite, also das Maass für die Differenz der anziehenden Kräfte beider Mittel auf das Licht. Es kann daher als die relative brechende Kraft des zweiten Mittels in Bezug auf das erste bezeichnet werden. Bezeichnet dann n den relativen Brechungsexponenten für diese beiden Mittel, so ist $n^2 - 1$ das Maass für die relative brechende Kraft.

Nimmt man an, dass die brechende Kraft eines Mittels zunimmt mit der Dichtigkeit eines Mittels, so wird, wenn d die Dichtigkeit des Mittels bezeichnet,

$$\frac{n^2 - 1}{d}$$

die brechende Kraft für ein Mittel derselben Natur sein, welches die Dichtigkeit 1 besitzt; Newton nennt diesen Quotienten daher das specifische Brechungsvermögen der betreffenden Substanz.

Um die verschiedene Brechbarkeit des verschieden farbigen Lichtes zu erklären, nimmt die Emissionstheorie theils an, dass die den einzelnen Farben entsprechenden Lichttheilchen eine verschiedene Masse besitzen, theils dass die Anziehungskraft, welche die Moleküle der ponderabeln Körper auf die Lichttheilchen ausüben, eine verschiedene sei. Die rothen Lichttheilchen sollen an Masse die grössten sein, kleiner die Masse der gelben, grünen, am kleinsten diejenige der violett färbenden Lichttheilchen. Es folgt dann aus den Gesetzen der Mechanik, dass bei gleicher brechender Kraft die Ablenkung der grösseren Masse aus ihrer Bahn die kleinere sein muss, dass der Geschwindigkeitszuwachs und somit der Brechungsexponent für das violette Licht grösser sein muss als für das rothe.

Die Verschiedenheit der anziehenden zwischen den Molekülen der Körper und des Lichtes thätigen Kräfte musste die Emissionstheorie deshalb annehmen, um gewisse Verschiedenheiten in dem Spectrum der verschiedenen Substanzen, die wir demnächst genauer zu betrachten haben werden, zu erklären. Es sind das die verschiedenen Ausdehnungen der einzelnen Farben in Spectren gleicher Länge, welche durch Prismen verschiedener Substanzen hervorgebracht werden und die verschiedene Länge der Spectren bei gleicher, die gleiche Länge der Spectren bei verschiedener Ablenkung einer, z. B. der rothen, Strahlengattung. Man sieht, wäre nur die Verschiedenheit der Masse der Lichttheilchen der Grund der Dispersion, so müssten, wenn durch zwei Prismen eine Strahlengattung in gleicher Weise abgelenkt würde, auch alle übrigen ganz gleich abgelenkt werden, oder die Spectra müssten bei gleicher Ablenkung der rothen Strahlen gleiche, bei verschiedener verschiedene Länge haben.

§. 22.

Vergleich beider Theorien. Foucault's Versuch. Sowohl die Undulationstheorie als die Emissionstheorie erklären somit die Brechung und Dispersion des Lichtes ziemlich gleich vollständig, wenn sich auch nicht leugnen lässt, dass die Undulationstheorie auch hier wieder den Vorzug vor der Emissionstheorie hat, dass sie zur Erklärung der Dispersion nur einer consequenten Durchführung der Theorie bedarf, während die Emissionstheorie wieder eine neue Hypothese erfordert, die Verschiedenheit der anziehenden zwischen den Lichttheilchen und den Körpermolekülen thätigen Kräfte je nach Art der Lichttheilchen. Ferner liefert uns die Undulationstheorie einen mathematischen Ausdruck für die Dispersion, indem sie für den Brechungsexponenten des Lichtes den Ausdruck ergab

$$n = \frac{n_0 \sqrt{2}}{\sqrt{1 + \frac{\lambda_0}{\lambda}} + \sqrt{1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}}}$$

der uns, wenn wir die Brechungsexponenten für die verschiedenen Lichtarten und deren Wellenlängen bestimmen können, eine Prüfung der Theorie gestattet. Die Emissionshypothese kann aber nur qualitativ über die Dispersion Aufschluss geben.

Wir haben indess in der Ableitung des Brechungsgesetzes noch ein anderes und zwar entscheidendes Mittel, um die Haltbarkeit der beiden Theorien zu prüfen. Beide Theorien liefern zwar den Ausdruck

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n.$$

Nach der einen, der Wellentheorie, ist aber

$$n = \frac{c}{c'},$$

nach der Emissionstheorie dagegen

$$n = \frac{c'}{c},$$

wenn c die Geschwindigkeit des Lichtes in dem Mittel bedeutet, in welchem das Licht mit dem Einfallslothe den Winkel i bildet, c' in dem, in welchem Lichtstrahl und Einfallsloth den Winkel r einschliessen. Ist i grösser wie r, so muss nach der Undulationstheorie, da dann $n > 1$ ist, die Geschwindigkeit des Lichtes im ersten Mittel die grössere sein; nach der Emissionstheorie dagegen im zweiten Mittel, und zwar ist nach der letztern das Geschwindigkeitsverhältniss der reciproke Werth von dem Verhältniss, wie es nach ersterer bestehen muss.

Lässt man einen Lichtstrahl aus Luft in Wasser eintreten, so ergeben die Versuche

$$\frac{\sin i}{\sin r} = {}^4/_3.$$

Nach der Undulationstheorie ist demnach

$$\frac{c}{c'} = {}^4/_3,$$

nach der Emissionstheorie ist dagegen c' die grössere und zwar

$$\frac{c}{c'} = {}^3/_4,$$

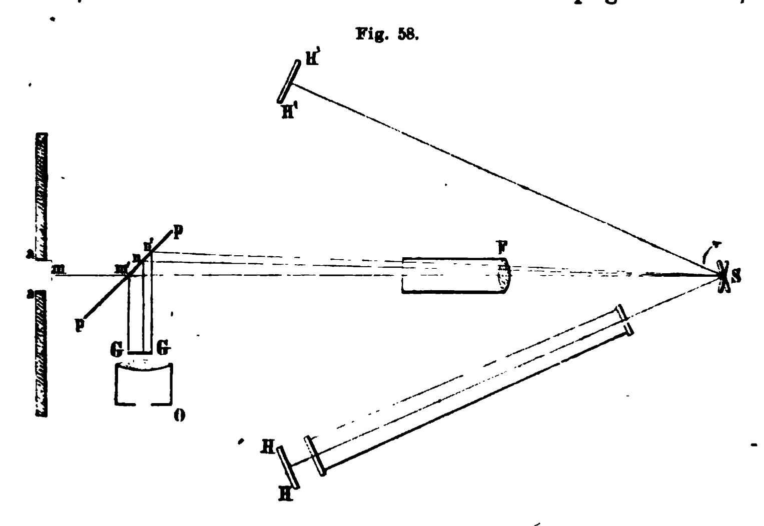
nach der ersten ist die Geschwindigkeit des Lichtes im Wasser $^3/_4$, nach der zweiten $^4/_3$ von derjenigen in der Luft.

Foucault hat diese Forderungen experimentell geprüft, das Resultat seiner Versuche bestätigte die Forderungen der Undulationstheorie.[1]) Die von ihm angewandte Methode ist die bereits §. 4 beschriebene mit ganz geringen Abänderungen; er liess durch eine kleine quadratische Oeffnung von 2^{mm} Seite *aa* (Fig. 58), in deren Mitte ein feiner Platindraht *m* ausgespannt war, mittels eines Heliostaten ein Bündel Lichtstrahlen in ein dunkles Zimmer horizontal eintreten. Die Strahlen fielen dann auf das Objectiv eines Fernrohres *F*, dessen optische Axe den eintretenden Strahlen parallel war; jenseits des Fernrohres *F* war ein kleiner kreisförmiger Spiegel *S* vertical aufgestellt, dessen Centrum in der Verlängerung der Fernrohraxe lag, welcher also von den durch die Oeffnung dringenden Strahlen, nachdem sie das Fernrohr durchsetzt haben, getroffen wird. Auf beiden Seiten von dem Spiegel *S* ist ein sphärischer Hohlspiegel so angebracht, dass der Krümmungsmittelpunkt in dem Centrum des Spiegels liegt und dass die Hauptaxen der Spiegel mit den eintretenden Strahlen in einer Ebene liegen. Die Entfernung des Objectives *F* von dem Drahte *m* beträgt etwas weniger als die doppelte Brennweite der Linse, und der Abstand *FS* des Objectivs vom Spiegel plus dem Abstande des Hohl-

1) *Foucault,* Annales de chim. et de phys. III. Série. Tome XLI. Berliner Berichte (herausgegeb. v. d. physik. Gesellschaft). Bd. X. 1854.

spiegels von dem Spiegelchen S ist so gewählt, dass gerade in der Spiegelfläche des Spiegels HH das reelle durch die Linse erzeugte Bild des Drahtes m entsteht, wenn der um eine verticale Axe drehbare Spiegel so steht, dass

Fig. 58.



die in der Richtung FS ankommenden Strahlen von S nach HH oder $H'H'$ reflectirt werden. Zu dem Ende muss, wie in einem der nächsten §§. nachgewiesen wird, der Abstand $HS + SF$ etwas grösser sein wie mF.

Die Anordnung unterscheidet sich von der im §. 4 beschriebenen nur durch eine etwas andere Stellung der Linse F und dadurch, dass anstatt fünf Hohlspiegel an jeder Seite des Spiegels nur einer benutzt wird. Da aber dieser Hohlspiegel so steht, dass sein Krümmungsmittelpunkt in den Spiegel S fällt, somit die das reelle Bild in der Spiegelfläche bildenden Strahlen parallel der Axe einfallen, so kehren die Strahlen in derselben Richtung zum Spiegel S zurück und von dort durch die Linse nach m, wo dann ein reelles Bild des Bildes auf dem Spiegel, also ein reelles Bild des Drahtes m erscheint.

Dieses Bild deckt auch hier den Draht m; um es beobachten zu können stellt Foucault auch hier die Glasplatte pp unter einem Winkel von 45° geneigt auf, so dass die partiell reflectirten Strahlen auf der getheilten Glasplatte ein Bild α erzeugen, welches ebenso weit vor pp liegt als m hinter demselben. Dieses Bild wird durch eine Lupe beobachtet.

Versetzt man nun den auf einer Luftturbine, wie im §. 4, befestigten Spiegel in rasche Rotation, so nimmt man auch hier eine Verschiebung des Bildes wahr, und zwar erscheinen, wenn die beiden Spiegel HH und $H'H'$ gleichweit von S entfernt sind und zwischen S und den Hohlspiegeln sich nur Luft befindet, die von den beiden Hohlspiegeln erzeugten Bilder um gleich viel verschoben, so dass auch jetzt nur ein verschobenes Bild entsteht. Man beobachtet diese Verschiebung auf der Glasplatte GG, indem auf dieser das Bild ebenso verschoben wird als das bei m erzeugte.

Die Grösse dieser Verschiebung lässt sich durch eine der im §. 4 mitgetheilten ganz ähnliche Gleichung wiedergeben, es ergibt sich aus derselben, dass wir die Verschiebung in ihrer Abhängigkeit von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes schreiben können

$$d = \frac{8 n \pi . r . l}{c},$$

wenn wir mit r den Abstand des Spiegels vom Punkte m, mit l den Abstand der Hohlspiegel vom Spiegel S und mit n die Anzahl der Umdrehungen des Spiegels in der Sekunde bezeichnen.

Die Verschiebung ist somit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes umgekehrt proportional.

Bringen wir nun zwischen S und die Hohlspiegel ein anderes Mittel als Luft, z. B. eine mit Wasser gefüllte Röhre, so dass das Licht den Weg $2SH$ anstatt in Luft in Wasser zurücklegen muss, so muss die Verschiebung d bei gleicher Geschwindigkeit n des Spiegels kleiner werden, wenn die Geschwindigkeit des Lichtes im Wasser grösser, grösser jedoch, wenn die Geschwindigkeit im Wasser kleiner ist als in Luft.

Bringen wir anstatt vor beide Hohlspiegel nur vor einen derselben HH eine mit Wasser gefüllte Röhre an, so müssen in dem Fernrohr O statt eines Bildes zwei erscheinen, indem das durch den Spiegel, vor welchem das Wasser sich befindet, erzeugte Bild jetzt mehr oder weniger verschoben werden muss als das von dem andern Spiegel erzeugte Bild. Da nun im Uebrigen alle Verhältnisse genau die gleichen sind, so haben wir für die Verschiebung des „Luftbildes", wenn c die Geschwindigkeit des Lichtes in Luft bedeutet,

$$d = \frac{8 n \pi r l}{c} = \frac{b}{c},$$

für die Verschiebung des „Wasserbildes" dagegen, wenn c' die Geschwindigkeit des Lichtes im Wasser ist,

$$d' = \frac{b}{c'},$$

und somit die Proportion

$$c : c' = d' : d.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in Luft und Wasser verhalten sich umgekehrt, wie die beobachteten Ablenkungen des Bildes.

Nach der Emissionstheorie müsste demnach

$$d : d' = 4 : 3,$$

nach der Undulationstheorie dagegen

$$d : d' = 3 : 4$$

sein.

Das Wasserbild ist von dem Luftbild sehr leicht zu unterscheiden durch seine geringere Helligkeit sowohl als durch seine grünliche Farbe.

Die Beobachtung zeigt, dass das Wasserbild weiter seitlich verschoben ist als das Luftbild, und zwar wie die Undulationstheorie es verlangt, nahe

im Verhältniss von 4 : 3. Foucault's Messungen ergaben bei einem Abstande der Hohlspiegel von dem Planspiegel gleich 3^m, einem Abstande des Objectivs F von dem Drahte gleich 4^m und von dem Planspiegel gleich $1^m,18$, ferner bei 500 Umdrehungen des Spiegels in der Sekunde

$$d' = 0^{mm},469, \quad d = 0^{mm},375,$$

Zahlen, welche besonders unter Beachtung, dass der Raum zwischen S und H nicht vollständig mit Wasser angefüllt sein kann, so vollkommen den Forderungen der Undulationstheorie entsprechen, dass sie als der direkteste Beweis für ihre Zulässigkeit und für die Unhaltbarkeit der Emissionstheorie angesehen werden müssen. Ein Blick in Foucault's Fernrohr zeigt also dem Beobachter durch die stärkere Verschiebung des Wasserbildes buchstäblich die Ueberlegenheit der Undulationstheorie über die Emissionstheorie und Foucault kann mit Recht am Schlusse seiner Abhandlung sagen: „Der letzte Schluss, den ich aus meinem Versuche ziehe, ist demnach der Beweis, dass die Emissionshypothese mit den Lichterscheinungen nicht im Einklange steht.“

Wir werden daher den Versuchen der Anhänger der Emissionstheorie, die Erscheinungen des Lichtes zu erklären, nicht weiter zu folgen haben, und im weitern Verlaufe unserer Darstellung nur die Fragen uns vorlegen: kann die Undulationstheorie alle Erscheinungen, welche wir beim Lichte beobachten, erklären, und zeigen sich alle Folgerungen, welche wir aus dem einen obersten Satze, dass das Licht eine Wellenbewegung des Aethers sei, in der Erfahrung bestätigt. Ist beides der Fall, so wird die Undulationstheorie ebenso für uns sicher sein, wie die der gesammten Mechanik zu Grunde liegende Lehre von der Attraction der Massen.

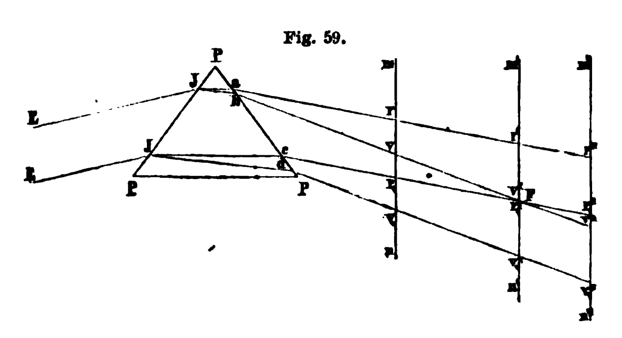
§. 23.

Darstellung eines reinen Spectrums. Fraunhofer'sche Linien. Da das verschiedenfarbige Licht eine verschiedene Brechbarkeit besitzt, so ist es zur Untersuchung der Brechungsverhältnisse vor allem nothwendig, sich ganz homogenes einfarbiges Licht zu verschaffen. Ein nach unserm bisher angenommenen Verfahren hergestelltes Spectrum ist keineswegs rein, das heisst, seine einzelnen Stellen liefern kein homogenes Licht. Um es dahin zu bringen, ist zunächst erforderlich, dass die zur brechenden Kante senkrechte Ausdehnung des Strahlenbündels möglichst klein sei, so dass die Breite des Bündels derjenigen eines Strahles, also einer physischen Linie sich annähere.

Denn nach dem Vorigen besteht das Spectrum aus den wegen der verschiedenen Brechbarkeit des farbigen Lichtes nach verschiedenen Richtungen austretenden verschiedenen Strahlen; diese Strahlen divergiren erst von ihrer Eintrittsstelle in das Prisma an, und zwar in der Einfallsebene, welche zur brechenden Kante des Prismas senkrecht ist. Ist nun jedes der farbigen Strahlenbündel, welches genau die Breite der Oeffnung hat, von bedeutender Breite, so kann nahe hinter dem Prisma die Divergenz der Bündel noch nicht so gross

sein, dass die verschiedenen Farben ganz auseinanderfallen. Ist z. B. *EEJJ* ein breites Strahlenbündel, welches auf das Prisma *PPP* fällt, so werden die rothen Strahlen in der Richtung $arr'r''$ $cr_, r'_, r''_,$ austreten, die violetten

Fig. 59.



dagegen in $bvv'v''$ $dv_, v'_, v''_,$. Auf einem in die austretenden Strahlen gehaltenen Schirme *mn* wird dann der Raum $vr_,$ noch Licht von allen Farben enthalten, er wird ganz weiss sein und nur die Ränder *rv* und $r_, v_,$ sind gefärbt, aber nur an ihren äussersten Grenzen homogen, da zunächst oberhalb *v* alle Farben ausser violett enthalten sind und erst gegen *r* hin eine Farbe nach der andern verschwindet. Durch weitere Entfernung von dem Prisma können die Farben auf dem Schirme nun weiter auseinander gelegt werden, da die Breite der Strahlenbündel an allen Stellen dieselbe und zwar die des einfallenden Bündels ist. Auf dem Schirme $m'n'$ erhält nur der Punkt *F* Licht aller Farben, und auf dem noch weiter entfernten Schirme $m''n''$ wird kein Punkt mehr von allen Strahlen getroffen. In dem Raume $r''v''$ mischen sich aber noch alle übrigen Strahlen ausser violett und roth, und erst durch noch weiteres Entfernen des Schirmes fallen auch die übrigen farbigen Strahlen neben einander. Dasselbe nun, was wir durch eine sehr weite Entfernung des Schirmes bekommen, erreichen wir in viel bequemerer Weise durch ein Verkleinern der Oeffnung.

Aber, wenn wir mit den durch einen Heliostaten in das Zimmer geleiteten Strahlen der Sonne unsere Versuche anstellen, so genügt es nicht, die der brechenden Kante senkrechte Ausdehnung der Oeffnung sehr klein zu machen, da dann immer wegen der Ausdehnung der Sonnenscheibe das eintretende Strahlenbündel eine ziemliche Breite hat, die um so grösser ist, je weiter von der Oeffnung wir das Prisma aufstellen.

Man kann nun ein doppeltes Verfahren anwenden, um ein schmales scharf begrenztes Lichtbündel und damit ein reines Spectrum zu erhalten. In den Laden des Fensters macht man zunächst einen schmalen Spalt. In das durch denselben eintretende divergirende Lichtbündel stellt man dann in einiger Entfernung von der Oeffnung einen zweiten Schirm, in welchem sich dem ersten Spalte parallel ein zweiter eben solcher Spalt befindet. Von dem durch den ersten Spalt dringenden divergirenden Strahlenbündel geht dann durch

den zweiten Spalt nur ein sehr schmaler Theil, und stellt man nun hinter den zweiten Spalt das Prisma auf, so erhält man in passender Entfernung auf einem Schirme ein reines Spectrum. Indess hat dieses Verfahren den Nachtheil, dass das Spectrum ziemlich lichtschwach ist.

Besser ist daher folgendes Verfahren, welches auf der Eigenschaft der Linsen beruht, von leuchtenden Punkten oder Gegenständen, welche Lichtstrahlen auf dieselben senden, in bestimmten Entfernungen von der Linse ein scharfes Bild zu entwerfen.

Wie wir im §. 17 nachgewiesen haben, treten die Strahlen gleicher Brechbarkeit, welche von einer der brechenden Kante parallelen Linie herkommen, so aus einem Prisma hervor, als kämen sie von einer an derselben Seite des Prisma liegenden Linie her, welche von der Austrittsstelle der mittleren Strahlen aus gesehen um einen Winkel δ verschoben ist, wenn

$$\delta = i + i' - \alpha,$$

worin i den Einfalls-, i' den Austrittswinkel der mittlern Strahlen und α den brechenden Winkel des Prismas bedeutet. Für die von ein und derselben Lichtlinie ausgehenden Strahlen verschiedener Brechbarkeit ist nun der Winkel i' ein verschiedener; daraus folgt, dass die von den verschieden brechbaren Strahlen entworfenen virtuellen Bilder nicht zusammen, sondern neben einander fallen, das rothe liegt am nächsten bei der leuchtenden Linie, das violette ist am weitesten entfernt.

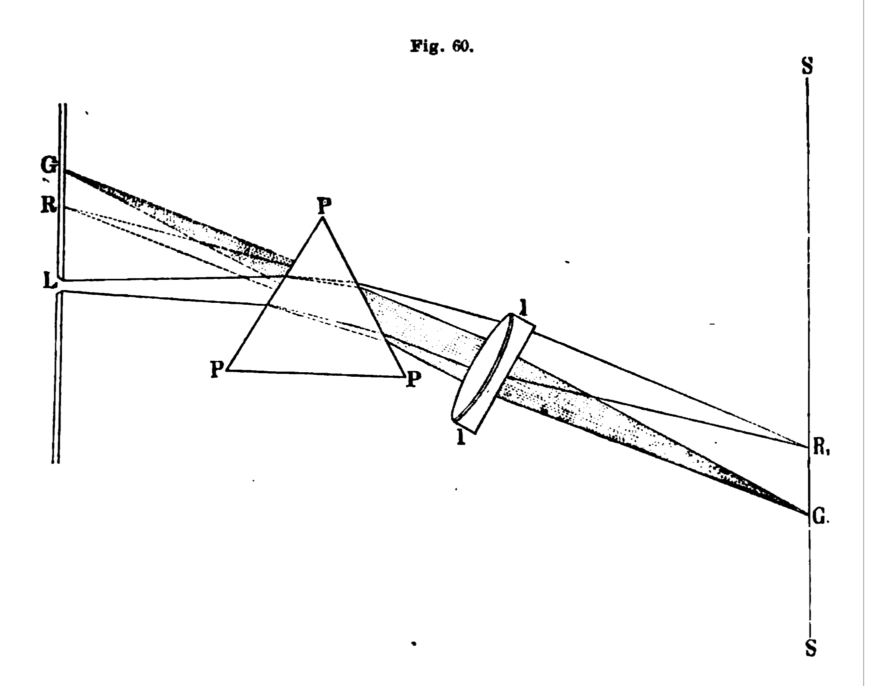
Bringen wir nun, wie in Fig. 60, sehr nahe hinter das Prisma eine achromatische Linse, so erzeugt diese, wie im §. 33 nachgewiesen wird, in einer bestimmten Entfernung hinter der Linse auf der Verbindungslinie des betreffenden virtuellen Bildes mit dem Mittelpunkte der Linse ein reelles Bild jenes virtuellen Bildes, in dem alle Strahlen gleicher Brechbarkeit vereinigt sind. Da nun die verschieden gefärbten virtuellen Bilder der Lichtlinie neben einander fallen, so thun es auch die reellen Bilder auf einem Schirme, den wir an der Stelle aufstellen, wo die reellen Bilder entworfen werden. Es versteht sich von selbst, dass wir auch hier nur eine sehr schmale Lichtlinie nehmen dürfen; denn ist dieselbe breit, so fallen auch die Bilder R und G und damit auch R_1 und G_1, deren Abstand durch die Differenz der Ablenkungen δ gegeben ist, nicht ganz neben, sondern noch theilweise über einander.

Will man so ein Spectrum objectiv auf einem Schirm entwerfen, so wendet man am besten eine Linse von 1^m Brennweite an, welche man in etwa 2^m Abstand von dem Spalte L unmittelbar hinter das Prisma stellt, während man dem Prisma eine solche Stellung gibt, dass die mittlern Strahlen des Spectrums das Minimum der Ablenkung erhalten. Der Schirm SS muss dann ebenfalls in etwa 2^m Entfernung von der Linse aufgestellt werden.

Erzeugt man so das Spectrum auf einem Schirme SS, so erscheint dasselbe als ein langes Farbenband, dessen Breite gleich ist der Länge der Spaltöffnung und dessen Länge abhängig ist von dem brechenden Winkel und der

Substanz des Prismas. Ausgezeichnet lange Spectra erzeugen die Prismen von 60° brechendem Winkel aus dem schwersten Flintglase des optischen Instituts von Merz in München. Eine Abbildung des Spectrums liefert Tafel I.

Fig. 60.



Bei einer oberflächlichen Betrachtung des Spectrums scheint dasselbe ganz stetig gefärbt zu sein und die Farben ganz allmählich in einander überzufliessen. Eine genauere Betrachtung schon mit freiem Auge zeigt indess, dass das keineswegs der Fall ist, dass vielmehr völlig dunkle Streifen von geringerer oder grösserer Breite das Spectrum der Quere nach, senkrecht zu seiner Längsausdehnung durchsetzen. Diese Streifen sind ganz unregelmässig im Spectrum vertheilt, sie kommen in allen Farben vor.

Fig. 61 zeigt die Streifen, welche es gelingt mit freien Augen in einem Spectrum zu erkennen, welches mit dem erwähnten Prisma aus Flintglas in der beschriebenen Weise auf einen Schirm geworfen wird. Die an dem Spectrum hingeschriebenen Zahlen geben die relative Lage der dunklen Linien an, dieselben bedeuten die Ablenkungen in Graden und Minuten, welche die Linien bei dem Minimum der Ablenkung in dem Merz'schen Prisma von 60° brechendem Winkel erfahren. Leicht gelingt es mit freien Augen den Streifen *A* im Rothen, *D* im Gelben, ungefähr an der Grenze von gelb und orange, *E* und *b* im Grünen, *G* im Blauen und die gezeichneten Streifen im Violett zu erkennen; unter günstigen Umständen ist auch *F* im Grünblauen zu sehen.

Diese Streifen liegen immer in demselben Theile des Spectrums, und behalten immer ihre gegenseitige Lage bei, wann und wo auch das Spectrum

untersucht wird, vorausgesetzt nur, dass man Sonnenlicht, direktes oder das von dem Himmel, weissen Wolken oder den Planeten reflectirtes anwendet. Die Streifen beweisen somit, dass in dem von der Sonne zu uns gelan-

Fig. 61.

genden Lichte nicht Strahlen aller möglichen Brechbarkeit innerhalb der Grenzen des Spectrums vorhanden sind, dass vielmehr Strahlen gewisser Brechbarkeit vollständig fehlen.

Die erwähnten dunklen Streifen im Sonnenspectrum wurden zuerst von Wollaston entdeckt und beschrieben,[1] später aber ebenfalls von Fraunhofer selbständig aufgefunden, der durch helle Streifen, die er im Spectrum des Lampenlichtes beobachtet hatte, veranlasst wurde, das Sonnenspectrum nach ähnlichen Erscheinungen zu untersuchen.[2]

Die Untersuchungsmethode Fraunhofer's war etwas anders als die eben erwähnte. Er beobachtete das Spectrum mit einem Fernrohr. Ebenso nämlich, wie man die das Prisma verlassenden Strahlen auf einer Linse auffangen kann, welche auf einem Schirme ein reelles Bild entwirft, so kann man sie auch auf das Objectiv eines Fernrohrs fallen lassen und dann das im Brennpunkte des Objectives erzeugte reelle Bild durch das Ocular des Fernrohrs betrachten. Fraunhofer liess zu dem Ende die durch eine schmale Oeffnung in ein verfinstertes Zimmer horizontal eintretenden Sonnenstrahlen auf ein Prisma von Flintglas mit verticaler brechender Kante fallen, welches vor dem Fernrohr eines Theodolithen und mit demselben fest verbunden aufgestellt war (Fig. 62). Der Theodolith war in möglichst grosser Entfernung von der Spaltöffnung (5 Meter) aufgestellt und zwar so, dass durch das Fernrohr der Spalt scharf begrenzt gesehen wurde, wenn das Prisma nicht vorgestellt war. Das Prisma war auf der Mitte einer drehbaren Scheibe befestigt, und wurde so gestellt, dass die durch dasselbe tretenden Strahlen das Minimum der Ablenkung erfuhren; das Theodolith-Fernrohr wurde dann so gedreht, dass die aus der zweiten Fläche des Prisma austretenden Strahlen in der Axe des Fernrohrs sich fortpflanzten. Auf diese Weise kann man zwar

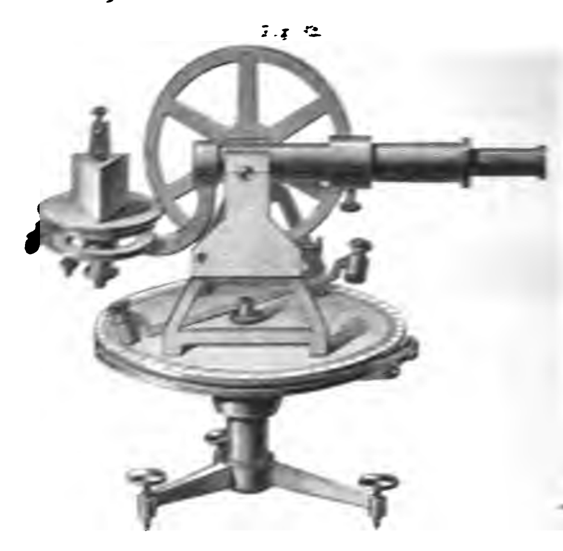
---

1) *Wollaston*, Philosophical Transactions for the year 1802.

2) *Fraunhofer*, Denkschriften der Münchner Akademie. Bd. V für die Jahre 1814 und 1815. Auch Gilbert's Annalen Bd. LVI.

immer nur einen Theil des Spectrums übersehen, diesen aber um so schärfer. Um dann nach und nach die verschiedenen Theile zu betrachten, genügt eine kleine Drehung des Fernrohrs oder des Prisma.

Fig. [illegible]



Auf diese Weise betrachtet, bot das Spectrum Fraunhofer eine sehr grosse Zahl, weit über 500 dunkle Linien dar, welche theils schärfer, theils schmäler, theils breiter über das ganze Spectrum unregelmässig vertheilt sind.

Die Wichtigkeit dieser Linien für die Lehre von der Lichtbrechung erkennend, da wir nur mit Hülfe dieser im Stande sind, Licht von bestimmter Brechbarkeit zu erhalten, suchte Fraunhofer einige leicht erkennbare Streifen zu bestimmen und bezeichnete sie von dem Rothen zum Violetten hin mit *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*. Diese Streifen sind in Fig. 61 in ihrer relativen Lage nebst einigen andern auffallenden Streifen dargestellt. Im rothen Theile des Spectrums liegen die Streifen *A* und *B*, und an der Grenze gegen Orange *C*. *A* ist ein einfacher, ziemlich breiter Streifen. *B* besteht aus einem Paar, dessen nach *A* gewandter Streifen der feinere ist. Zwischen *A* und *B*, näher bei *A* als bei *B*, liegt eine ziemlich breite Gruppe von Streifen *a*. *C* ist ein einfacher schwarzer Streifen. *D* an der Grenze von Gelb und Orange eine feine Doppellinie; *E* ist eine Gruppe von Streifen im Grünen, nahe bei ihm, ebenfalls noch im Grünen, liegt die Gruppe *b*. *F* im Grünblauen ist ein einfacher dunkler Streifen, während *G* im Tiefblauen, nahe der Grenze des Violett und *H* im Violetten ziemlich breite Streifengruppen sind.

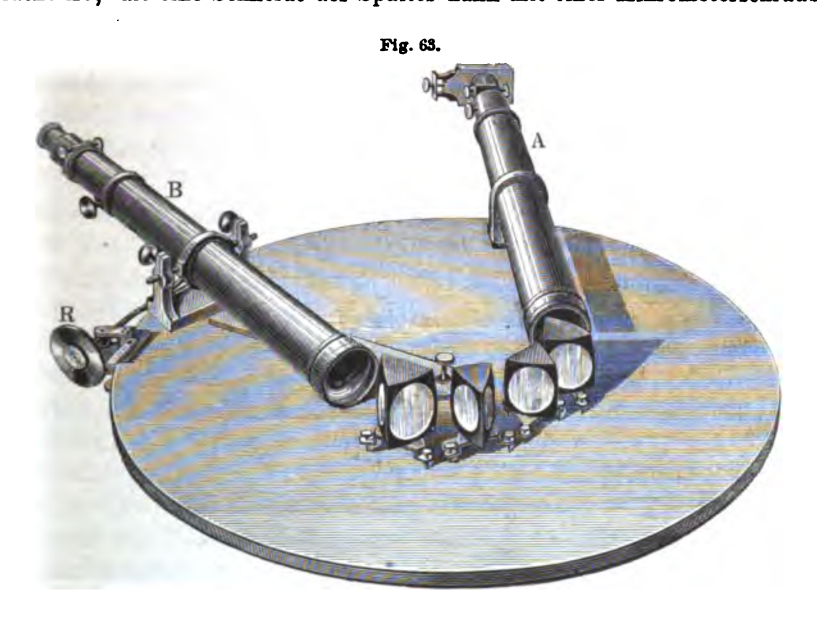
Eine weit genauere Kenntniss des Spectrums verdanken wir Kirchhoff,[1] der nach seinen und seines Schülers Hofmann Beobachtungen von *A* bis *G* in dem Sonnenspectrum mehr als 2000 Linien bezeichnete.

Die Methode der Kirchhoff'schen Beobachtung, welche seitdem im Wesentlichen bei allen Spectralbeobachtungen angewandt wird, weicht in einem Punkte von der Fraunhofer'schen ab; bei ihr lässt man nur parallele Strahlen

1) *Kirchhoff*, Untersuchungen über das Sonnenspectrum und die Spectren der chemischen Elemente. Abhandlungen der Berliner Akademie für 1861. Berlin 1861.

auf das Prisma fallen. Den von Kirchhoff angewandten Apparat zeigt Fig. 63. Eine mit einem Fuss versehene oben glatt gehobelte Eisenplatte trägt zunächst ein Fernrohr *A*, in welchem an Stelle des Oculars eine Spaltöffnung angebracht ist; die eine Schneide des Spaltes kann mit einer Mikrometerschraube

Fig. 63.



verstellt werden, so dass man dem Spalte jede beliebige Feinheit geben kann. Der Spalt, auf welchen der Fernrohraxe parallel mit einem Heliostaten die Strahlen der Sonne geworfen werden, befindet sich im Brennpunkte des Objectivs, so dass die durch den Spalt in das Fernrohr eindringenden Strahlen dasselbe durch das Objectiv einander und der Fernrohraxe parallel verlassen. Die Strahlen durchdringen dann der Reihe nach die 4 Prismen, welche zwischen dem Collimatorrohre *A* und dem Fernrohr *B* aufgestellt sind, und treten dann in das Objectiv des Fernrohrs *B*. Da, wie wir §. 17 nachwiesen, parallele Strahlen auch das Prisma als solche verlassen, so entwerfen die aus der letzten Prismenfläche austretenden Strahlen, wenn die Axe des Fernrohrs ihnen parallel gestellt ist, in dem Brennpunkte des Objectivs ein reelles Bild der Spaltöffnung. Dieses wird dann durch das Ocular betrachtet.

Da man bei dieser Beobachtungsmethode den Spalt sehr enge nehmen kann, so ist das Spectrum natürlich ein sehr reines, um so mehr, da durch die viermalige Dispersion in den vier Prismen die Ablenkung der verschiedenen Farben sehr verschieden ist. Da man nun ausserdem ein stark vergrösserndes Fernrohr anwenden kann, Kirchhoff wandte durchschnittlich eine 40malige an, so müssen selbst sehr feine Linien, welche im Sonnenspectrum vorhanden sind, sichtbar werden.

Wir theilen auf Tafel II und III die Kirchhoff'schen Zeichnungen mit,

deren Wichtigkeit bei den neuern spectroskopischen Untersuchungen immer grösser wird. Die Lage der Linien ist auf einer Millimeterskala angegeben, deren Anfangspunkt willkürlich gelegt ist; der Beginn des Spectrums ist mit 380 bezeichnet. Um die relative Lage der Linien zu bestimmen, diente die Mikrometerschraube am Fernrohr *B*. Das Fadenkreuz des Fernrohrs wurde auf eine Linie eingestellt und dann das Fernrohr mit der Mikrometerschraube so weit verschoben, dass das Fadenkreuz die nächste Linie erreichte u. s. f. Die Drehung der Mikrometerschraube lieferte dann die Abstände der einzelnen Linien. Die Zeichnungen geben ausserdem so genau wie möglich die Breite und Dunkelheit der einzelnen Linien wieder.

Um bestimmte Strahlen des Spectrums zu bezeichnen, wendet man jetzt ziemlich allgemein die Zahlen der Kirchhoff'schen Skala an, nur die von Fraunhofer schon mit Buchstaben bezeichneten Linien haben ihre alten Benennungen beibehalten. Wie indess die Tafeln zeigen, bestehen dieselben bei dieser Vergrösserung meist aus ganzen Gruppen von Linien, so *C* aus dreien, denen nach Kirchhoff die Zahlen 1633,4, 1648,3 und 1655 entsprechen. Bei Anwendung stark dispergirender Prismen und starker Vergrösserung wird man deshalb auch für die Fraunhofer'sche Bezeichnung besser die Kirchhoff'sche wählen. Die Kirchhoff'sche Zeichnung des Spectrums gibt nur die relative Lage der Linien im Spectrum, eine genauere Bestimmung derselben auf anderm Wege werden wir an einer andern Stelle kennen lernen. Ebenso werden wir im nächsten Kapitel die Bedeutung der auf den Spectraltafeln unter den einzelnen Spectren angegebenen Zeichen besprechen.

§. 24.

Bestimmung der Brechungsexponenten fester und flüssiger Körper. Das früher angedeutete Verfahren, die Brechungsexponenten zu bestimmen, ist keiner grossen Genauigkeit fähig, und überdies nur für flüssige Körper brauchbar. Wir haben aber in der Ablenkung des Lichtes durch Prismen ein Mittel erhalten, um die Brechungsexponenten sowohl der festen als der flüssigen Körper mit grösster Genauigkeit und für ganz bestimmte Lichtarten zu erhalten, indem wir, die Dispersion durch eben dieselben Prismen benutzend, die Ablenkung einer bestimmten dunklen Linie beobachten.

Die festen Körper, Gläser und sonstige durchsichtige Substanzen werden unmittelbar in Prismenform hergestellt, und ihr brechender Winkel durch irgend ein Anlegegoniometer oder genauer durch das Wollaston'sche Reflexionsgoniometer gemessen. Die zu untersuchenden Flüssigkeiten werden in Hohlprismen gefasst, deren Seiten aus genau planparallelen Glasplatten bestehen. Da das Licht durch parallele Flächen keine Ablenkung erfährt, so haben die Gläser auf den Gang der Lichtstrahlen keinen Einfluss, und die beobachtete Ablenkung wird nur durch die prismatisch begrenzte Flüssigkeit hervorgebracht.

Dieselbe Versuchsmethode, welche Fraunhofer dazu diente, um die dunklen Linien im Spectrum zu beobachten, wandte er auch an, um für eine Reihe von Substanzen die Brechungsexponenten zu bestimmen[1]). Der Theodolith, vor dessen Fernrohr die drehbare Scheibe angebracht ist, welche das zu untersuchende Prisma aufnehmen soll, wird zunächst in möglichst grosser Entfernung von der Spaltöffnung so aufgestellt, dass der Beobachter die Mitte der Spaltöffnung am Fadenkreuz des Fernrohres sieht. Am Horizontalkreise des Theodolithen wird dann die Stellung der Fernrohraxe, also die Richtung der einfallenden Strahlen bestimmt. Nehmen wir an, der Nonius, an welchem die Stellung abgelesen wird, zeige gerade auf 0^0. Hierauf wird auf der drehbaren Scheibe vor dem Fernrohr das Prisma mit verticaler brechender Kante aufgestellt und das Fernrohr des Theodolithen so gedreht, dass der Streifen des Spectrums, dessen Brechungsexponent bestimmt werden soll, an dem verticalen Faden des Fadenkreuzes erscheint. Durch eine Drehung der Scheibe und mit ihr des Primas wird dann der Einfallswinkel des Lichtes so lange geändert, bis der zu beobachtende Streifen gerade das Minimum der Ablenkung erfährt, und dann das Fernrohr wieder so gedreht, dass der Streifen wieder an dem verticalen Faden des Fadenkreuzes erscheint. Der Winkel, welchen die Fernrohraxe jetzt mit der ersten Lage bildet, und den wir direkt am Nonius des Horizontalkreises ablesen, ist dann der Winkel, welchen die abgelenkten Strahlen mit den einfallenden bilden. Dieser Winkel δ ist somit das Minimum der Ablenkung für den in Rede stehenden Streifen. Ist dann α der gemessene brechende Winkel des Prismas, so ist nach §. 16

$$n = \frac{\sin \frac{\delta + \alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

der Brechungsexponent des Lichtes, welches, wenn im Sonnenspectrum vorhanden, an der Stelle des Streifens erscheinen würde, oder der Brechungsexponent des entsprechenden Streifens. Durch erneuerte Drehung des Fernrohrs und Stellung des Prismas erhält man dann die Brechungsexponenten der übrigen Streifen.

Sehr viel bequemer und auch genauer lässt sich die Bestimmung der Brechungsexponenten vornehmen mit Hülfe von Apparaten, welche das Prisma in der Mitte des getheilten Kreises aufstellen, um dessen Axe das Fernrohr drehbar ist. Wir beschreiben von diesen Apparaten das von Meyerstein in Göttingen[2]) construirte Spectrometer. Die Einrichtung desselben zeigt Fig. 64. Der massive mit Stellschrauben versehene Dreifuss D des Instrumentes

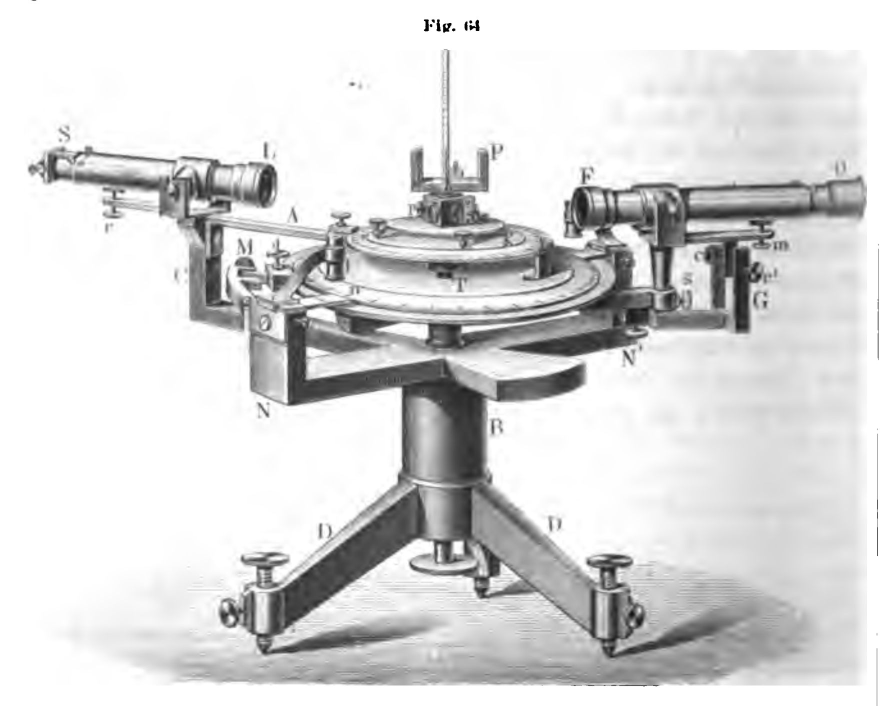
---

1) *Fraunhofer,* Denkschriften der Münchner Akademie. Bd. V für die Jahre 1814—1815. Gilbert's Annalen. Bd. LVI.

2) Eine Beschreibung des Spectrometers in seiner ältern Form gibt *Meyerstein,* Poggend. Annal. Bd. XCVIII.

trägt eine Büchse, welche genau cylindrisch durchbohrt ist. An der Büchse sind drei in einer horizontalen Ebene befindliche massive Arme, *N*, *N'* und *C* befestigt, von denen der letztere ein ebensolches Collimatorrohr *SL* trägt, wie es der Kirchhoff'sche Spectralapparat besitzt; der Spalt *S* befindet sich in dem Brennpunkt der Linse *L*, so dass die durch den Spalt eindringenden und die Linse treffenden Strahlen das Rohr als ein paralleles Strahlenbündel verlassen. Die Axe des Rohres ist gegen den Mittelpunkt des Theilkreises *T* gerichtet; die kleine als dritter Unterstützungspunkt für das Rohr *SL* dienende Schraube *r* gestattet die Axe des Rohres der Ebene des Theilkreises parallel zu stellen.

Fig. 64



Der Theilkreis *T* ist auf einer starken in die Büchse *B* genau einpassenden Stahlaxe befestigt. An dieser Stahlaxe ist der Träger *sm* des Beobachtungsfernrohrs *FO* angeschraubt; derselbe ist eingerichtet wie der Träger des Collimatorrohres, jedoch mit dem Unterschiede, dass der ganze Träger, wenn die Schraube bei *s* gelöst wird, mit dem Fernrohr von dem Apparate entfernt werden kann. Um die Axe des Rohres der Ebene des Kreises *T* parallel zu stellen, dient der dritte Stützpunkt des Fernrohrs, die Schraube *m*, und um die Axe genau gegen die Axe des Kreises *T* zu richten geht von dem Träger ein Ansatzstück vertical herab, welches bis zwischen die Enden der Schrauben *c* und *c'* reicht. Durch Anziehen der einen Schraube *c* und Lösen der andern kann der Träger um seine Axe bei *s* etwas gedreht werden. Die Theilung des Kreises *T* ist auf

einem eingelegten Silberstreifen so aufgetragen, dass wenn die Axen des Rohres *SL* und des Beobachtungsfernrohres *FO* in einer geraden Linie liegen, der Nullpunkt der Theilung an dem Nullpunkt des Nonius *n* sich befindet. Dieser Nonius *n* wird von dem Arme *N* getragen; der Arm *N* trägt ebenfalls eine Mikrometerschraube, durch welche, wenn der Theilkreis durch die Druckschraube *d* an ihr befestigt wird, die feinste Einstellung des Theilkreises bewirkt wird. Die Ablesung am Nonius geschieht durch die Lupe *l*. Zur Controle der einen Ablesung am Nonius *n* dient ein zweiter Nonius, der gerade so an dem Arme *N'* befestigt ist, wie der Nonius *n* an *N*. An dem Arme *N'* ist ausserdem durch einen Bogen eine Gabel *P* befestigt, welche dieselbe Einrichtung hat als der Träger *sm*, und auf welche man zu gewissen Beobachtungen das Beobachtungsfernrohr *FO* legt.

Die den Theilkreis tragende Stahlaxe ist vertical von oben nach unten genau cylindrisch angebohrt, und in diese Bohrung passt eine zweite Stahlaxe, welche den kleinen Theilkreis *K* trägt, dessen Ebene genau der Ebene des grossen Theilkreises parallel ist. Die Stellung des kleinen Theilkreises, der ebenfalls seine Theilung in einem eingelegten Silberstreifen trägt, wird an dem Nonius *v* abgelesen. Durch das Anziehen einer in der Zeichnung durch das Prisma verdeckten Druckschraube kann der kleine Theilkreis mit dem grossen fest verbunden werden, so dass er sich gleichzeitig und gemeinschaftlich mit demselben um die verticale Hauptaxe des ganzen Instrumentes drehen kann. Andererseits kann aber auch der Theilkreis *K* durch eine an dem von *C* getragenen Arme *A* angebrachte Druckschraube festgestellt werden, so dass er an der Drehung des grossen Kreises nicht theilnimmt.

Auf dem kleinen Kreise *K* befindet sich ein kleines mit drei Stellschrauben versehenes Tischchen, dessen Ebene mit Hülfe dieser Stellschrauben der Ebene der Theilkreise genau parallel gestellt werden kann. Auf dieses Tischchen werden schliesslich die Prismen gestellt, deren optisches Verhalten untersucht werden soll. Das Prisma *p* in der Zeichnung stellt ein Meyerstein'sches Hohlprisma zur Untersuchung von Flüssigkeiten dar. Dasselbe besteht aus einem Prisma von schwarzem Glase, welches eine zu der die brechende Kante aufnehmenden Halbirungsebene senkrechte weite Durchbohrung hat. Diese Durchbohrung wird auf den Seitenflächen des Prismas durch planparallele Glasplatten, die mit Federn angedrückt werden, geschlossen. Von der obern Basis des Prismas führt eine Durchbohrung in den Hohlraum, welche einmal dazu dient, das Prisma zu füllen, dann aber auch bei den Versuchen zur Aufnahme eines Thermometers, mit welchem man die Temperatur der untersuchten Flüssigkeit bestimmt.

Die Methode der Beobachtung ergibt sich aus der Beschreibung des Apparates unmittelbar. Das Beobachtungsfernrohr wird zunächst auf einen fernen Gegenstand eingestellt, dann auf die entsprechende Gabel gelegt, und der Theilkreis so gestellt, dass der Nonius auf null zeigt. Die von dem Spalt ausgehenden und das Objectiv des Spaltrohrs durchsetzenden Strahlen fallen dann,

wenn der Spalt genau im Brennpunkt des Objectives sich befindet, als paralleles Strahlenbündel auf das Objectiv des Beobachtungsrohres, und man sieht dann ein scharfes Bild der Spalte. Fällt dasselbe nicht genau mit dem Fadenkreuz zusammen, so wird durch die an dem Fernrohrträger angebrachte Correctionsschraube *c* das Fernrohr so weit verstellt, bis das Fadenkreuz das Bild des Spaltes deckt. Ist das Bild des Spaltes nicht ganz scharf, so wird der Spalt selbst soweit verstellt, bis das Bild scharf erscheint.

Auf diese Weise ist die Richtung des einfallenden Lichtes fest bestimmt: man stellt jetzt auf den mittlern Tisch des Apparates das Prisma und schiebt das Beobachtungsfernrohr so weit zur Seite, bis die das Prisma verlassenden Strahlen das Objectiv des Fernrohrs treffen, und stellt dann das Fernrohr so, dass das Fadenkreuz eine bestimmte Linie des Spectrums deckt. Um dann das Minimum der Ablenkung zu erhalten, dreht man den kleinen Theilkreis des Apparates und mit demselben das Prisma nach der einen oder andern Seite, und folgt, wenn die Ablenkung der betrachteten Linie kleiner wird, mit dem Beobachtungsrohr so lange, bis bei weiterer Drehung des Prismas in demselben Sinne die Ablenkung der Linie wieder grösser wird. Man stellt dann das Fernrohr wieder genau auf die Linie ein, indem man zuletzt die Mikrometerschraube zu Hülfe nimmt. Der Winkel, um den man das Fernrohr jetzt aus seiner Anfangsstellung gedreht hat, und den man direkt am Nonius abliest, ist dann die Minimalablenkung des betrachteten Strahles.

Damit das genau der Fall sei, ist indess erforderlich, dass die Einfallsebene des Strahles genau der Drehungsebene des Theilkreises parallel, oder dass die Ebene der beiden Prismenflächen genau senkrecht zur Ebene des Theilkreises sei. Um das zu controliren, eventuell zu corrigiren, benutzt man die Spiegelung des Fadenkreuzes. Zu dem Ende ist dem Apparate für das Beobachtungsfernrohr ein Ocular beigegeben, welches an der Seite aufgeschnitten ist, und welches im Innern ein kleines planparalleles Gläschen hat, das gegen die Axe des Fernrohrs um 45^0 geneigt ist, so dass Strahlen, welche durch den Ausschnitt des Oculares auf die Glasfläche fallen, nach dem Fadenkreuz und weiter nach dem Objective des Fernrohrs hin reflectirt werden. Treffen diese Strahlen ausserhalb des Fernrohrs eine spiegelnde Fläche, welche senkrecht steht zur Axe des Fernrohrs, so werden dieselben zum Fernrohr hin reflectirt, und man sieht dann beim Hineinblicken in das Fernrohr das reflectirte Bild des Fadenkreuzes, und zwar deckt dasselbe das Fadenkreuz selbst, wenn die spiegelnde Fläche genau senkrecht ist zur Fernrohraxe.

Um nun diese Methode zur Correction zu benutzen, stellt man das Prisma, nachdem man den Theilkreis und Tisch des Apparates mit einer Libelle horizontal gestellt hat, auf den kleinen Tisch und richtet die eine Prismenfläche gegen das Fernrohr; durch vorsichtiges Drehen des Prismas mit dem Tischchen und eventuell gelindes Neigen der Prismenfläche wird man es dann unschwer dahin bringen, dass man ein reflectirtes Bild des Fadenkreuzes sieht, und dass der Verticalfaden des reflectirten Bildes den Verticalfaden des Faden

kreuzes deckt; den Horizontalfaden des Bildes bringt man dann mit dem des Fadenkreuzes dadurch zur Deckung, dass man die Hälfte der Abweichung durch Heben oder Senken der Fernrohraxe mit der dasselbe tragenden Schraube, die andere Hälfte durch Correction an den Stellschrauben des Tischchens fortnimmt. Nachdem so die eine Prismenfläche senkrecht zur Axe des Fernrohrs gestellt ist, dreht man das Tischchen mit dem Prisma so weit, bis man das Fadenkreuz von der zweiten Prismenfläche reflectirt sieht, und bis die Verticalfäden des Bildes und des Fadenkreuzes sich decken; die Horizontalfäden werden sich dann im Allgemeinen nicht decken; man bringt sie dann wieder zur Deckung, indem man zur Hälfte durch Correction des Fernrohrs, zur Hälfte durch Correction an den Stellschrauben des Tischchens die Abweichung zum Verschwinden bringt. Dreht man das Prisma dann in die frühere Lage, so ist eine neue Correction erforderlich, die man vornimmt; dann dreht man das Prisma wieder in die zweite Lage, corrigirt wieder u. s. f., bis beim Uebergang aus der einen in die andere Lage keine Correction mehr erforderlich ist. Ist das erreicht, so ist die Einfallsebene der Strahlen der Ebene des Theilkreises parallel, und die in der vorhin angegebenen Weise beobachtete Ablenkung ist die Minimalablenkung.

Die Messung des brechenden Winkels wird ebenfalls mit demselben Apparate durch Spiegelung des Fadenkreuzes vorgenommen. Will man den brechenden Winkel an dem kleinen Kreise messen, so hat man bei den vorhin angegebenen Versuchen zur Justirung des Apparates nur an der Theilung des kleinen Kreises den Winkel zu messen, um welchen man denselben gedreht hat, um das Prisma aus der einen in die andere Lage zu bringen. Dieser Winkel ergänzt, wie leicht zu sehen ist, den brechenden Winkel zu 180^0. Will man den brechenden Winkel am grossen Kreise messen, so legt man das Fernrohr auf die seitlich angebrachte feste Gabel P, und verfährt ganz in der angegebenen Weise, indem man jetzt den kleinen Kreis an dem grossen festklemmt, und nun durch Drehung des grossen Kreises das Prisma in die beiden Lagen bringt, dass man das Bild des Fadenkreuzes von beiden Prismenflächen mit dem Fadenkreuz selbst zur Deckung bringt. Die grössten Spectrometer Meyerstein's, mit zwölfzölligem Theilkreis, gestatten so die Winkel bis auf einzelne Sekunden genau zu bestimmen.

Der beschriebene Apparat hat also nicht nur den Vorzug, dass man an demselben alle Correctionen leicht anbringen, sondern, dass man mit demselben auch alle erforderlichen Messungen ausführen kann. Derselbe hat noch einen weitern Vorzug, nämlich den, dass man zu den Messungen künstliche Lichtquellen anwenden kann. Bei der Fraunhofer'schen Methode muss, wie wir erwähnten, die Entfernung des Theodolithen vom Spalt möglichst gross genommen werden; deshalb kann man das Sonnenlicht nicht durch künstliche Lichtquellen, deren geringe Lichtstärke dann nicht ausreicht, ersetzen. Bei dem Spectrometer dagegen bringt man die Lichtlinie unmittelbar vor dem Spalt an, und da genügt schon eine geringe Lichtstärke zu den Beobachtungen.

Man wendet deshalb in neuerer Zeit vielfach zu Bestimmungen von Brechungsexponenten das Licht des glühenden Wasserstoffgases an, welches sogenannte Geissler'sche Röhren aussenden, in denen Wasserstoff unter einem Drucke von etwa 5^{mm} eingeschlossen ist, wenn man durch sie den Strom eines elektrischen Inductionsapparates sendet. Wir werden diese Lichtquellen im nächsten Kapitel besprechen, jetzt sei nur erwähnt, dass das Wasserstofflicht unter diesen Umständen in seinem Spectrum nur drei helle Linien zeigt, welche Plücker $H\alpha$, $H\beta$, $H\gamma$ genannt hat. Die erste derselben fällt mit der Fraunhofer'schen Linie C, die zweite mit F zusammen, die dritte entspricht einer dunklen Linie nahe vor G, sie ist Fig. 61 in dem Spectrum als $H\gamma$ eingetragen. Man erhält so allerdings nur die Brechungsexponenten von drei Linien, im Allgemeinen reichen dieselben indess vollständig aus.

In den nachstehenden Tabellen geben wir zunächst einige Brechungsexponenten fester und flüssiger Körper, welche nach der Fraunhofer'schen Methode von Fraunhofer selbst, von Merz [1]), Dutirou [2]) und Baden Powell [3]) bestimmt sind.

---

1) *Merz,* Die Fortschritte der Physik im Jahre 1863 dargest. von der Berliner physikal. Gesellsch. p. 184.

2) *Dutirou,* Annales de chim. et de phys. III. Sér. Bd. XXVIII.

3) *Baden Powell,* Poggend. Annal. Bd. LXIX.

I. Verschiedene Glassorten.

Brechendes Mittel	Dichte	Brechungsexponent							Beobachter
		B	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	
Flintglas v. Guinand gelb mit Borsäure	3,417	1,769702	1,771761	1,777664	1,785254	1,792420	1,806195	1,818597	Dutirou
Flintglas von Merz cca 70 Proc. Blei		1,721784	1,724503	1,732123	1,742537	1,752140	1,772459	1,789454	Merz
Flintgl. v. Fraunhofer	2,135	1,701050	1,702642	1,707264	1,713134	1,718673	1,728423	1,738154	Dutirou
Flintgl. v. Bontemps	2,011	1,691900	1,693496	1,697967	1,703518	1,708917	1,718725	1,727522	„
Flintglas v. Guinand mit Borsäure	4,322	1,690627	1,692252	1,696515	1,702177	1,707312	1,717111	1,725883	„
Flintglas Nro. 13	3,723	1,627749	1,629681	1,635036	1,642024	1,648260	1,660285	1,671062	Fraunhofer
Guinand'sches Glas mit Borsäure	2,642	1,618376	1,619340	1,622091	1,625459	1,628388	1,633945	1,638699	Dutirou
Crowngl. v. Guinand	2,184	1,611668	1,612624	1,615198	1,618529	1,621274	1,626532	1,630805	„
Venetianisches Glas	2,713	1,610960	1,611960	1,614367	1,617718	1,620625	1,625994	1,630453	„
Crowngl. v. Dollond	2,484	1,607933	1,608933	1,611428	1,614660	1,617457	1,622696	1,627094	„
Flintglas Nro. 3	3,512	1,602042	1,603803	1,608494	1,614532	1,620042	1,630772	1,640373	Fraunhofer
Crowngl. v. Bontemps	2,447	1,596879	1,597770	1,600233	1,603323	1,606123	1,611211	1,615640	Dutirou
Glas von St. Gobin	2,329	1,586757	1,587683	1,590112	1,593036	1,595808	1,600642	1,604761	„
Crownglas Ltr. M.	2,756	1,554774	1,555933	1,559075	1,563150	1,566741	1,573535	1,579470	Fraunhofer
Crownglas Nro. 9	2,535	1,525832	1,526849	1,529587	1,533005	1,536052	1,541657	1,546566	„
Crownglas Nro. 13	2,535	1,524312	1,525299	1,527982	1,531372	1,534337	1,539908	1,544684	„

Die verschiedenen Gläser unterscheiden sich durch ihre Zusammensetzung, das Flintglas zeichnet sich vor den übrigen durch einen Gehalt an Blei aus.

Man sieht aus dieser Tabelle, dass die optische Dichtigkeit keineswegs mit der Dichtigkeit der Substanzen im gewöhnlichen Sinne zusammenfällt.

Die Substanzen in dieser Tabelle sind so geordnet, dass die Brechungsexponenten von oben nach unten stetig kleiner werden, wie man sieht ist das mit den Dichtigkeiten keineswegs der Fall; die beiden leichtesten Glasarten, das von Dutirou untersuchte Flintglas von Fraunhofer und Bontemps haben fast die grössten Brechungsexponenten.

II. Flüssige Körper.

Brechendes Mittel	Dichte	Temperatur	Brechungsexponenten							Beobachter
			B	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	
Wasser	1,000	15° R.	1,330935	1,331712	1,333577	1,335851	1,337818	1,341293	1,344177	Fraunhofer
Wasser	1,000	15°,8 C.	1,3317	1,3326	1,3343	1,3364	1,3386	1,3429	1,3448	Baden Powell
Alkohol	0,815	17°,6 C.	1,3628	1,3633	1,3654	1,3675	1,3696	1,3733	1,3761	„
Salzsäure	1,162	18°,6 C.	1,4050	1,4065	1,4095	1,4130	1,4160	1,4217	1,4261	„
Schwefelsäure	1,835	18°,6 C.	1,4321	1,4329	1,4351	1,4380	1,4400	1,4440	1,4463	„
Terpentinöl	0,885	8°,5 R.	1,4704	1,4715	1,4744	1,4783	1,4817	1,4881	1,4938	Fraunhofer
Angelikaöl	—	21° C.	1,484	1,486	1,489	1,493	1,496	1,505	1,509	Baden Powell
Creosot	—	18°,2 „	1,5319	1,5335	1,5383	1,5452	1,5515	1,5639	1,5744	„
Anisöl	—	15°,1 „	1,5486	1,5508	1,5572	1,5659	1,5743	1,5912	1,6084	„
Cassiaöl	—	10° „	1,5963	1,6007	1,6104	1,6249	1,6389	1,6698	1,7039	„
„	—	14° „	1,5945	1,5979	1,6073	1,6207	1,6358	1,6671	1,7025	„
„	—	22°,5 „	1,5895	1,5930	1,6026	1,6174	1,6314	1,6625	1,6985	„
Schwefelkohlenstoff	—	15°,6 „	1,6182	1,6219	1,6308	1,6438	1,6555	1,6799	1,7019	„
Salzlösungen										
Salpeters. Wismuthoxyd	—	22° „	1,3306	1,3315	1,3332	1,3355	1,3374	1,3410	1,3437	„
Zinkchlorid	—	22° „	1,3351	1,3402	1,3421	1,3444	1,3466	1,3501	1,3534	„
Essigs. Bleioxyd, basisch	—	15° „	1,3350	1,3357	1,3373	1,3398	1,3417	1,3453	1,3481	„
„ „ neutrales	—	19° „	1,3429	1,3437	1,3455	1,3480	1,3498	1,3538	1,3571	„
Salpeters. Bleioxyd	—	17°,8 „	1,3455	1,3461	1,3482	1,3506	1,3528	1,3568	1,3600	„
Glaubersalz	—	22° „	1,3392	1,3398	1,3419	1,3442	1,3462	1,3499	1,3528	„
Chlorbarium	—	21°,8 „	1,3392	1,3398	1,3419	1,3442	1,3462	1,3499	1,3528	„
Chlorcalcium	—	22°,2 „	1,4006	1,4016	1,4040	1,4070	1,4099	1,4150	1,4190	„
Kalilösung	1,416	9° R.	1,3996	1,4005	1,4028	1,4056	1,4080	1,4125	1,4163	Fraunhofer
Natronlösung	1,34	16° C.	1,4036	1,4039	1,4075	1,4109	1,4134	1,4181	1,4221	Baden Powell

Das in den beiden letzten Tabellen mitgetheilte Material gestattet uns zunächst die in §. 20 angeführten Gleichungen, welche die Abhängigkeit der Brechungsexponenten von der Farbe des Lichtes darstellen, zu prüfen. Allerdings haben wir bisher noch kein Mittel kennen gelernt, die Werthe der Wellenlängen für die verschiedenen Farben zu bestimmen, wir werden diese Methoden im zweiten Abschnitt kennen lernen; vorgreifend zum Zwecke der erwähnten Prüfung theilen wir hier die von Fraunhofer bestimmten Wellenlängen mit. Dieselben sind

		Millimeter
für die dunkle Linie B	(roth)	$\lambda = 0{,}0006878$
" " " " C	(roth)	$\lambda = 0{,}0006564$
" " " " D	(gelb)	$\lambda = 0{,}0005888$
" " " " E	(grün)	$\lambda = 0{,}0005265$
" " " " F	(grünblau)	$\lambda = 0{,}0004851$
" " " " G	(violett)	$\lambda = 0{,}0004292$
" " " " H	(violett)	$\lambda = 0{,}0003945.$

Zur Prüfung der aufgestellten Dispersionsformeln kann man nun am bequemsten so verfahren, dass man für irgend eine Substanz aus zwei im Spectrum weit aus einander liegenden Strahlen die in den Gleichungen vorkommenden Constanten bestimmt, und mit diesen dann die Brechungsexponenten sämmtlicher Strahlen berechnet.

Bezeichnen wir die Brechungsexponenten zweier Strahlen mit n_1 und n_2, die zugehörigen Wellenlängen mit λ_1 und λ_2, so gibt die Cauchy'sche Formel folgende zwei Gleichungen

$$n_1 = A + \frac{B}{\lambda_1^2};\quad n_2 = A + \frac{B}{\lambda_2^2}$$

und daraus

$$\frac{n_2 - n_1}{\frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda_1^2}} = B;\quad \frac{n_1\,\lambda_1^2 - n_2\,\lambda_2^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} = A$$

und mit den so bestimmten A und B berechnen wir dann sämmtliche für die Substanz beobachteten Werthe von n.

Um die Constanten n_0 und λ_0 der Christoffel'schen Formel zu berechnen, schreiben wir dieselbe zunächst

$$n^2 = \frac{2\,.\,n_0^2}{\left(\sqrt{1+\frac{\lambda_0}{\lambda}} + \sqrt{1-\frac{\lambda_0}{\lambda}}\right)^2} = \frac{2\,n_0^2}{2 + 2\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2}}$$

$$n^2 = \frac{n_0^2\,\lambda}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \lambda_0^2}}$$

$$n^2 \cdot \sqrt{\lambda^2 - \lambda_0^2} = \lambda\,(n_0^2 - n^2)$$

$$\lambda^2 - \lambda_0^2 = \lambda^2\left(\frac{n_0^2}{n^2} - 1\right)^2 \quad \ldots \text{(a).}$$

Bezeichnen wir jetzt wieder die Elemente zweier Strahlen mit n_1, λ_1 und n_2, λ_2, so ergibt sich aus dieser Gleichung

$$\lambda_1^2 - \lambda_2^2 = \lambda_1^2 \left(\frac{n_0^2}{n_1^2} - 1\right)^2 - \lambda_2^2 \left(\frac{n_0^2}{n_2^2} - 1\right)^2,$$

aus welcher man unmittelbar für n_0 ableitet

$$n_0^2 = 2\,\frac{\frac{\lambda_1^2}{n_1^2} - \frac{\lambda_2^2}{n_2^2}}{\frac{\lambda_1^2}{n_1^4} - \frac{\lambda_2^2}{n_2^4}} = 2\,\frac{n_1^2 \cdot \frac{n_2^4}{\lambda_2^2} - n_2^2\,\frac{n_1^4}{\lambda_1^2}}{\frac{n_2^4}{\lambda_2^2} - \frac{n_1^4}{\lambda_1^2}}.$$

Lösen wir dagegen die Gleichung (a) nach λ_0^2 auf, so erhält man leicht

$$\lambda_0^2 = 2\,n_0^2\,\frac{n_2^2 - n_1^2}{\frac{n_2^4}{\lambda_2^2} - \frac{n_1^4}{\lambda_1^2}}.$$

In den nachfolgenden Tabellen sind zur Vergleichung einige der beobachteten und nach der Formel von Cauchy und der von Christoffel berechneten Brechungsexponenten zusammengestellt. Die Brechungsexponenten sind bis auf vier Decimalen angegeben, zur Berechnung der Constanten sind die Strahlen B und G benutzt.

1. Flintglas von Merz.

Die Constanten der Formel von Cauchy sind

$$A = 1{,}6895;\quad B = 1{,}5276,$$

wenn die Wellenlängen so geschrieben werden, dass die zehntausendstel Millimeter als Einheit gesetzt sind.

Die Constanten der Formel von Christoffel sind in denselben Einheiten

$$n_0 = 2{,}39606;\quad n_0 \,.\, \sqrt{2} = 3{,}3885;\quad \lambda_0 = 2{,}4093.$$

Strahl	n beobachtet	n nach Cauchy	Δ	n nach Christ.	Δ
B	1,7218	1,7218	0	1,7218	0
C	1,7245	1,7249	− 4	1,7246	− 1
D	1,7321	1,7335	− 14	1,7326	− 5
E	1,7425	1,7447	− 22	1,7409	+ 16
F	1,7521	1,7546	− 25	1,7534	− 12
G	1,7724	1,7724	0	1,7724	0
H	1,7894	1,7885	+ 9	1,7904	+ 10

2. Flintglas von Guinand gelb mit Borsäure.

$$A = 1{,}7464;\quad B = 1{,}1001$$
$$n_0 = 2{,}4733;\quad \lambda_0 = 2{,}0763.$$

Strahl	n beobachtet	n nach Cauchy	Δ	n nach Christ.	Δ
B	1,7697	1,7697	0	1,7697	0
C	1,7718	1,7719	− 1	1,7718	0
D	1,7777	1,7781	− 4	1,7778	− 1
E	1,7852	1,7862	− 10	1,7855	− 3
F	1,7924	1,7933	− 9	1,7927	− 3
G	1,8062	1,8062	0	1,8062	0
H	1,8186	1,8177	+ 9	1,8184	− 2

Die beiden Tabellen geben schon zu erkennen, dass bei Substanzen von so starker Dispersion die Formel von Cauchy bis zum zweiten Gliede zur Darstellung der Beobachtungen nicht ausreicht, denn in beiden Fällen weichen Rechnung und Beobachtung schon in der dritten Decimale von einander ab. Sehr viel näher schliessen Rechnung und Beobachtung einander an, wenn man die Formel von Cauchy mit drei Constanten anwendet

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}.$$

Für das Flintglas von Merz erhalten wir aus den Brechungsexponenten der Strahlen B, E, G die Constanten

$$A = 1{,}6986; \quad B = 0{,}92754; \quad C = 7{,}9556$$

und als Werthe für n

$B = 1{,}7218$ $E = 1{,}7425$ $G = 1{,}7724$
$C = 1{,}7254$ $F = 1{,}7524$ $H = 1{,}7911$
$D = 1{,}7320.$

Die so bestimmten Zahlen weichen bis auf die letzte nur mehr in der vierten Decimale von den beobachteten ab; noch genauer stimmen die berechneten Zahlen für das Guinand'sche Flintglas mit den beobachteten überein. Für dieses werden die Constanten ebenfalls aus B, E, G berechnet

$$A = 1{,}7508; \quad B = 0{,}82073; \quad C = 3{,}7032$$

und die Werthe von n sind

$B = 1{,}7697$ $D = 1{,}7776$ $F = 1{,}7924$
$C = 1{,}7718$ $E = 1{,}7852$ $G = 1{,}8062$
$H = 1{,}8189.$

Die einzigen Differenzen sind D um eine und H um drei Einheiten der vierten Decimale. In beiden Fällen schliesst sich also die Cauchy'sche Formel mit drei Constanten den Beobachtungen noch näher an als die Formel von Christoffel. Ganz dasselbe zeigt sich bei andern stark dispergirenden Substanzen, so bei einer von Dale und Gladstone [1]) untersuchten Lösung von Phosphor in Schwefelkohlenstoff. Für diese sind die Constanten der Cauchy'schen Formel

$$A = 1{,}8831; \; B = 1{,}9497; \; C = 15{,}995,$$

die der Christoffel'schen

$$n_0 = 2{,}6605; \; \lambda_0 = 3{,}0334.$$

Strahl	n beobachtet	n nach Cauchy	Δ	n nach Christ.	Δ
B	1,9314	1,9314	0	1,9314	0
C	—	1,9369	—	1,9369	—
D	1,9527	1,9527	0	1,9523	+ 4
E	1,9744	1,9744	0	1,9737	+ 7
F	1,9941	1,9952	— 11	1,9942	— 1
G	2,0361	2,0361	0	2,0361	0
H	2,0746	2,0747	— 1	2,0783	— 37

1) *Dale* u. *Gladstone,* Philosoph. Transact. for 1863. part I.

Eine noch grössere Uebereinstimmung zwischen den beobachteten und berechneten Werthen würde man nach beiden Formeln erhalten, wenn man nicht nur zwei resp. drei Beobachtungen, sondern alle zur Ableitung der Constanten benutzte unter Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate. Christoffel [1]) hat in dieser Weise an Beobachtungen von Mascart [2]) über die Brechungsexponenten des Kalkspaths seine Formel geprüft und eine Uebereinstimmung erhalten, die bis auf drei Einheiten der vierten Decimale als einmalige grösste Abweichung geht.

Um zu entscheiden, ob diese Formeln in der That die Dispersion wiedergeben, ist zunächst die Frage zu beantworten, wie weit den Brechungsexponenten und Wellenlängen absolute Genauigkeit zukommt. Bei den Werthen der Wellenlängen können wir, wie später nachgewiesen wird, die Unsicherheit als fünf Einheiten der letzten Stelle ansehen. Die Genauigkeit in den Brechungsexponenten könnte bei festen Körpern eigentlich in den vier ersten Stellen absolut sein, bei den flüssigen sich bis auf eine Einheit in der vierten Decimale erstrecken, wie ich bei einer ausführlichern Untersuchung der Genauigkeitsgrenzen gezeigt habe [3]). Es scheint indess nicht, dass die Genauigkeit der angeführten Beobachtungen so weit reicht. Jene Ungenauigkeiten angenommen, hat Christoffel [4]) gezeigt, dass die Differenzen zwischen Rechnungen und Beobachtungen sich im schlimmsten Falle bis in die dritte Decimale erstrecken können, so dass die in den obigen Tabellen vorkommenden Unterschiede der Rechnung und Beobachtung auf die Ungenauigkeiten der Beobachtung geschoben werden können. Demnach würde die Formel von Christoffel und noch genauer die Cauchy'sche mit drei Constanten die Dispersionserscheinungen mit genügender Genauigkeit wiedergeben.

Für Substanzen mit geringer Dispersion genügt die Formel von Cauchy mit zwei Constanten; ich habe selbst die Brechungsexponenten einer grossen Anzahl von Flüssigkeiten und Gemischen für drei Strahlen, die des Wasserstoffspectrums bis auf sechs Decimalen bestimmt [5]) und dieselben durch die erwähnte Gleichung bis auf acht Einheiten der fünften Decimale als grösste Abweichung darstellen können. In vielen Fällen zeigten sich die Unterschiede zwischen Rechnung und Beobachtung erst in der sechsten Decimale.

Die angeführten Dispersionsformeln lassen nun auch sofort erkennen, dass mit zunehmender Wellenlänge die Brechungsexponenten sich immer mehr einer bestimmten Grenze nähern, die sie strenge genommen erst erreichen, wenn die Wellenlänge selbst unendlich gross wird, der sie aber schon sehr nahe kommen, wenn die Wellenlänge auch nur $0^{mm},1$ beträgt. Diese Grenze

1) *Christoffel*, Poggend. Annal. Bd. CXXIV.
2) *Mascart*, Comptes Rendus. Bd. LVIII. p. 1111. Man sehe §. 46.
3) *Wüllner*, Poggend. Annal. Bd. CXXXIII.
4) *Christoffel*, Poggend. Annal. Bd. CXVII.
5) *Wüllner*, Poggend. Annal. Bd. CXXXIII.

ist in den Formeln von Cauchy die Constante A, in der Gleichung von Christoffel $\frac{n_0}{\sqrt{2}}$, denn setzen wir in der letztern

$$n = \frac{n_0 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{1 + \frac{\lambda_0}{\lambda}} + \sqrt{1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}}}$$

$\lambda = \infty$, so wird sie

$$n = \frac{n_0 \sqrt{2}}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{n_0}{\sqrt{2}}.$$

Diese Constanten geben uns somit den Brechungsexponenten des Lichtes unter der Voraussetzung, dass die specielle Anordnung der Moleküle im Innern der Körper auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ohne Einfluss sei, oder dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit lediglich von der Dichtigkeit und der Elasticität des Mediums, in welchem das Licht sich fortpflanze, abhänge.

Die Christoffel'sche Formel gibt noch eine zweite Grenze für die Brechungsexponenten, sie begrenzt das Spectrum nach seiner brechbarern Seite ebenfalls. Denn wird in der Gleichung $\lambda < \lambda_0$, also $\frac{\lambda_0}{\lambda} > 1$, so wird der Ausdruck für n imaginär. Es folgt somit, dass Wellen, deren Länge kleiner ist als die zweite Constante λ_0, total reflectirt werden, dass sie nicht mehr in das betreffende Medium eindringen können.

§. 25.

Abhängigkeit der Brechungsexponenten von der Dichtigkeit der brechenden Körper. Schon die wenigen Zahlen Baden Powell's für die Brechungsexponenten des Cassiaöles zeigen, dass mit steigender Temperatur die Brechungsexponenten abnehmen; für feste Körper ist diese Aenderung sehr unbedeutend und schwer zu constatiren, für Flüssigkeiten ist sie indess sehr merklich, wie sich aus einer grossen Anzahl neuerer Untersuchungen ergibt. Zunächst zeigte Jamin [1]) nach einer Methode, welche nur die Aenderungen der Brechungsexponenten mit der Temperatur zu bestimmen gestattete, dass der Brechungsexponent des Wassers stetig abnimmt, für Licht mittlerer Brechbarkeit erhielt er zwischen 0° und 30° den Brechungsexponenten des Wassers dargestellt durch die Gleichung

$$n_t = n_0 - 0{,}000012573\, t - 0{,}000001929\, t^2.$$

Dale und Gladstone [2]) zeigten dann bei einer Reihe von Flüssigkeiten, dass die Abnahme der Brechungsexponenten zum Theil sehr rasch mit steigender Temperatur stattfindet. So geben sie z. B. für Schwefelkohlenstoff folgende Zahlen.

---

1) *Jamin*, Comptes Rendus. XLIII. p. 1191. Poggend. Annal. Bd. C.

2) *Dale* u. *Gladstone*, Philosoph. Transactions for 1858.

Brechungsexponenten des Schwefelkohlenstoffs.

Temperatur	Brechungsexponenten			Abnahme für 5°		
	A	*D*	*H*	von *A*	von *D*	von *H*
0° C.	1,6217	1,6442	1,7175			
5	1,6180	1,6397	1,7119	0,0037	0,0045	0,0056
10	1,6144	1,6346	1,7081	0,0036	0,0051	0,0038
15	1,6114	1,6303	1,7035	0,0030	0,0043	0,0046
20	1,6076	1,6261	1,6993	0,0038	0,0042	0,0042
25	1,6036	1,6220	1,6942	0,0040	0,0041	0,0051
30	1,5995	1,6182	1,6896	0,0041	0,0038	0,0046
35	1,5956	1,6140	1,6850	0,0039	0,0042	0,0046
40	1,5919	1,6103	1,6810	0,0037	0,0037	0,0040
42,5	1,5900	1,6082	1,6778	0,0038	0,0042	0,0064

Die Abnahme der Brechungsexponenten ist innerhalb dieses Temperaturintervalls für jeden Strahl bei gleichem Temperaturzuwachs constant, für die verschiedenen Strahlen aber merklich verschieden; für *A* ist die Abnahme im Mittel für je 5° = 0,0037, für *D* = 0,0042, für *H* = 0,0048. Es ergibt sich daraus, dass mit steigender Temperatur nicht nur die Brechung, sondern auch die Dispersion abnimmt.

Wie wir im §. 21 entwickelten, folgt aus der Emissionstheorie, dass das specifische Brechungsvermögen eines Körpers, der Quotient

$$\frac{n^2 - 1}{d} = c$$

constant sei.

Auch nach der Undulationstheorie kann man, wie wohl zuerst Hoek[1] hervorgehoben hat, dem aus der Emissionstheorie überkommenen Begriffe der brechenden Kraft eine bestimmte Bedeutung beilegen, und unter gewissen Voraussetzungen ableiten, dass das specifische Brechungsvermögen constant sein muss.

Nach der Undulationstheorie rührt nämlich die Brechung her von einer Abnahme der Geschwindigkeit des Lichtes im zweiten Mittel, und diese ist nach der Fresnel'schen Annahme, welche wir theilen, Folge von der grössern Dichtigkeit des Aethers im stärker brechenden Mittel. Nennen wir nun die Geschwindigkeit des Lichtes im leeren Raume c, und die Dichtigkeit und Elasticität des Aethers dort d und e, so ist nach unserer angenäherten Theorie

$$c = C\sqrt{\frac{e}{d}}.$$

1) *Hoek*, Poggend. Annal. Bd. CXII.

Für irgend ein brechendes Mittel, wo c', e', d' die entsprechenden Werthe sind, ist

$$c' = C\sqrt{\frac{e'}{d'}},$$

nach unserer Annahme ist nun $e' = e$ und somit der Brechungsexponent

$$n = \frac{c}{c'} = \frac{\sqrt{d'}}{\sqrt{d}}$$

$$n^2 = \frac{d'}{d},$$

oder

$$d' = n^2 . d.$$

Die Dichtigkeit des Aethers in dem brechenden Mittel verhält sich zu derjenigen im leeren Raum wie das Quadrat des Brechungsexponenten zu 1. Setzen wir daher die Dichtigkeit des Aethers im leeren Raum gleich 1, so gibt uns das Quadrat des Brechungsexponenten die Dichtigkeit des Aethers in dem brechenden Mittel bezogen auf diejenige des Aethers im leeren Raume. Daraus folgt dann

$$n^2 - 1 = \delta = d' - d$$

die brechende Kraft eines Mittels, das um 1 verminderte Quadrat des Brechungsexponenten ist gleich dem Ueberschuss der Dichtigkeit des Aethers in dem brechenden Mittel über denjenigen des in einem gleichen Volumen des leeren Raumes enthaltenen Aethers.

Machen wir nun die Annahme, dass dieser Aether fest in diesem Mittel gebunden ist, so wird, wenn wir dieses Mittel comprimiren oder ausdehnen, dadurch der in demselben enthaltene Ueberschuss δ des Aethers seinem absoluten Werthe nach nicht geändert, aber in dem verdichteten Körper ist dieser Ueberschuss jetzt in einem kleinern Raume vorhanden, die mit diesem verdichteten Körper ausgefüllte Volumeinheit würde daher in demselben Verhältnisse mehr Aether besitzen als die Volumeinheit des leeren Raumes, in welchem der verdichtete Körper einen kleinern Raum einnimmt als der nicht verdichtete. Das Verhältniss dieser Aethermenge δ zu dem in einem gleichen Volum des leeren Raumes enthaltenen Aethers ist demnach ein anderes, es ist in demselben Verhältnisse grösser geworden, als die Dichtigkeit des Körpers zugenommen hat. Daraus würde dann folgen, dass der Quotient aus dem jedesmal vorhandenen δ und der Dichtigkeit s des Körpers constant wäre, oder

$$\frac{\delta}{s} = \frac{n^2 - 1}{s} = a,$$

wenn n jetzt den Brechungsexponenten des verdichteten Körpers bedeutet.

Es würde also folgen, dass das von Newton so genannte specifische Brechungsvermögen für ein und denselben Körper constant sei, und dass dasselbe gleich sei dem Quotienten aus dem Ueberschuss des in der Volumeinheit enthaltenen Aethers über den des leeren Raumes und der Dichtigkeit des brechenden Mittels.

Ein Beispiel wird diesen Schluss noch klarer machen. Sei die Dichtigkeit des Aethers in einem Mittel von der Dichtigkeit 1 gleich 2, so ist für dieses $\delta = 1$. Werde nun das Mittel auf die Hälfte seines Volumens comprimirt, so bleibt die Aethermenge $\delta = 1$ in ihm fest. Die Gesammtmenge des dann in ihm enthaltenen Aethers ist dann gleich 1,5, da in dem Volumen $^1/_2$ des leeren Raumes auch nur die Aethermenge $^1/_2$ vorhanden ist. Würden wir nun das Volum 1 mit dieser verdichteten Flüssigkeit ausfüllen, so würde die in dem Volum 1 enthaltene Aethermenge gleich 3 sein. Die Differenz dieses und des im leeren Raum vorhandenen 3 — 1 gleich 2, und der Quotient aus dieser Zahl und der Dichtigkeit, die dann gleich 2 wäre, wieder gleich 1. So auch, wenn wir den Körper ausdehnten, z. B. sein Volum verdreifachten, würde der im Volum 3 vorhandene Aether gleich 4 sein, im Volum 1 demnach $^4/_3$, δ gleich $^1/_3$ und der Quotient

$$\frac{\delta}{s} = 3 \cdot {}^1/_3 = 1.$$

Wenn die Fresnel'sche Annahme über die Ursache der Brechung und die Voraussetzung, dass jener Aetherüberschuss fest an den Molekülen der Körper gebunden sei, richtig ist, so muss darnach in der That das specifische Brechungsvermögen constant sein; jedoch muss dasselbe dann noch etwas anders gedeutet werden. Wie die Versuche von Dale und Gladstone zeigen, hängt nicht nur der Brechungsexponent selbst, sondern auch die Aenderung desselben von der Farbe des Lichtes oder seiner Wellenlänge ab, unsere Entwicklung, dass das Brechungsvermögen constant sei, beruht aber auf der Voraussetzung, dass der Brechungsexponent nicht von der Wellenlänge abhängig sei; sie beruht auf dem für unendlich lange Wellen von uns abgeleiteten Ausdrucke für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes. Die Constanz des specifischen Brechungsvermögens kann deshalb nur für den von der Wellenlänge unabhängigen Theil der Brechungsexponenten oder für die Constante A der Cauchy'schen oder $n_0 : \sqrt{2}$ der Christoffel'schen Gleichung gelten. Hierfür hat Schrauff[1]) vorzugsweise auf die Beobachtungen von Dale und Gladstone gestützt, die Constanz auch nachweisen zu können geglaubt. Dale und Gladstone[2]) selbst interpretirten ihre Beobachtungen nicht dahin, sondern sie folgerten aus denselben, dass viel näher der Ausdruck

$$\frac{A - 1}{d} = \text{const.}$$

constant sei. Der Einfluss der Temperatur auf die Körper besteht nämlich darin, dass ihre Dichtigkeit kleiner wird, und durch die Untersuchungen von Kopp und Pierre, welche wir in der Wärmelehre besprechen werden, waren

1) *Schrauff*, Poggend. Annal. Bd. CXVI, CXVIII, CXIX, CXXVI, CXXVII und Physikalische Studien. Wien 1867.

2) *Dale* u. *Gladstone*, Philosophical Transactions for 1863.

die Aenderungen der Dichte mit der Temperatur für die von Dale und Gladstone untersuchten Substanzen bestimmt worden. Eine Vergleichung der Aenderung der Brechungsexponenten und der Körperdichten mit der Temperatur gestattete daher die Frage, ob einer der beiden Ausdrücke und welcher constant sei, zu beantworten.

Folgende kleine Tabelle enthält einige der von Dale und Gladstone gegebenen Zahlen für Schwefelkohlenstoff, Wasser und Alkohol.

Substanz	Temperatur	$\frac{1}{d}$	A	$\frac{A-1}{d}$	$\frac{A^2-1}{d}$
Schwefelkohlenstoff	11° C.	0,9554	1,5960	0,5694	1,4782
	22,5	0,9685	1,5865	0,5680	1,4714
	36,5	0,9854	1,5753	0,5669	1,4599
Wasser	1°	0,9999	1,3227	0,3227	0,7495
	15,5	1,0007	1,3228	0,3230	0,7497
	27,5	1,0034	1,3216	0,3227	0,7492
	48°	1,0109	1,3193	0,3227	0,7486
Alkohol	0°	0,9132	1,3598	0,3286	0,7754
	20°	0,9326	1,3518	0,3280	0,7714
	40°	0,9534	1,3435	0,3275	0,7675
	60°	0,9762	1,3347	0,3268	0,7630

Die letzte Columne dieser Tabelle lässt deutlich erkennen, dass dies specifische Brechungsvermögen im Sinne der Emissionstheorie mit abnehmender Dichtigkeit ebenfalls abnimmt, dass dagegen der Quotient $\frac{A-1}{d}$ mit sehr grosser Annäherung constant ist. Dale und Gladstone nennen deshalb diesen Quotienten das specifische Brechungsvermögen, und schliessen aus ihren Versuchen, dass dieses Vermögen constant sei, und dass die geringe Aenderung, die sich zuweilen zeige, dem Einflusse der Dispersion zuzuschreiben sei.

Gleichzeitig mit Dale und Gladstone untersuchte Landolt[1]) die Abhängigkeit der Brechungsexponenten von der Körperdichte, indem auch er die Aenderung der Brechungsexponenten mit steigender Temperatur mit der aus den Untersuchungen Kopp's bekannten Aenderung der Dichtigkeit verglich. Auch Landolt gelangt zu dem Resultate, dass der Quotient $\frac{A-1}{d}$ als constant angesehen werden könne, wie sich aus folgenden Zahlen ergibt.

1) *Landolt*, Poggend. Annal. Bd. CXVII, CXXII, CXXIII.

Substanz	Temperatur	d	A	$\frac{A-1}{d}$	$\frac{A^2-1}{d}$
Propionsäure	18° C.	0,9970	1,3772	0,3784	0,8994
	24°	0,9905	1,3747	0,3783	0,8984
	28°	0,9861	1,3732	0,3785	0,8981
Aethylalkohol	12°	0,8054	1,3564	0,4426	1,0472
	20°	0,7986	1,3532	0,4423	1,0408
	28°	0,7917	1,3502	0,4423	1,0396
Bittermandelöl	16°	1,0496	1,5113	0,4872	1,2233
	20°	1,0457	1,5094	0,4871	1,2224
	26°	1,0401	1,5065	0,4870	1,2206

Bei den Versuchen von Landolt und mehr noch bei denen von Dale und Gladstone zeigt sich noch eine kleine stetige Aenderung des Quotienten $\frac{A-1}{d}$, welche indess möglicherweise ihren Grund darin haben kann, dass die zu diesen Untersuchungen benutzten Präparate nicht mit denen von Kopp identisch waren.

Es sind deshalb späterhin gleichzeitig von Rühlmann [1]) und mir [2]) Versuche angestellt, um die Frage zu entscheiden, ob der Quotient $\frac{A-1}{d}$ in der That als ganz constant anzusehen sei; Rühlmann benutzte zu seinen Versuchen destillirtes Wasser, ich eine Reihe anderer Flüssigkeiten, deren Dichtigkeit ich selbst in den verschiedenen Temperaturen bestimmte. Beide gelangten wir zu dem Resultate, dass die Constanz dieses Quotienten nur eine angenäherte sei. Die Strahlen, welche Rühlmann benutzt hat, liegen leider zu nahe zusammen, um die Constante A mit Sicherheit berechnen zu können; ich erhalte für die Brechungsexponenten des Wassers den Ausdruck

$$n_\lambda = 1,326067 - 0,000099\, t + \frac{0,30531}{\lambda^2},$$

worin n_λ den Brechungsexponenten des Strahles von der Wellenlänge λ und t die Temperatur in Graden der Centesimalskala bedeutet. Für 19°,5 wird darnach der Brechungsexponent der Strahlen

	C	D	F
nach Wüllner	1,33121	1,33295	1,33717
„ van der Willigen [3])	1,33122	1,33307	1,33720
„ Landolt [4])	1,33115	1,33276	1,33717
„ Rühlmann	—	1,33291	—

1) *Rühlmann*, Poggend. Annal. Bd. CXXXII.
2) *Wüllner*, Poggend. Annal. Bd. CXXXIII.
3) *Van der Willigen*, Poggend. Annal. Bd. CXXII.
4) *Landolt*, Poggend. Annal. Bd. CXXIII.

Wie man sieht stimmen diese Zahlen bis auf einige Einheiten der fünften Decimale überein. Mit dem von mir bestimmten Werthe von A und den Kopp'schen Zahlen für die Dichtigkeit des Wassers werden die Werthe der Quotienten $\frac{A-1}{d}$

bei 10° . . 0,325156
„ 15° . . 0,324848
„ 20° . . 0,324635
„ 30° . . 0,322456.

Für ein ziemlich wasserfreies Glycerin fanden sich die Brechungsexponenten gegeben durch die Gleichung

$$n_\lambda = 1{,}454262 - 0{,}0002683\, t + \frac{0{,}404553 - 0{,}0000669\, t}{\lambda^2},$$

die Dichtigkeiten durch

$$d = 1{,}25073 - 0{,}000635\, t$$

innerhalb der Temperaturen 15° und 35°. Für den Quotienten ergibt sich daraus

$$\frac{A-1}{d} = 0{,}36325 - 0{,}0000310\, t.$$

Für Alkohol ist innerhalb derselben Temperaturgrenzen

$$n_\lambda = 1{,}36086 - 0{,}000384\, t + \frac{0{,}325707 - 0{,}0002008\, t}{\lambda^2}$$

$$d = 0{,}81281 - 0{,}00085\, t$$

$$\frac{A-1}{d} = 0{,}44396 - 0{,}0000082\, t.$$

Für eine gesättigte Lösung von Chlorzink in Wasser, sie enthielt auf 100 Wasser 254,735 Chlorzink, erhielt ich zwischen 20° und 40°

$$n_\lambda = 1{,}494538 - 0{,}0002857\, t + \frac{0{,}633266 - 0{,}0001007\, t}{\lambda^2}$$

$$d = 1{,}96816 - 0{,}001153\, t$$

$$\frac{A-1}{d} = 0{,}25126 + 0{,}0000028\, t.$$

Für Schwefelkohlenstoff schliesslich wurden die Constanten der Dispersionsformel zwischen 7° und 24°

$$A = 1{,}601500 - 0{,}0007539\, t$$
$$B = 1{,}177249 - 0{,}0005966\, t$$
$$C = 3{,}768645 - 0{,}0847898\, t$$

ferner

$$d = 1{,}29366 - 0{,}001506\, t$$

$$\frac{A-1}{d} = 0{,}46496 - 0{,}0000424\, t.$$

Aus diesen Beobachtungen ergibt sich, dass die Constanz des Quotienten aus dem um eins verminderten Brechungsexponenten und der Dichtigkeit nur eine angenäherte ist, dass sie bei einigen Flüssigkeiten, wie beim Alkohol,

fast erreicht ist, dass bei einigen dieser Quotient mit der Temperatur abnimmt, bei andern, wie bei der Chlorzinklösung, mit abnehmender Dichtigkeit grösser wird. Bei Temperaturintervallen von 20°, bei denen die Aenderung der Dichte und der Brechungsexponenten schon die zweite Decimale erreichen kann, bleibt die Aenderung des Quotienten im Allgemeinen noch in der vierten Decimale. Man kann daher das Gesetz der Constanz dieses Quotienten in ähnlicher Weise annehmen als das Gesetz von Mariotte.

§. 26.

Brechungsexponenten von Lösungen und Mischungen. Aus der von ihm dem Quotienten $\frac{A^2-1}{d}$ gegebenen Deutung hat Hoek[1]) eine Methode abgeleitet, nach welcher man mit Hülfe jenes Quotienten die Brechungsexponenten von Gemischen aus denen der Bestandtheile ableiten kann, indem er zeigte, dass ein von Biot und Arago für zusammengesetzte Gase aufgestellter Satz sich auch auf flüssige Gemische anwenden lasse.

Das von Arago und Biot für Gase aufgestellte Gesetz sagt, dass die brechende Kraft eines Gasgemisches gleich ist der Summe der brechenden Kräfte der Bestandtheile, und in der aus der Undulationstheorie für Flüssigkeiten abgeleiteten Form von Hoek sagt dasselbe aus, dass der Ueberschuss des in einem Gemische vorhandenen Aethers über den in einem gleichen Volumen des leeren Raumes vorhandenen gleich sein muss der Summe der Ueberschüsse in den einzelnen Bestandtheilen. Mischen wir nun u Volume einer Substanz mit v Volumen einer zweiten, und entstehen w Volume des Gemisches, so hat sich jeder der beiden Bestandtheile auf w Volume ausgedehnt. Waren die Dichtigkeiten der Bestandtheile vorher d und d_1, so sind sie nach der Mischung $d \cdot \frac{u}{w}$ und $d_1 \frac{v}{w}$. Ist nun das specifische Brechungsvermögen im Sinne Hoeks für die eine Substanz s, für die andere s_1, so sind die in den beiden Substanzen im Gemische vorhandenen Aetherüberschüsse

$$s \cdot d \cdot \frac{u}{w} \text{ und } s_1 \cdot d_1 \cdot \frac{v}{w}.$$

Ist nun a der von der Wellenlänge unabhängige Theil des Brechungsexponenten für die eine, a_1 für die andere Substanz, so ist nach Hoek

$$s = \frac{a^2-1}{d} \qquad s_1 = \frac{a_1^2-1}{d_1}.$$

Nennen wir schliesslich den constanten Theil des Brechungsexponenten des Gemisches A, so ist der Ueberschuss des Aethers im Gemische $A^2 - 1$ und damit

$$A^2 - 1 = (a^2 - 1)\frac{u}{w} + (a_1^2 - 1) \cdot \frac{v}{w}.$$

---

1) *Hoek*, Poggend. Ann. Bd. CXII.

Wie man sieht beruht diese Ableitung wesentlich auf der von Hoek dem Begriffe der brechenden Kraft gegebenen Deutung und der Annahme, dass $\frac{a^2-1}{d}$ constant sei. Mit dem Nachweis, dass letztere Annahme unrichtig, fällt auch die abgeleitete Gleichung. Landolt[1]) zeigte nun, dass man dennoch diese Gleichung mit grosser Annäherung zur Berechnung benutzen könne, wenn man eben anstatt der um eins verminderten Quadrate der Brechungsexponenten die um 1 verminderten Brechungsexponenten selbst nimmt, obige Gleichung also verwandelt in folgende

$$(A-1)\,w = (a-1)\,u + (a_1-1)\,v \;\ldots\ldots\ldots \text{I.}$$

oder setzen wir das Gewicht der Mischung P, ihre Dichtigkeit D, die Gewichte der Bestandtheile p und p_1,

$$\frac{A-1}{D}\cdot P = \frac{a-1}{d}\cdot p + \frac{a_1-1}{d_1}\cdot p_1 \;\ldots\ldots\ldots \text{Ia.}$$

Landolt benutzte zu seinen Rechnungen anstatt der constanten Theile der Brechungsexponenten den Brechungsexponenten von C; folgende Tabelle enthält einige der von ihm gegebenen Zahlen.

Substanz	Gewicht	Dichtigkeit	n_C beobachtet	n_C berechnet
Methylalkohol . . .	96	0,7964	1,3279	
Amylalkohol	88	0,8135	1,4057	
Mischung	184	0,8038	1,3640	1,3644
Aethylalkohol . . .	92	0,8011	1,3605	
Amylalkohol	88	0,8135	1,4057	
Mischung	180	0,8065	1,3822	1,3821
Aethylalkohol . . .	46	0,8011	1,3605	
Amylalkohol	176	0,8135	1,4057	
Mischung	222	0,8104	1,3961	1,3960
Essigsäure	60	1,0518	1,3706	
Buttersäure	88	0,9610	1,3953	
Mischung	148	0,9930	1,3850	1,3847

Ich habe später bei der schon im vorigen §. erwähnten Untersuchung ebenfalls diese empirische Relation in sehr ausgedehnter Weise untersucht, indem ich eine Reihe verschiedener Gemische aus den dort erwähnten Flüssig-

1) *Landolt*, Poggend. Ann. Bd. CXXIII. Man sehe auch dessen Abhandlung über optische Analyse von Flüssigkeitsgemischen in Liebig's Annalen. IV. Supplementband 1864.

keiten herstellte, und deren Brechungsexponenten in derselben Weise bestimmte, wie die der einzelnen Flüssigkeiten. Für vier Gemische aus Alkohol und Glycerin, für welche einzelne Flüssigkeiten die Constanten im vorigen §. mitgetheilt sind, erhielt ich folgende Werthe der Constanten:

1. Gemisch aus 1 Alkohol 4 Glycerin

$$n_\lambda = 1{,}433283 - 0{,}0002891\, t + \frac{0{,}394516 - 0{,}000134\, t}{\lambda^2}$$

$$D = 1{,}14155 - 0{,}000660\, t.$$

2. Gemisch aus 1 Alkohol 2 Glycerin

$$n_\lambda = 1{,}419385 - 0{,}0003010\, t + \frac{0{,}372719 - 0{,}0001634\, t}{\lambda^2}$$

$$D = 1{,}07420 - 0{,}000725\, t.$$

3. Gemisch aus 1 Alkohol 0,998 Glycerin

$$n_\lambda = 1{,}403238 - 0{,}0003251\, t + \frac{0{,}356845 - 0{,}0002009\, t}{\lambda^2}$$

$$D = 0{,}99748 - 0{,}000750\, t.$$

4. Gemisch aus 1 Alkohol 0,4997 Glycerin

$$n_\lambda = 1{,}390209 - 0{,}0003504\, t + \frac{0{,}351017 - 0{,}0002344\, t}{\lambda^2}$$

$$D = 0{,}93710 - 0{,}000805\, t.$$

Bilden wir nun mit diesen und mit den im vorigen §. erhaltenen Werthen die beiden Seiten der vorhin für die Gemische aufgestellten Gleichung, so werden dieselben

	$\frac{A-1}{D} \cdot P$	$\frac{a-1}{d} \cdot p + \frac{a_1-1}{d} \cdot p_1$
1.	1,89775 — 0,0001685 t	1,89696 — 0,0001322 t
2.	1,17123 — 0,0000504 t	1,17046 — 0,0000700 t
3.	0,80769 — 0,0000445 t	0,80649 — 0,0000390 t
4.	0,62457 — 0,0000245 t	0,62537 — 0,0000237 t.

Wie man sieht zeigt sich hier eine angenäherte aber keine vollständige Uebereinstimmung, die beiden Seiten der Gleichungen weichen sowohl in ihrem constanten als in ihrem von der Temperatur abhängigen Theile von einander ab, so dass bei gewissen Temperaturen die beiden Seiten in der That vollständig gleich werden, so z. B. für das erste Gemisch bei der Temperatur 22,9.

Lösen wir unsere Gleichung nach A auf für 20°, so erhalten wir aus der rechten Seite der Gleichung die Werthe,

für 1 ..	1,427491	während beobachtet ist	1,427501
„ 2 ..	1,413007	„ „ „	1,413365
„ 3 ..	1,396590	„ „ „	1,396736
„ 4 ..	1,383714	„ „ „	1,383211,

so dass die berechneten und beobachteten Werthe in der 4. Decimale um bis 3 Einheiten differiren.

Ist die Differenz der Brechungsexponenten der Bestandtheile des Gemisches bedeutend, wie bei Gemischen aus Alkohol und Schwefelkohlenstoff, so kann der Unterschied zwischen den so berechneten und den beobachteten Zahlen indess selbst die 3. Decimale erreichen.

Mit demselben Grade von Genauigkeit wie für Mischungen verschiedener Flüssigkeiten gilt die eben abgeleitete Beziehung auch für Salzlösungen. Eine direkte Prüfung so wie bei den Mischungen ist hier nicht möglich, da man die Brechungsexponenten und Dichtigkeiten der festen Salze im Allgemeinen nicht mit derselben Genauigkeit bestimmen kann. Man kann sie indess prüfen, indem man verschieden concentrirte Lösungen mit einander vergleicht. Setzen wir voraus, man habe p_1 Gr. Salz in 100 Gr. Wasser gelöst, und es sei jetzt a_1 der Brechungsexponent, d_1 die Dichtigkeit des Salzes, so können wir Gleichung Ia schreiben:

$$\frac{A-1}{D}(100+p_1) = \frac{a-1}{d} \cdot 100 + \frac{a_1-1}{d_1} \cdot p_1 \quad \ldots \text{ a.}$$

Stellen wir eine zweite Lösung mit p_2 Gr. desselben Salzes her, so erhalten wir

$$\frac{A_1-1}{D_1}(100+p_2) = \frac{a-1}{d} \cdot 100 + \frac{a_1-1}{d_1} \cdot p_2 \quad \ldots \text{ b.}$$

und aus beiden Gleichungen zusammen

$$\frac{\frac{A_1-1}{D_1}(100+p_2) - \frac{a-1}{d} \cdot 100}{\frac{A-1}{D}(100+p_1) - \frac{a-1}{d} \cdot 100} = \frac{p_2}{p_1} \quad \ldots\ldots \text{ c.}$$

Ich habe die Prüfung dieser Beziehung durch Börner[1]) in meinem Laboratorium vornehmen lassen; derselbe bestimmte die Brechungsexponenten von je drei Lösungen, von 10, 20, 30 Gr. Salz auf 100 Wasser, einer Reihe von Salzen für die drei Strahlen des Wasserstoffspectrums, und konnte so die Constanten A und B der Cauchy'schen Formel bestimmen. So erhielt Börner für Kochsalzlösungen folgende Ausdrücke für die Brechungsexponenten:

I. Lösung von 10 Gr. Salz in 100 Wasser:

$$n_\lambda = 1{,}342419 - 0{,}0001511\, t + \frac{0{,}341110 - 0{,}0001669\, t}{\lambda^2},$$

II. Lösung von 20 Gr. Salz in 100 Wasser:

$$n_\lambda = 1{,}355207 - 0{,}0001591\, t + \frac{0{,}368263 - 0{,}0002006\, t}{\lambda^2},$$

III. Lösung von 30 Gr. Salz in 100 Wasser:

$$n_\lambda = 1{,}366528 - 0{,}0001694\, t + \frac{0{,}391877 - 0{,}0002343\, t}{\lambda^2}.$$

1) *Börner*, Ueber die Brechungsverhältnisse einiger Salzlösungen. Inaugural-dissertation. Marburg, 1869.

Die Gleichungen sind gültig zwischen 20 und 40°. Die Prüfung obiger Beziehung führte Börner nun in der Weise aus, dass er die Gleichung (c) nach A_1 auflöste, in die Gleichung dann als A den beobachteten Werth einer andern Lösung einsetzte und so dann A_1 berechnete. Für a, den constanten Theil des Brechungsexponenten des Wassers, setzte er den von mir bestimmten Werth und die Dichtigkeit D der verschiedenen Salzlösungen entnahm er aus den Tabellen von Gerlach[1]). Im Folgenden sind die auf diese Weise für die Temperatur von 30° berechneten Werthe mit den beobachteten zusammengestellt:

	A		Dichtigkeit
	berechnet	beobachtet	
I_2	1,33792	1,33789	I = 1,06155
I_3	1,33791	1,33789	II = 1,11809
II_3	1,35043	1,35043	III = 1,16873.

Die Indices unten rechts an der Bezeichnung der Lösung, für welche der Brechungsexponent berechnet ist, geben an, welcher als bekannt vorausgesetzt wurde. Der Unterschied zwischen Beobachtung und Rechnung findet sich hier nur in der 5. Decimale. In andern Fällen erstreckt sich derselbe bis in die 4. Decimale, so dass in der That die Beziehung sich auch hier mit sehr grosser Annäherung gültig erweist.

Da man mit dieser Beziehung die Brechungsexponenten einer Lösung nur dann berechnen kann, wenn man die einer andern desselben Salzes kennt, und da die Rechnung nach obiger Gleichung gerade nicht sehr bequem ist, so ist es von Interesse zu fragen, ob man nicht die Abhängigkeit der Brechungsexponenten einer Lösung von ihrem Procentgehalt einfach als eine Function des Letztern darstellen könne. Beer und Kremers[2]) haben diese Frage zuerst aufgenommen, und an einer ziemlichen Zahl von Lösungen gezeigt, dass man die Differenz zwischen den Brechungsexponenten für rothes Licht einer Salzlösung von p Gr. Salz auf 100 Wasser und des Wassers bei derselben Temperatur darstellen kann durch

$$\varDelta = ap - bp^2.$$

Versuche von Hoffmann[3]) und die erwähnten Versuche von Börner zeigten, dass man im Allgemeinen noch ein drittes Glied mit p^3 hinzunehmen muss, wenn man die beobachteten Exponenten bis auf 4 Decimalen genau darstellen will. So erhielt Börner unter andern für Kochsalz

$$\varDelta = 0{,}0014813 \cdot p - 0{,}000015265\, p^2 + 0{,}0000000118\, p^3,$$

für Chlorkalium

$$\varDelta = 0{,}001292\, p - 0{,}00001356 \cdot p^2 + 0{,}000000128\, p^3,$$

1) *Gerlach,* Specifische Gewichte der gebräuchlichsten Salzlösungen. Freiberg, 1859.

2) *Beer* und *Kremers,* Poggend. Ann. Bd. CI.

3) *Hoffmann,* Poggend. Ann. Bd. CXXXIII.

für Glaubersalz

$$\Delta = 0{,}001434\, p - 0{,}00001577\, p^2 + 0{,}0000001433\, p^3.$$

Wie man sieht reicht in den beiden letzten Fällen bei 30% der Einfluss des dritten Gliedes schon in die dritte Decimale; eine einfache Beziehung zwischen den Brechungsexponenten und dem Procentgehalt einer Salzlösung ergibt sich demnach nicht.

§. 27.

Brechungsexponenten der Gase. Auch die Brechungsexponenten der Gase kann man mittels Ablenkung der Strahlen durch Prismen bestimmen. Biot und Arago[1]) wandten ein dem Fraunhofer'schen ähnliches Verfahren an, indem sie die Ablenkung, welche ein Lichtstrahl durch ein nach einander mit verschiedenen Gasen gefülltes Hohlprisma erfährt, am Theodolithen direkt maassen. Man erhielt auf diese Weise das Brechungsverhältniss des Lichtes bei dem Uebergange aus Luft in die verschiedenen Gasarten. Um den Brechungsexponenten beim Uebergange des Lichtes aus dem leeren Raume in Luft zu bestimmen, untersuchten sie die Brechung des Lichtes beim Uebergange aus Luft von der Dichtigkeit der atmosphärischen Luft in ein Prisma, welches mit Luft verschiedener Dichtigkeit gefüllt war, und sie fanden, dass die Brechung des Lichtes je nach der Dichtigkeit der Luft verschieden war. Dichtere Luft als diejenige der Atmosphäre ist ein stärker, verdünntere Luft ein schwächer brechendes Mittel. Das Gesetz, welches Arago und Biot aus ihren Versuchen ableiteten, war folgendes. Die brechende Kraft der Luft ist ihrer Dichtigkeit proportional, das specifische Brechungsvermögen ist constant. Die Luft ist somit optisch dichter als der leere Raum, ihr absoluter Brechungsexponent ist grösser als 1.

Der absolute Brechungsexponent der Luft ist für die Dichtigkeit bei einer Temperatur 0° und 760mm Druck gleich 1,000294. Wie man denselben aus diesen Beobachtungen ableiten kann, mag folgendes Beispiel zeigen.

Ist das Prisma mit Luft von der Dichte unter einem Drucke zweier Atmosphären angefüllt, so beobachtet man an dem durchtretenden Lichtstrahl eine bestimmte Ablenkung, welche uns den Brechungsexponenten aus Luft gewöhnlicher Dichte in diejenige doppelter Dichte gibt. Sei nun n dieser Brechungsexponent, und n' der absolute Brechungsexponent der Luft von der als 1 angenommenen Dichtigkeit der Atmosphäre. Der absolute Brechungsexponent der doppelt so dichten Luft ist dann nach §. 15 gleich $n . n'$. Da nun nach dem ersten Satze das specifische Brechungsvermögen der Luft, für welches wir indess jetzt den Werth $\frac{n-1}{d}$ einsetzen, constant ist, so folgt:

---

1) *Arago* und *Biot*, Mémoires de l'Académie de France. Tome VII. 1806; auch Gilbert's Annalen Bd. XXV u. XXVI.

$$\frac{(n \, . \, n') - 1}{2} = n' - 1$$

und daraus

$$(n - 2)n' = - 1,$$

$$n' = \frac{1}{2 - n}.$$

Oder setzen wir allgemein die Dichtigkeit der Luft in dem Prisma d, und den Brechungsexponent beim Uebergange des Lichtes aus Luft von gewöhnlicher Dichte in diese gleich n, so wird

$$\frac{(n \, . \, n') - 1}{d} = n' - 1,$$

$$(n - d)n' = 1 - d,$$

$$n' = \frac{1 - d}{n - d}.$$

Für $d = 2$ ist nun nach den Beobachtungen $n = 1{,}000294$, demnach

$$n' = \frac{1}{0{,}999706} = 1{,}000294,$$

oder der absolute Brechungsexponent der Luft ist gleich 1,000294. Durch Variationen von d erhält man nun immerfort denselben Werth für n' aus dem jedesmaligen Werthe für n, so dass dadurch das Arago'sche Gesetz in aller Strenge bewiesen wird.

Den absoluten Brechungsexponenten für Luft kann man auch, wie Delambre es gethan hat, auf astronomischem Wege ableiten. Alle Gestirne, welche nicht im Zenith stehen, senden ihre Strahlen auf die Oberfläche der Atmosphäre unter einem je nach ihrer Höhe verschiedenen Einfallswinkel; die Strahlen werden daher von ihrer geraden Richtung abgelenkt. Da nun die Lichtstrahlen durch eine Reihe von Mitteln so gebrochen werden, als träten sie direkt in das letzte Mittel ein, so ist die Ablenkung trotz der Abnahme der Dichtigkeit in der Höhe der Atmosphäre gerade so, als träten sie sofort in die untern dichtern Schichten der Atmosphäre.

Durch diese Ablenkung der Strahlen erscheinen die Sterne nicht an ihrem wahren Ort, sondern gegen den Zenith hin verschoben, da die Strahlen beim Eintritte in das dichtere Mittel dem Einfallslothe genähert werden. Die Zenithdistanz der Gestirne, welche wir beobachten, ist also kleiner als die wahre, welche die Astronomie kennen lehrt. Die wahre Zenithdistanz gibt uns nun den Winkel, welchen die von den Sternen kommenden Strahlen mit dem Einfallslothe bilden, die scheinbare Zenithdistanz den Winkel, welchen die in die Atmosphäre eingedrungenen Strahlen mit dem Einfallslothe bilden, den Brechungswinkel. Aus beiden können wir somit den absoluten Brechungsexponenten der Luft bestimmen. Delambre bestimmte ihn zu 1,000294, ein Werth, mit dem der Arago'sche genau übereinstimmt. Berechnet man nun umgekehrt aus diesem Werthe von n' die Werthe von n beim Uebergange aus Luft von der Dichte 0° und dem Drucke der Atmosphäre in Luft verschiede-

ner Dichte mit Hülfe des Arago'schen Gesetzes, so findet man dieselben Zahlen, welche die Beobachtung ergibt, ein neuer Beweis für die Richtigkeit des Arago'schen Gesetzes.

Die Versuche, welche diese beiden Physiker mit andern Gasen als atmosphärischer Luft anstellten, ergaben auch für diese, dass die brechende Kraft jedes Gases bei verschiedenen Dichtigkeiten der Dichtigkeit proportional sei.

Für Gasgemische finden sie, dass die brechende Kraft der Gemische gleich ist der Summe der brechenden Kräfte der einzelnen Bestandtheile, also durch direkte Beobachtung dasselbe Gesetz, welches wir vorhin für Flüssigkeitsgemische als mit grosser Annäherung gültig ableiteten.

Das von Arago und Biot angegebene Gesetz, nach welchem die brechenden Kräfte der Gase bei verschiedener Dichtigkeit den Dichtigkeiten proportional sind, benutzte Dulong zu einem Verfahren, welches ihm gestattete, die Brechungsexponenten der Gase mit bedeutend grösserer Genauigkeit zu bestimmen.

Ein Hohlprisma, das aus einem weiten Glasrohr hergestellt war, dessen beide Enden abgeschliffen und durch zwei unter einem Winkel von 145° gegen einander geneigte Spiegelglasplatten geschlossen waren, stand mit einem grossen Glascylinder in Verbindung, in welchem das wohl getrocknete zu untersuchende Gas aufgefangen wurde. Das Gas war über Quecksilber abgeschlossen und der Druck, unter welchem es stand, wurde durch ein mit dem Glascylinder communicirendes Rohr, welches oben offen und zum Theil ebenfalls mit Quecksilber gefüllt war, gemessen. Die Dichtigkeit des Gases in dem Glascylinder konnte durch Ablassen von Quecksilber beliebig regulirt werden.

An der einen Seite in der Verlängerung der Axe des Rohres, das als Prisma diente, war ein Fernrohr aufgestellt, welches auf eine durch das Prisma hindurch sichtbare Marke gerichtet war, so dass dieselbe am Fadenkreuz des Fernrohres erschien, wenn das Prisma mit trockner Luft von der Dichtigkeit der atmosphärischen Luft gefüllt war. Das Fernrohr sowie das Prisma und die Marke waren unverrückbar festgestellt.

Um nun die Brechungsexponenten anderer Gase zu bestimmen, wurde das Prisma und der Cylinder durch eine ebenfalls damit in Verbindung stehende Luftpumpe luftleer gemacht und statt dessen das zu untersuchende Gas eingefüllt, und die Dichtigkeit des Gases so lange geändert, bis die Marke dem Beobachter wieder genau am Fadenkreuz des Fernrohres erschien. Dann war die Ablenkung des Lichtes durch das Prisma genau dieselbe wie vorhin, als der Apparat mit Luft gefüllt war. Die brechende Kraft des Gases bei der beobachteten Dichtigkeit war daher dann dieselbe wie diejenige der Luft unter dem Drucke einer Atmosphäre und nach dem Gesetze von Arago und Biot erhält man dann die brechende Kraft des Gases, wenn es unter dem Drucke einer Atmosphäre steht, im Vergleich zur brechenden Kraft der Luft durch

eine einfache Proportion. Aus dem bekannten absoluten Brechungsindex der Luft erhält man dann den der Gase.

Sei also z. B. das Fernrohr auf die feste Marke eingestellt, als das Prisma mit trockner Luft unter dem Drucke 760^{mm} angefüllt war. Darauf werde anstatt der Luft Cyangas eingeführt. Die feste Marke erscheint dann wieder an dem Fadenkreuz des Fernrohres, wenn der Druck, unter welchem das Gas steht, gleich ist 268,3 Millimeter. Ist nun d' die Dichtigkeit des Cyangases bei gleicher Temperatur unter dem Drucke von 760^{mm} und d diejenige unter dem beobachteten Drucke, so folgt

$$d' : d = 760 : 268{,}3.$$

Die brechende Kraft des Cyangases bei der Dichtigkeit d ist nun gleich 1, wenn wir die der Luft unter dem Drucke der Atmosphäre gleich der Einheit setzen. Ist nun der Brechungsexponent des unter dem Drucke 760 stehenden Cyangases gleich n', so ist dann seine brechende Kraft gleich $n' - 1$, und nach dem Arago'schen Gesetze ist dann

$$\frac{n' - 1}{d'} = \frac{1}{d},$$

$$n' - 1 = \frac{d'}{d} = \frac{760}{268{,}3} = 2{,}832,$$

wobei dann die der Luft bei gleicher Temperatur und gleichem Drucke als Einheit zu Grunde liegt. Die brechende Kraft der Luft ihrem absoluten Werthe nach ist nun unter den Umständen

$$n - 1 = 0{,}000294,$$

demnach ist die des Cyangases

$$n' - 1 = 2{,}832 \,.\, 0{,}000294 = 0{,}000833,$$

und daraus folgt der Brechungsexponent des Cyangases

$$n' = 1{,}000833.$$

Auf diese Weise hat Dulong für eine grosse Menge von Gasen die Brechungsexponenten bestimmt, sie sind in folgender Tabelle zusammengestellt. Dulong setzte allerdings das um 1 verminderte Quadrat des Brechungsexponenten als brechende Kraft ein, bei dem kleinen Werthe der Exponenten ergibt das im schliesslichen Resultat in den ersten 6 Decimalen keinen Unterschied.

Tabelle der Brechungsexponenten der Gase bei 0° und 760mm Druck nach Dulong.

Name der Gase	Dichte	Brechende Kraft, die der Luft = 1	Absolute Brechungsexponenten.
Atmosphärische Luft	1,000	1,000	1,000294
Sauerstoffgas	1,1026	0,924	1,000272
Wasserstoffgas	0,0685	0,470	1,000138
Stickstoffgas	0,976	1,020	1,000300
Chlorgas	2,47	2,623	1,000772
Stickoxydulgas	1,527	1,710	1,000503
Stickoxydgas	1,039	1,03	1,000303
Chlorwasserstoffgas	1,254	1,527	1,000449
Kohlenoxydgas	0,972	1,157	1,000340
Kohlensäuregas	1,524	1,526	1,000449
Cyangas	1,818	2,832	1,000834
Oelbildendes Gas	0,980	2,302	1,000678
Sumpfgas	0,559	1,504	1,000443
Salzsäureäther	2,234	3,72	1,001095
Cyanwasserstoff	0,944	1,531	1,000451
Phosgengas	3,442	3,936	1,001159
Schwefelwasserstoff	1,178	2,187	1,000644
Schweflige Säure	2,247	2,260	1,000665
Schwefeläther	2,580	5,197	1,00153
Schwefelkohlenstoff	2,644	5,110	1,00150
Phosphorwasserstoffgas ...	1,256	2,682	1,000789

Aus diesen Zahlen lassen sich mit Dulong folgende Resultate ziehen:

1) Die brechenden Kräfte der verschiedenen Gase scheinen in durchaus keiner Beziehung zur Dichte zu stehen, weder die der einfachen noch der zusammengesetzten.

2) Die brechenden Kräfte der zusammengesetzten Gase sind nicht die Summe der brechenden Kräfte der einzelnen Bestandtheile. Das von Arago und Biot aufgefundene Gesetz bezieht sich demnach nur auf Gasgemische, deren Bestandtheile nicht chemisch auf einander einwirken.[1])

So besteht z. B. 1 Volum Chlorwasserstoffgas aus $^1/_2$ Vol. Wasserstoff + $^1/_2$ Vol. Chlor, die ohne Condensation zusammentreten. In der Verbindung ist nun die Dichtigkeit des Wasserstoffgases die Hälfte von der des freien

1) *Dulong*, Annales de chim. et de phys. T. XXXI. p. 154. Poggend. Ann. Bd. VI.

Wasserstoffgases unter gleichem Druck; ebenso die des Chlors. Nach dem Biot-Arago'schen Gesetze sind daher die brechenden Kräfte, die der Luft unter gleichem Drucke gleich 1 gesetzt,

des Wasserstoffs in der Verbindung	0,5 . 0,470 = 0,235
des Chlors „ „ „	0,5 . 2,623 = 1,3115
die der Verbindung gleich der Summe beider	= 1,5465

Die Beobachtung hat dagegen für dieses zusammengesetzte Gas ergeben 1,527, der Unterschied 0,0195 ist viel zu gross, als dass er den möglichen Beobachtungsfehlern zugeschrieben werden könnte. Man beobachtet nach Dulongs Angabe im Fernrohr noch eine Verschiebung der Marke bei einem Druckunterschiede von 0,25^{mm}. Wäre demnach in diesem Falle die Beobachtung der brechenden Kraft der Chlorwasserstoffsäure um diesen ganzen Werth fehlerhaft, so würde der Fehler noch nicht 0,001 im schliesslichen Resultate ausmachen. Aehnliche Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung, welche bei der Cyanwasserstoffsäure sogar auf 0,130, und beim Stickoxydul auf 0,228 steigen, nie aber einen kleinern Werth erhalten als in unserm Beispiele, zeigen alle übrigen zusammengesetzten Gase.

Wir haben bisher die Brechungsexponenten der Gase ganz ohne Berücksichtigung der Dispersion besprochen; in der That hat man vielfach und lange angenommen,[1]) dass in Gasen die Brechungsexponenten aller Farben gleich seien, dass das Licht also in den Gasen keine Dispersion erfahre, obschon vielfach bei frühern astronomischen Beobachtungen eine Dispersion in der Atmosphäre beobachtet war.[2]) Neuere Versuche von Leroux[3]) haben jedoch die Dispersion in Gasen über allen Zweifel erhoben, und Ketteler[4]) ist es sogar gelungen dieselbe zu messen.

Die Methode, welche Ketteler zu seinen Versuchen benutzte, werden wir im zweiten Abschnitte besprechen; er benutzte den Jamin'schen Interferentialrefractor. Mit demselben bestimmte er die Brechungsexponenten dreier Strahlen, eines rothen, der Lithiumflamme, eines gelben, der Natriumflamme, und eines grünen, der Thalliumflamme. Die Wellenlängen dieser Strahlen sind in zehntausendstel Millimetern

$$\lambda_L = 6{,}7061 \qquad \lambda_N = 5{,}8880 \qquad \lambda_{Th} = 5{,}3451.$$

---

1) *Cauchy,* Comptes Rendus. T. II. *Beer,* Einleitung in die höhere Optik.

2) *Arago,* Comptes Rendus. T. II. p. 459.

3) *Leroux,* Ann. de chim. et de phys. 3. Série. T. LXI.

4) *Ketteler,* Beobachtung über die Farbenzerstreuung der Gase. Bonn, b. Henry 1865. Ich kann bei dieser Gelegenheit nicht umhin, auf die Missachtung hinzuweisen, welche zuweilen französische Gelehrte noch immer der deutschen Litteratur zuwenden. Ein Herr Croullebois hat auf Veranlassung des Herrn Jamin im Jahre 1868 die Versuche von Ketteler nach derselben Methode wiederholt und die Resultate als etwas ganz Neues in den Comptes Rendus publicirt, selbst ohne nur die Versuche Ketteler's zu erwähnen. Comptes Rendus T. LXVII.

Die von Ketteler gefundenen Brechungsexponenten für diese verschiedenen Strahlen bei verschiedenen Gasen sind folgende:

Name der Gase	Brechungsexponenten		
	n_L	n_N	n_{Th}
Gewöhnliche Luft	1,000293669	1,000294704	1,000295669
Trockne Luft	—	1,000294602	—
Kohlensäure	1,00044768	1,00044922	1,00045072
Cyan	1,00077954	1,00078440	1,00078898
Wasserstoff	1,00014228	1,00014294	1,00014356
Schweflige Säure	1,00068155	1,00068601	1,00069021

Man sieht, wie die Brechungsexponenten überhaupt nur wenig von 1, sind die für die verschiedenen Strahlen nur sehr wenig von einander verschieden; es bedarf deshalb sehr empfindlicher Methoden, um die Dispersion überhaupt zu erkennen. Die Dispersion entspricht im Uebrigen ganz derjenigen der festen und flüssigen Körper, die Brechungsexponenten werden mit abnehmender Wellenlänge in derselben Weise grösser, so dass auch hier die Cauchy'sche Dispersionstheorie ihre Geltung hat.

Ein Gas macht jedoch nach den Versuchen von Leroux[1]) in dieser Beziehung eine Ausnahme, der Joddampf; dieser zeigt eine ziemlich starke aber umgekehrte Dispersion als die übrigen Körper; beim Joddampf ist die Ablenkung der rothen Strahlen stärker als die der violetten. Eine Messung dieser Dispersion ist Leroux nicht gelungen, nur gibt er an, dass bei einem brechenden Winkel des Prismas von 125° die Breite des Spectrums etwa 30″ betrug.

§. 28.

Totale Reflexion. Wollaston's Bestimmung der Brechungsexponenten. Die Beziehung zwischen dem Sinus des Einfallswinkels und dem des Brechungswinkels ist, wie wir sahen,

$$n = \frac{\sin i}{\sin r}$$

oder

$$\sin r = \frac{1}{n} \sin i$$

für den Werth des Brechungswinkels bei gegebenem Einfallswinkel i. Ist nun $n > 1$, geht also das Licht aus einem optisch dünnern Mittel in ein optisch dichteres, so entspricht jedem möglichen Werthe von i auch ein Winkel r,

1) *Leroux*, Comptes Rendus. T. LV. p. 126. Poggend. Ann. Bd. CXVII.

indem dann, selbst wenn i seinen grössten Werth, nämlich 90^0 erreicht, der Sinus also gleich 1 wird, der Ausdruck

$$\sin r = \frac{1}{n}$$

kleiner als 1 ist. Geht aber das Licht aus einem optisch dichtern Mittel in ein optisch dünneres über, so ist das nicht mehr der Fall. Es ist dann n kleiner als 1; würden wir also in einem dichtern Mittel unter einem rechten Winkel Licht auf die ein dünneres Mittel abgrenzende Fläche fallen lassen, so würde der Ausdruck

$$\sin r = \frac{1}{n}$$

einen Werth ergeben, welcher grösser als 1 ist. Da aber der grösste Werth, den der Sinus überhaupt anzunehmen im Stande ist, gleich 1 ist, so folgt, dass es in dem Falle keinen Winkel r gibt, der zu dem Einfallswinkel in dem von dem Brechungsgesetz geforderten Verhältnisse steht. Es folgt daraus nothwendig, dass überhaupt kein gebrochener Strahl existirt, dass das Licht aus dem dichtern Mittel bei streifender Incidenz nicht in das dünnere Mittel übertreten kann. Das Ausbleiben eines gebrochenen Strahles tritt aber schon früher ein und zwar, da der grösste mögliche Werth von $\sin r = 1$ ist, wenn

$$\frac{\sin i}{n} = 1$$

oder

$$\sin i = n.$$

Für alle Einfallswinkel, deren Sinus grösser ist als das relative Brechungsverhältniss des dichtern und dünnern Mittels, gibt es keinen Brechungswinkel, gibt es keinen gebrochenen Strahl. Man nennt daher jenen Winkel den Grenzwinkel, da derselbe die Grenze angibt, bis zu welcher der Einfallswinkel wachsen kann, wenn noch Licht aus dem dichtern in das dünnere Mittel übertreten soll.

Wenn demnach auf die Grenzfläche eines dichtern Mittels gegen ein dünneres Mittel ein Lichtstrahl unter einem grössern Winkel als dem Grenzwinkel fällt, so findet keine Brechung des Lichtes statt, sondern nur eine Reflexion, und da dann, soweit man beurtheilen kann, das reflectirte Licht mit dem einfallenden die gleiche Intensität besitzt, so nennt man diesen Fall der Reflexion die totale Reflexion.

Diese auf den ersten Blick sehr auffallende Erscheinung, welche der Forderung zu widersprechen scheint, dass an der Grenze zweier Mittel stets eine Theilung eintreten muss in zwei Wellenbewegungen, deren eine in das erste Mittel zurckkehrt, während die andere in das zweite Mittel übergeht, ergibt sich indess als nothwendig aus einer Betrachtung der Construction der gebrochenen Welle.

Wenn an der Grenze zweier Mittel MN Fig. 65 eine ebene Welle AB ankommt, so erhalten wir die gebrochene Welle, wenn wir um den Punkt A

mit einem Radius R, welcher sich zu BC verhält wie die Geschwindigkeit des Lichtes im zweiten Mittel zu derjenigen im ersten Mittel, eine Kugel beschreiben und von C aus an diese Kugel eine zur Einfallsebene senkrechte Tangentialebene legen.

Fig. 65.

Ist nun die Geschwindigkeit im ersten Mittel c, die im zweiten Mittel c', so ist der Radius

$$R = \frac{c'}{c} \cdot BC$$

oder auch

$$R = \frac{\sin r}{\sin i} \cdot BC.$$

Wird nun der Einfallswinkel i so gross, dass

$$\sin i = n,$$

so wird

$$R = \frac{1}{n} BC = \frac{1}{\sin i} BC.$$

Nun ist aber

$$\frac{CB}{AC} = \sin i, \quad AC = \frac{1}{\sin i} BC,$$

es wird also in dem Falle der Radius der die Richtung der gebrochenen Welle bestimmenden Kugel gleich AC. Die Kugel geht durch den Punkt C, und so alle Elementarwellen, durch deren Zusammenwirken die gebrochene Welle entsteht. Die durch den Punkt C an die Kugel gelegte und alle Elementarwellen gleichzeitig berührende Tangentialebene steht somit senkrecht auf MN. Die gebrochene Welle pflanzt sich parallel der brechenden Fläche fort.

Wenn nun der Einfallswinkel i noch grösser wird, so wird der Radius R der um A beschriebenen Kugel, der immer durch den Ausdruck

$$R = \frac{c'}{c} BC$$

gegeben ist, grösser als AC, denn AC ist immer

$$AC = \frac{BC}{\sin i},$$

$\frac{c'}{c}$ ist dann aber grösser als $\frac{1}{\sin i}$. Nehmen wir z. B. an das Verhältniss $\frac{c'}{c}$ oder

$$\frac{1}{n} = 2,$$

so wird immer

$$R = 2\,BC.$$

Bildet aber nun die brechende Fläche mit der ankommenden Welle, also der einfallende Strahl mit dem Einfallslothe einen Winkel von 45°, so ist

$$AC = \frac{BC}{\sin 45^0} = \frac{BC}{\sqrt{1/2}} = BC \cdot \sqrt{2},$$

R ist also im Verhältniss 2 zu $\sqrt{2}$ grösser als AC. Der Punkt C liegt somit

innerhalb der um A und somit aller um die verschiedenen Punkte von CA beschriebenen die Elementarwellen darstellenden Kugeln. Es gibt somit keine von C aus an diese Kugeln zu legende Tangentialebene, und überhaupt keine Fläche, welche diese elementaren Kugeln berührend umhüllt, da alle diese Kugeln in einander liegen. Die in das zweite Mittel übergegangenen Elementarwellen setzen sich somit zu keiner gemeinsamen wahrnehmbaren Welle zusammen, es kann kein gebrochener Strahl entstehen.

Die totale Reflexion lässt sich sehr leicht an Prismen mit grossen brechenden Winkeln beobachten.

Wir erhielten in §. 16 für den Austrittswinkel i', unter welchem ein unter dem Winkel i die Vorderfläche eines Prisma mit dem brechenden Winkel α treffender Lichtstrahl die zweite Fläche des Prisma verlässt, den Werth

$$\sin i' = \sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos \alpha \, . \sin i$$

und es ist nun leicht die Beziehung zwischen i und α aufzufinden, welche dem in das Prisma eintretenden Strahle noch den Austritt gestattet. Jener Werth von i, welcher diesen Ausdruck gleich 1 macht, gibt uns die Grenze, unter welche der Einfallswinkel nicht herabsinken darf; bei kleinerm i kann dann der Lichtstrahl nicht mehr aus dem Prisma austreten. Denn in dem Falle trifft der Strahl im Prisma die zweite Fläche unter dem Grenzwinkel. Da nun die Summe der beiden Winkel, welche der Strahl mit den Einfallslothen der beiden Prismenflächen bildet, immer gleich α ist, so folgt, dass, wenn der Winkel i und mit ihm der erste Brechungswinkel kleiner wird, der Winkel, den der Strahl mit dem Einfallslothe der zweiten Fläche bildet, um ebensoviel grösser wird, also den Werth des Grenzwinkels übersteigt.

Wir erhalten also den Winkel i, der den Winkel, den der Strahl im Prisma mit dem Einfallslothe der zweiten Fläche bildet, zum Grenzwinkel macht, aus der Gleichung:

$$\sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos \alpha \, . \sin i = 1,$$

oder

$$\sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 i} = 1 + \cos \alpha \, . \sin i.$$

Daraus erhalten wir

$$\sin^2 \alpha \, (n^2 - \sin^2 i) = 1 + 2 \cos \alpha \, . \sin i + \cos^2 \alpha \, . \sin^2 i,$$

$$n^2 \sin^2 \alpha = 1 + 2 \cos \alpha \, . \sin i + \sin^2 i.$$

Und setzen wir

$$1 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha,$$

$$(n^2 - 1) \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \, . \sin i + \sin^2 i,$$

$$\sqrt{n^2 - 1} \, . \sin \alpha = \cos \alpha + \sin i,$$

oder schliesslich

$$\sin i = \sin \alpha \sqrt{n^2 - 1} - \cos \alpha.$$

Ist nun der brechende Winkel des Prismas gleich dem Grenzwinkel für die Substanz des Prismas, so wird

$$\sin \alpha = \frac{1}{n}$$

gleich dem Brechungsexponenten aus der Substanz des Prismas in Luft. In dem Falle wird

$$\sin i = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$\sin i = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - 1} - \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - 1} = 0.$$

In dem Falle können also die Lichtstrahlen in dem Prisma nur dann eine totale Reflexion erleiden, wenn der Einfallswinkel nach der Bezeichnung des §. 16 negativ wird, der einfallende Strahl also in dem Quadranten zwischen Einfallsloth und brechender Kante liegt. Wird aber α grösser als der Grenzwinkel, so wird der Werth für $\sin i$ grösser als 0. Ist z. B. der Winkel des Prismas gleich dem doppelten Grenzwinkel g, so ist

$$\sin \alpha = 2 \sin g \,.\, \cos g = 2 \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - 1},$$

$$\cos \alpha = \cos^2 g - \sin^2 g = 1 - 2 \sin^2 g$$

und somit

$$\sin i = \frac{2}{n^2} (n^2 - 1) - 1 + \frac{2}{n^2} = 1.$$

Der Einfallswinkel, welcher den Winkel, den der Strahl mit dem zweiten Einfallsloth bildet, zum Grenzwinkel macht, ist gleich 90^0; es kann also nur Licht durch das Prisma treten, welches die erste Fläche unter streifender Incidenz trifft, alle sonstigen Strahlen können zwar in das Prisma eintreten, werden aber an der zweiten Fläche total reflectirt. Wird der brechende Winkel noch grösser als der doppelte Grenzwinkel, so kann gar kein Licht mehr durch das Prisma hindurchtreten.

Nehmen wir z. B. ein rechtwinkliges gleichschenkliges Glasprisma, dessen Brechungsexponent für die mittlern Strahlen gleich 1,6 ist, so ist für Licht, welches durch die eine Kathetenfläche und die Hypothenusenfläche hindurchtreten soll, $\alpha = 45^0$. Der Grenzwinkel für ein solches Glas ist $g = \text{arc}\left(\sin = \frac{1}{1{,}6}\right) = 38^0{,}66$ und damit wird der kleinste Einfallswinkel i, bei welchem das Licht noch durch das Prisma hindurchgeht aus

$$\sin i = \sin 45^0 \sqrt{1{,}56} - \cos 45^0,$$

$$\sin i = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{1{,}56} - 1) = \frac{0{,}249}{1{,}4142} = 0{,}1760,$$

$$i = 10^0\, 8'.$$

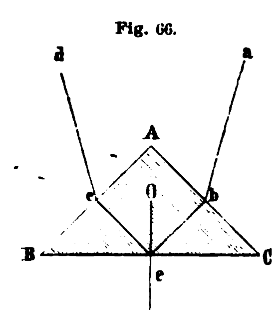
Lassen wir demnach einen Lichtstrahl senkrecht auf eine Kathetenfläche fallen, so wird er an der Hypothenusenfläche total reflectirt, und tritt dann aus der zweiten Kathetenfläche senkrecht wieder heraus. Wir erhalten daher durch diese Reflexion Bilder von allen Gegenständen, welche auf die Kathetenfläche Licht unter einem kleinern Winkel als $10^0\, 8'$ senden, so dass wir uns eines solchen Prismas als ebenen Spiegels bedienen können, der vor den gewöhnlichen Spiegeln noch den Vorzug hat, dass die von ihm gelieferten Bilder viel lichtheller sind als die gewöhnlicher Spiegel. Lässt man auf die eine

Kathetenfläche das Licht des Himmelsgewölbes fallen, so erscheint die Fläche beim Hinblick durch die andere Kathete in silberähnlichem Glanze. Durch diesen auffallenden Glanz kann man sehr leicht die totale Reflexion von der immer an der einen Seite eines Prismas eintretenden partiellen Reflexion unterscheiden.

Bestimmt man durch eine derartige Beobachtung den Winkel i, bei welchem sich zuerst dieser Glanz zeigt, so kann man aus diesem und dem brechenden Winkel leicht den Brechungsexponenten der Prismensubstanz für mittlere Strahlen bestimmen. Wollaston [1]) hat diese Methode fruchtbar angewandt, um auch die Brechungsexponenten anderer selbst undurchsichtiger Substanzen zu bestimmen. Das Princip der Wollaston'schen Methode ist einfach folgendes.

Sieht man auf ein Prisma ABC in der Richtung ab hin, so erhält man von den in der Richtung cd auffallenden Strahlen in Folge der Reflexion an BC ein Bild. Ist das Prisma gleichschenklig, so bildet, wie man unmittelbar sieht, die Richtung ab mit der zu AC senkrechten Richtung genau denselben Winkel als der einfallende Lichtstrahl dc mit seinem Einfallslothe. Aus der Bestimmung des Winkels Aba erhält man daher den Einfallswinkel i des Strahles dc. Sieht man nun in einer andern Richtung auf das Prisma, so ändert sich in ganz gleicher Weise die Richtung der einfallenden Strahlen, deren Bild man sieht, somit auch der Winkel ceo. Es wird ceo grösser, wenn der Einfallswinkel von dc kleiner, also Acd und Aba grösser werden, weil die Summe der beiden Winkel, welche ce mit den Einfallslothen von AB und BC bildet, immer gleich dem Winkel B ist. Wird nun der Winkel ceo gleich dem Grenzwinkel, so sieht man von a aus ganz plötzlich das Bild bei d um vieles heller werden, und die Gegenstände unterhalb Bc, welche man vorher noch sehen konnte, verschwinden. Misst man nun, sobald die Fläche Bc bei von dem hellen Himmel kommenden Lichte in jenem erwähnten Silberglanze erscheint, den Winkel Aba, so ist der Einfallswinkel

Fig. 66.



$$i = 90 - Aba$$

und unsere Formel

$$\sin i = \sin \alpha \sqrt{n^2 - 1} - \cos \alpha$$

gibt uns aus dem bekannten brechenden Winkel α in unserem Falle 45° den Werth für n, und daraus den Grenzwinkel ceo.

Wird nun ein Theil der untern Fläche BC des Prismas mit einem Körper in vollkommene Berührung gebracht, der einen Brechungsexponenten n' hat, der kleiner ist als n, aber grösser als der Brechungsexponent der Luft, so

1) *Wollaston*, Gilbert's Annalen. Bd. XXXI.

ist der Grenzwinkel g' der Totalreflexion beim Uebergange aus Glas in diese Substanz bestimmt durch

$$\sin g' = \frac{n'}{n},$$

derselbe ist also, da $n' > 1$, grösser als der Grenzwinkel beim Uebergange aus Glas in Luft. Sehen wir daher jetzt in der Richtung ab auf das Prisma, während in dc von dem hellen Himmel Licht auffällt, in derselben Richtung wie vorhin, so erscheint die Fläche BC ausser an der Stelle, wo sie mit dem angelegten Körper in Berührung ist, in jenem silberhellen Glanze, jene Stelle hebt sich also ganz scharf als die dunklere ab. Drehen wir jetzt aber das Prisma so, dass der Winkel Aba grösser, der Einfallswinkel i also kleiner wird, so wird der Winkel ceo grösser und wir werden dann bald zu einer solchen Stellung des Prismas gelangen, wo die Berührungsstelle der beiden Körper aufhört sichtbar zu sein, wo auch diese in Folge der totalen Reflexion in demselben Glanze erscheint als die übrige Fläche. Aus dem dann gemessenen Winkel Aba erhält man durch

$$i = 90^0 - Aba$$

dann den Winkel i, und aus

$$\sin i = \sin \alpha \sqrt{\left(\frac{n}{n'}\right)^2 - 1} - \cos \alpha$$

den Werth von $\frac{n}{n'}$ und daraus den Brechungsexponenten n' der an das Prisma gebrachten Substanz. Man kann in dem Falle n' auch so bestimmen, dass man aus i mit Hülfe des bekannten n den Brechungswinkel

$$r = 90^0 - Bce$$

berechnet, und dann, da

$$r + ceo = \alpha,$$
$$g' = ceo = \alpha - r$$

ist, direkt aus

$$\sin g' = \frac{n'}{n}$$

den Werth von n' berechnet.

Ist der zu untersuchende Körper fest und leichtflüssig, so bringt man ihn im geschmolzenen Zustande auf das Prisma und lässt ihn erkalten. Ist das nicht der Fall, so schleift man an ihn eine ebene Fläche und befestigt ihn mittels eines durchsichtigen Kittes an die Fläche BC, indem man zugleich die ganze Fläche BC mit diesem Kitte überzieht, und sie parallel zu BC abschleift. Der Brechungsexponent des Kittes muss grösser sein als der des Glases und der des Körpers. Man beobachtet in dem Falle zuerst die Grenze der totalen Reflexion an der untern Fläche des Kittes beim Uebergange des Lichtes in Luft und bestimmt daraus den Brechungsexponenten desselben, dann die beim Uebergange des Lichtes in den Körper und bestimmt dann aus dem so erhaltenen Verhältniss zwischen dem Brechungsexponenten des Kittes und des Körpers den gesuchten Brechungsexponenten des Körpers.

Wollaston hat auf diese Weise die Brechungsexponenten einer Anzahl von Körpern untersucht und bei dieser Gelegenheit gefunden, dass auch undurchsichtige Körper, mit dem Prisma in vollkommene Berührung gebracht, den Winkel der totalen Reflexion ändern, und dass sich bei vielen dieser Körper ein ganz bestimmter Winkel der totalen Reflexion findet. Wir sind daher berechtigt, auch diesen Körpern einen bestimmten Brechungsexponenten zuzuschreiben, um so mehr als wir wissen, dass eine Reihe, ja fast alle durchsichtige Körper bei gehöriger Dünne durchsichtig werden [1]).

So bestimmte Wollaston z. B. die Brechungsexponenten folgender Körper:

Colophonium	$n = 1{,}543$
Pech	$n = 1{,}531$
Butter, kalte	$n = 1{,}474$
Spermaceti	$n = 1{,}535$
Talg, kalt	$n = 1{,}492$
Wachs	$n = 1{,}542$.

§. 29.

Verschiedenheit der von verschiedenen Prismen erzeugten Spectra. Wenn man durch Prismen ein und derselben Substanz aber von verschiedenem brechenden Winkel Sonnenspectra erzeugt, so haben dieselben eine verschiedene Grösse, indem die Ablenkung des Lichtes um so grösser wird, je grösser der brechende Winkel des Prismas wird. Da aber die Ablenkung der einzelnen farbigen Strahlen in demselben Verhältnisse zunimmt, so nimmt die Ausdehnung aller Farben in demselben Verhältnisse zu, als die des ganzen Spectrums; erhält dasselbe die doppelte oder dreifache Länge, so erhält auch jede Farbe die doppelte oder dreifache Ausdehnung. Die relative Lage der einzelnen Farben wird also dadurch gar nicht geändert.

Anders verhält es sich jedoch, wenn wir Prismen verschiedener Substanzen und gleicher brechenden Winkel anwenden. Bei diesen ist nicht nur die Ausdehnung des ganzen Spectrum eine verschiedene, sondern auch diejenige der einzelnen Farben, wie eine Betrachtung der in den frühern Paragraphen angegebenen Brechungsverhältnisse ergibt.

Nennen wir die Brechungsexponenten der äussersten rothen Strahlen oder derjenigen, welche der dunkeln Linie B entsprechen, n_r, und derjenigen, welche der im Violetten liegenden dunkeln Linie H entsprechen, n_v, so werden wir die Differenz

$$n_v - n_r$$

als das Maass der durch ein Prisma einer bestimmten Substanz erzeugten Dispersion ansehen können. Denn die Ablenkung des Lichtes durch ein Prisma wird um so grösser, je grösser der Brechungsexponent der Prismensubstanz ist. Je grösser daher die Differenz $n_v - n_r$ ist, um so grösser wird auch die

1) *Beer,* Einleitung in die höhere Optik. p. 52 ff.

Differenz der Ablenkungen der rothen und violetten Strahlen, um so grösser die Länge des Spectrums.

Für die von Fraunhofer untersuchten Substanzen, welche wir zum grossen Theil in unsern frühern Tabellen aufgenommen haben, sind diese Differenzen [1]) folgende:

			Brechungsexponent von E
Flintglas	No. 13	$n_v - n_r = 0{,}043313$	1,642024
Crownglas	„ 9	„ „ „ 0,020734	1,533005
Wasser		„ „ „ 0,013242	1,337818
Kali		„ „ „ 0,016739	1,405632
Terpentinöl		„ „ „ 0,023378	1,478353
Flintglas	No. 3	„ „ „ 0,038331	1,614513
Flintglas	„ 30	„ „ „ 0,042502	1,637356
Crownglas	„ 13	„ „ „ 0,020372	1,531373
Crownglas	Lttr. M	„ „ „ 0,024696	1,563150
Flintglas	No. 23	„ „ „ 0,043116	1,640544

Bei gleichen brechenden Winkeln werden sich daher die Längen der von den verschiedenen Substanzen erzeugten Spectren verhalten nahezu wie diese Zahlen, oder ein Spectrum durch ein Prisma von Flintglas No. 13 erzeugt, wird ungefähr die doppelte Länge eines Spectrum haben, welches durch ein Prisma von Crownglas No. 9 erzeugt ist, und etwas mehr als die dreifache Länge eines Wasserspectrum bei gleichen brechenden Winkeln der Prismen.

Die Zerstreuungen des Lichtes durch die verschiedenen Substanzen stehen in keiner erkennbaren Beziehung zu der mittlern Brechung des Lichtes, das heisst, es ist keinesweges die Zerstreuung des Lichtes um so grösser, je grösser die mittlere Brechung desselben ist. Man kann als Maass der Brechung die Brechungsexponenten der mittlern Strahlen D oder E betrachten, und ein Blick auf die letzte Columne der obigen Tabelle zeigt, wie verschieden das Verhältniss der Zahlen der ersten Reihe und derjenigen der zweiten zu einander ist. So ist z. B. die Zerstreuung durch ein Prisma mit Terpentinöl grösser als durch Crownglas No. 9 und No. 13, dagegen ist der mittlere Brechungsexponent des Terpentinöles um vieles kleiner. Die Dispersionen von Flintglas 13 und Crownglas 9 verhalten sich fast wie 2 : 1, dagegen die mittlern Brechungsexponenten wie 164 : 153.

Bei gleicher Ablenkung der mittlern Strahlen wird daher die Länge der Spectra eine sehr verschiedene sein, bei gleicher Länge der Spectra dagegen die Ablenkung nicht dieselbe sein.

Bei gleicher Länge der ganzen Spectra ist die Ausdehnung der einzelnen Farben oder die Lage der gleichen Strahlen im Spectrum verschiedener Substanzen eine sehr verschiedene. So wie die Differenz der Brechungsexponenten der äussern Strahlen uns ein Maass gibt für die Länge des ganzen Spectrum

1) *Fraunhofer*, Denkschriften der Münchener Akademie auf die Jahre 1814 bis 1815. V. Band.

bei Prismen gleicher brechender Winkel, so ist ebenso die Differenz der Brechungsexponenten zweier bestimmter Strahlen das Maass für den Abstand derselben im Spectrum.

Das Verhältniss der totalen Dispersionen gibt uns daher ein Bild der ganzen Spectra zweier Substanzen in ihrem Verhältniss zu einander, das Verhältniss der partiellen Dispersionen dagegen die Lage der einzelnen Theile zu einander, die Ausdehnung der einzelnen Farben. Folgende von Fraunhofer entworfene Tabelle wird uns daher ein Bild der Verschiedenheiten in den Spectris verschiedener Substanzen liefern.

Tabelle des Verhältnisses der partiellen und totalen Dispersionen verschiedener Substanzen.

Brechende Mittel	$\frac{H-B}{H'-B'}$	$\frac{C-B}{C'-B'}$	$\frac{D-C}{D'-C'}$	$\frac{E-D}{E'-D'}$	$\frac{F-E}{F'-E'}$	$\frac{G-F}{G'-F'}$	$\frac{H-G}{H'-G'}$
Flintglas No. 13 / Wasser	3,270	2,562	2,871	3,073	3,193	3,460	3,726
Flintglas No. 13 / Crownglas No. 9	2,088	1,900	1,956	2,044	2,047	2,145	2,195
Crownglas No. 9 / Wasser	1,565	1,349	1,468	1,503	1,560	1,613	1,697
Terpentinöl / Wasser	1,765	1,371	1,557	1,723	1,732	1,860	1,963
Flintglas No. 13 / Terpentinöl	1,857	1,868	1,844	1,783	1,843	1,861	1,899
Flintglas No. 13 / Kali	2,590	2,181	2,338	2,472	2,545	2,674	2,844
Kali / Wasser	1,254	1,175	1,228	1,243	1,254	1,294	1,310
Terpentinöl / Kali	1,397	1,167	1,268	1,386	1,381	1,437	1,498
Flintglas No. 3 / Crownglas No. 9	1,849	1,729	1,714	1,767	1,808	1,914	1,956
Crownglas No. 13 / Wasser	1,538	1,309	1,436	1,492	1,518	1,604	1,651
Crownglas M / Wasser	1,864	1,537	1,682	1,794	1,839	1,956	2,052
Crownglas M / Crownglas No. 13	1,212	1,174	1,171	1,202	1,211	1,220	1,243
Flintglas No. 13 / Crownglas M	1,794	1,667	1,704	1,715	1,737	1,770	1,816
Flintglas No. 3 / Crownglas M	1,552	1,517	1,494	1,482	1,534	1,579	1,618
Flintglas No. 30 / Crownglas No. 13	2,086	1,932	1,904	1,997	2,061	2,143	2,233
Flintglas No. 23 / Crownglas No. 13	2,116	1,904	1,940	2,022	2,107	2,168	2,268

Die erste Columne der Zahlen zeigt, wie viel grösser die totale Dispersion der ersten von den beiden verglichenen Substanzen ist, z. B. also nahezu um wie viel länger bei gleichem brechenden Winkel das Flintglasspectrum als das Wasserspectrum ist, die folgenden Columnen vergleichen die Ausdehnungen der einzelnen Farben, und man sieht, wie die Längen dieser in ganz verschiedenem Verhältnisse stehen.

Die Länge des Rothen z. B. ist bei Flintglas nur das Zweiundeinhalbfache desjenigen des Rothen im Wasserspectrum, die des Violetten fast das Vierfache. Im Allgemeinen ist bei zwei verschiedenen Substanzen das Verhältniss der Dispersionen der stärker brechbaren Strahlen auch das grössere, das heisst bei zwei verschiedenen Spectris ist der Unterschied in der Ausdehnung der Farben um so grösser, je näher die Farbe dem violetten Ende des Spectrums ist, jedoch ausschliesslich lässt der Satz sich auch nicht aufstellen, indem z. B. bei Flintglas 13 und Terpentinöl die Länge der Spectra sich verhält wie 1,857 : 1, die Ausdehnung des Rothen im ersten zu der im zweiten Spectrum ist 1,868 : 1, die des Grünen nur 1,783 : 1.

Es lässt sich also auch hier gar keine Beziehung zwischen dem Verhältniss der partiellen und totalen Dispersionen der verschiedenen Substanzen erkennen.

Vergleichen wir nun zwei Spectra, deren eines durch ein Flintglasprisma erzeugt ist, während das andere von einem Wasserprisma herrührt, welches mit dem ersten den gleichen brechenden Winkel hat, so ist zunächst das Wasserspectrum bedeutend weniger abgelenkt als das Flintglasspectrum, ferner ist ersteres nahezu dreimal länger, das Roth hat jedoch nur eine 2,5 mal grössere Ausdehnung, das Gelb eine 2,8 mal grössere und das Violett eine nahezu viermal grössere Ausdehnung als das des Wasserspectrum. Vergrössern wir den brechenden Winkel des Wasserprisma so weit, dass die Spectra gleiche Grösse haben, so ist das Wasserspectrum viel weiter abgelenkt, und die Farben haben eine keineswegs gleiche Ausdehnung. Im Wasserspectrum ist Roth, Orange, Gelb, Grün weit ausgedehnter als im Flintglasspectrum, die Ausdehnung des Blauen ist in beiden nahezu gleich, das Violett dagegen ist im Wasserspectrum weit kürzer als in dem des Flintglases.

§. 30.

Von der Achromasie. Wenn das Licht durch ein Prisma oder überhaupt durch eine durchsichtige Substanz mit nicht parallelen Seitenflächen hindurchtritt, so wird es nicht nur von seiner Bahn abgelenkt, sondern im Allgemeinen auch, wenn es nicht einfarbig homogen war, in seine farbigen Bestandtheile zerlegt. Man kann jedoch auch Prismen construiren, bei denen eine Ablenkung des Lichtes eintritt, ohne dass dabei eine merkliche Farbenzerstreuung sich zeigt. Solche Prismen nennt man achromatische. Abgesehen von Prismen, welche aus Gasen bestehen, bei welchen eine Dispersion kaum merklich, die Ablenkung der Strahlen aber auch nur unbedeutend

ist, können Prismen nur dann achromatisch sein, wenn sie zusammengesetzt sind, wenn sie aus zweien bestehen, deren zweites die durch das erste hervorgebrachte Dispersion wieder aufhebt. Daraus ergibt sich dann zunächst für die Construction derartiger Apparate, dass die brechende Kante des zweiten Prisma die entgegengesetzte Lage haben muss, als diejenige des ersten Prisma, dass sie oben sein muss, wenn diejenige des ersten Prisma unten ist, rechts gestellt, wenn jene nach links gerichtet ist, gerade so, wie wir in §. 19 zwei Prismen gleicher Substanz und gleichen brechenden Winkels zusammenstellen mussten, um aus dem farbigen Lichte das weisse wieder herzustellen.

Wenn aber nun bei Aufhebung der Dispersion die Ablenkung der Strahlen nicht zugleich Null werden soll, so sieht man ferner unmittelbar, dass die Prismen so beschaffen sein müssen, dass sie Spectra von gleicher Grösse geben müssen bei verschiedener Ablenkung derselben. Man wird also zwei Substanzen wählen müssen, welche bei nahe gleichem mittleren Brechungsvermögen eine sehr verschiedene zerstreuende Kraft haben. Indem man dann den brechenden Winkel des Prismas mit kleinerer zerstreuender Kraft so viel vergrössert, dass das von ihm erzeugte Spectrum dem des andern Prismas an Grösse gleich wird, vereinigt das zweite Prisma die divergirenden farbigen Strahlen, ohne jedoch die Ablenkung aufzuheben, welche die Strahlen durch das erste Prisma erfahren haben.

So ist z. B. die Differenz der Brechungsexponenten für rothe und violette Strahlen bei Flintglas No. 13 gleich 0,0433, bei Crownglas No. 9 dagegen 0,0207, die beiden Brechungsexponenten für mittlere Strahlen sind aber respective 1,6420 und 1,5330. Stellen wir nun aus jeder der Substanzen Prismen her, deren brechende Winkel sich nahezu umgekehrt verhalten wie die Zahlen, welche uns die zerstreuenden Kräfte repräsentiren, also ein Flintglasprisma von 20^0 und ein Crownglasprisma von circa 45^0, so werden die von beiden Prismen erzeugten Spectra die gleiche Grösse haben.

Da aber die Brechungsexponenten der beiden Substanzen sich wie 164 : 153 verhalten, so ist die Ablenkung des Crownglasspectrums, da die Ablenkung mit dem brechenden Winkel zunimmt, um vieles grösser. Wenn wir nun die beiden Prismen in der angegebenen Weise zusammenfügen, so wird durch das Flintglasprisma ein Theil der Ablenkung der Strahlen aufgehoben, indem dieselben nach entgegengesetzter Richtung abgelenkt werden; bei der Verschiedenheit der brechenden Winkel bleibt indess eine Ablenkung der mittlern Strahlen im Sinne des Crownglasprismas von circa 15^0 übrig. Die Brechung der violetten Strahlen im Flintglasprisma ist aber gerade so viel grösser, wie die der rothen Strahlen, als sie es vorher im Crownglasprima war, und deshalb werden durch die entgegengesetzte Brechung in dem zweiten Prisma die austretenden Strahlen wiederum parallel und ungefähr 15^0 von ihrer ursprünglichen Richtung abgelenkt. Eine so dargestellte Combination von Flintglas und Crownglas ist demnach ein achromatisches Prisma.

Um genau das Verhältniss der brechenden Winkel einer achromatischen Combination sowie die übrig bleibende Ablenkung zu erhalten, haben wir nur die frühern Sätze über Brechung des Lichtes in Prismen anzuwenden.

Wir hatten früher für die Ablenkung δ eines Lichtstrahls, welcher unter dem Einfallswinkel i ein Prisma von dem brechenden Winkel α traf,

$$\delta = i + i' - \alpha,$$

worin i' den Winkel bedeutet, welchen der austretende Lichtstrahl mit dem Einfallslothe der zweiten Prismenfläche bildet, und der bestimmt ist durch die Gleichung

$$\sin i' = \sin \alpha \, . \sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos \alpha \, . \sin i,$$

worin n der Brechungsexponent des Prismas für den eintretenden Lichtstrahl bedeutet.

Bezeichnen wir nun mit Δ_r die Ablenkung, welche die rothen, mit Δ_v diejenige, welche die violetten Strahlen durch das combinirte Prisma erfahren, so ist die Bedingung der Achromasie, dass

$$\Delta_v - \Delta_r = 0$$

oder

$$\Delta_v = \Delta_r \, .$$

Die Ablenkung der rothen Strahlen muss gleich sein derjenigen der violetten.

Da nun alle Strahlen die erste Seite des ersten Prismas unter demselben Winkel treffen, so wird dieser Bedingung genügt, wenn die rothen und violetten Strahlen die letzte Fläche unter demselben Winkel verlassen. Bezeichnen wir die Winkel der austretenden rothen und violetten Strahlen mit dem Einfallsloth nun resp. mit $i_{,r}$ und $i_{,v}$, so muss

$$i_{,r} = i_{,v}$$

oder $\sin i_{,r} = \sin i_{,v}$ sein.

Wir nehmen nun an, dass die erste Seite des zweiten Prismas der zweiten des ersten parallel sei, die rothen oder violetten Strahlen treten dann unter denselben Einfallswinkeln i'_r oder i'_v in das zweite Prisma, unter welchen sie das erste verlassen.

Sind dann n_r, n_v die Brechungsexponenten der rothen und violetten Strahlen im ersten, $n_{,r}$, $n_{,v}$ die derselben Strahlen im zweiten Prisma und α' der brechende Winkel des letztern, so haben wir

$$\sin i_{,v} = \sin \alpha' \sqrt{n_{,v}^2 - \sin^2 i'_v} - \cos \alpha' \, . \sin i'_v$$

$$\sin i_{,r} = \sin \alpha' \sqrt{n_{,r}^2 - \sin^2 i'_r} - \cos \alpha' \, . \sin i'_r .$$

Es muss demnach

$$\sin \alpha' . \sqrt{n_{,v}^2 - \sin^2 i'_v} - \cos \alpha' . \sin i'_v = \sin \alpha' \sqrt{n_{,r}^2 - \sin^2 i'_r} - \cos \alpha' . \sin i'_r$$

oder

$$\operatorname{tang} \alpha' \left\{ \sqrt{n_{,v}^2 - \sin^2 i'_v} - \sqrt{n_{,r}^2 - \sin^2 i'_r} \right\} = \sin i'_v - \sin i'_r ,$$

und indem wir für die Glieder der rechten Seite ihre Werthe durch n_r, n_v, α und i einsetzen

$$\operatorname{tang}\alpha' \left\{\sqrt{n_{,v}^2 - \sin^2 i'_v} - \sqrt{n_{,r}^2 - \sin^2 i'_r}\right\} = \sin\alpha \left\{\sqrt{n_v^2 - \sin^2 i} - \sqrt{n_r^2 - \sin^2 i}\right\}$$

und daraus

$$\operatorname{tang}\alpha' = \sin\alpha \frac{\sqrt{n_v^2 - \sin^2 i} - \sqrt{n_r^2 - \sin^2 i}}{\sqrt{n_{,v}^2 - \sin^2 i'_v} - \sqrt{n_{,r}^2 - \sin^2 i'_r}}.$$

Nehmen wir also z. B. ein Crownglasprisma No. 9, dessen brechender Winkel gleich 60° ist und berechnen den brechenden Winkel eines Prisma von Flintglas No. 13, welches mit dem ersten zusammen eine achromatische Combination bildet; und nehmen wir dabei an, dass die Lichtstrahlen so auffallen, dass die Strahlen mittlerer Brechbarkeit im Crownglasprisma das Minimum der Ablenkung erhalten würden, also $i = 50^0$.

Für Crownglas No. 9 ist

$$n_v = 1{,}5465$$
$$n_r = 1{,}5258$$

Für Flintglas No. 13

$$n_{,v} = 1{,}6710$$
$$n_{,r} = 1{,}6277.$$

Setzen wir diese Werthe in unseren Ausdruck für $\operatorname{tang}\alpha'$ ein, so wird

$$\operatorname{tang}\alpha' = \sin 60^0 \frac{0{,}02388}{0{,}03680} = \frac{0{,}02064}{0{,}03680}$$
$$\operatorname{tang}\alpha' = 0{,}56087 = \operatorname{tang} 29^0\,17'.$$

Fügen wir demnach dem Crownglasprisma von 60° brechendem Winkel ein Flintglasprisma hinzu, dessen brechender Winkel gleich 29° 17′ ist, so dass die brechende Kante des letztern Prismas umgekehrt liegt als diejenige des erstern, so werden die das erste Prisma unter einem Einfallswinkel von 50° treffenden Lichtstrahlen diese Combination durchsetzen, ohne dass sie bei der Ablenkung in ein Spectrum zerlegt werden.

Die Grösse der bleibenden Ablenkung erhalten wir aus Δ_v oder Δ_r, nachdem wir den Winkel $i_{,v}$ oder $i_{,r}$ mit Hülfe des gefundenen Werthes von α' berechnet haben. Wir erhalten in diesem Falle für $i_{,v}$

$$\sin i_{,v} = -\,0{,}35740 = \sin -\,20^0\,56'.$$

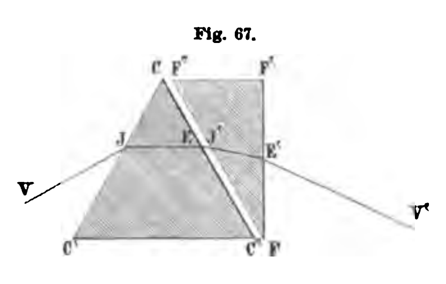
Das negative Vorzeichen von $i_{,v}$ bedeutet, dass der Lichtstrahl an der entgegengesetzten Seite des Einfallslothes in Bezug auf die brechende Kante des zweiten Prismas liegt als der einfallende Lichtstrahl. Der Winkel, den der austretende Lichtstrahl mit dem Einfallslothe der zweiten Prismenfläche bildet, ist positiv gerechnet, wenn der Lichtstrahl von der brechenden Kante fortgebrochen wird, er muss daher das negative Vorzeichen erhalten, wenn er zur brechenden Kante hingebrochen wird. Fig. 67 stellt den hier berechneten Fall dar.

Mit diesem Werthe von $i_{,v}$ erhalten wir

$$\Delta_v = 50^0 + 20^0\,56' - 60^0 + 29^0\,17' = 40^0\,13'.$$

Aus unserer Rechnung ergibt sich, dass diese Combination nur achromatisch ist für die unter dem bestimmten Winkel i auf die Vorderfläche CC' des Prismas $CC'C''$ auffallenden Strahlen; ist der Einfallswinkel ein anderer, so wird der Winkel α' ein anderer, oder man muss die Stellung des zweiten Prismas so abändern, dass auch dann die rothen und violetten Strahlen unter denselben Winkeln die Fläche FF'' des zweiten Prismas treffen, also den Parallelismus der Flächen CC'' und FF'' schwinden lassen. In allen Fällen aber, das heisst für jeden Einfallswinkel i wird jedoch die Zerstreuung durch eine solche Combination vermindert.

Fig. 67.



Für den angenommenen Einfallswinkel i ist die Farbenzerstreuung durch unsere Combination am kleinsten, vollständig ist sie jedoch auch dort nicht aufgehoben.

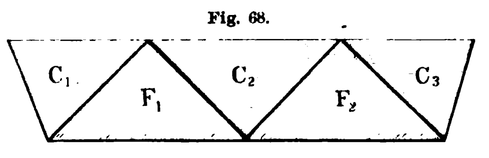
Der Winkel α' des Flintglasprismas ist so berechnet, dass die Ausdehnung beider Spectra genau dieselbe ist, so dass bei der entgegengesetzten Brechung im zweiten Prisma die rothen und violetten Strahlen parallel austreten. Sollten nun auch alle übrigen Strahlen mit diesen parallel austreten, so müsste die relative Lage aller Farben in den beiden Spectris dieselbe, das heisst die durch die beiden Prismen erzeugten Spectra müssten identisch sein. Im vorigen Paragraphen sahen wir jedoch, dass das nicht der Fall ist, dass das Verhältniss der Ausdehnung der einzelnen Farben in den Spectris sehr verschieden von einander und vom Verhältniss der beiden Spectra selbst ist. Das Grün z. B. liegt im Crownglasspectrum dem violetten Ende näher als im Flintglasspectrum. Wenn daher das zweite Prisma das violette Licht dem rothen parallel austreten lässt, so wird das grüne dem rothen noch nicht parallel werden, die durch ein solches Prisma hindurchgehenden Strahlen werden daher noch ein schwaches rothgrünes Spectrum liefern.

Mit Hülfe eines oder mehrerer zu dieser Combination hinzugefügten Prismen würde man nun auch diese secundären Farbenerscheinungen zum Verschwinden bringen können, und man sieht leicht, dass es für jede Fraunhofer'sche Linie im Spectrum, um sie mit B und H, welche durch die einfache Combination zusammentreffen, coincidiren zu lassen, eines neuen Prismas bedarf. Indess finden die complicirteren Prismen nur äusserst selten Anwendung, so dass es überflüssig sein wird, sie zu berechnen, besonders da die Rechnung sich von obiger nicht wesentlich unterscheidet.

Ganz ebenso wie man Prismen construiren kann, welche den Strahl ohne Dispersion ablenken, kann man andrerseits auch Prismen construiren, welche ein nicht abgelenktes Spectrum geben; solche Prismen werden in neuerer Zeit von Hofmann in Paris für die später zu besprechenden Spectralapparate con-

struirt, er nennt sie prismes à vision directe. Dieselben bestehen (Fig. 68) meist aus fünf Prismen, zwei gleichschenkligen Flintglasprismen F_1 und F_2, deren brechenden Winkel Hofmann gleich 90° nimmt und drei entgegengesetzt liegenden Crownglasprismen, von denen das mittelste C_2 ebenfalls gleichschenklig ist, während die beiden äussern so geschliffen werden, dass die Ablenkung der mittlern Strahlen gerade aufgehoben wird. Die brechenden Winkel werden dann aus der Bedingung berechnet, dass δ für die mittlern Strahlen gleich Null wird. Man berechnet zu dem Ende zunächst die Ablenkung, welche die drei mittleren Prismen für sich den mittlern Strahlen ertheilen und dann den brechenden Winkel von C_1 und C_3 so, dass diese Ablenkung gerade aufgehoben wird. Sind die Rechnungen auch etwas langwierig, so sind sie doch so einfach, dass wir nicht näher darauf einzugehen haben.

Fig. 68.



Sind die mittlern Strahlen gerade corrigirt, so sind die weniger brechbaren übercorrigirt, die brechbarern dagegen bleiben noch abgelenkt, man erhält daher ein Spectrum, dessen Roth der brechenden Kante der Flintglasprismen zunächst liegt.

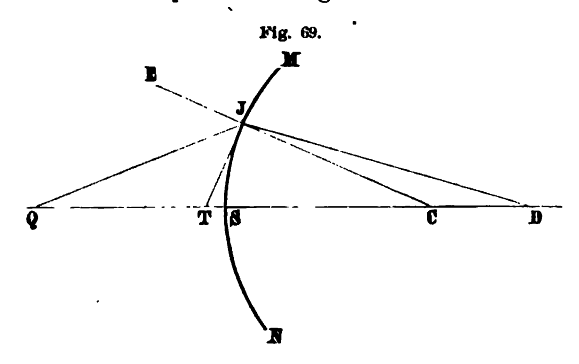
§. 31.

Brechung des Lichtes durch krumme Flächen. Das Gesetz, nach welchem die Lichtstrahlen beim Uebergange aus einem Mittel in ein zweites gebrochen werden, ist unabhängig von der Form der Begrenzung der Mittel. Auch für krumme Flächen gilt daher dasselbe Gesetz, dass die gebrochenen Lichtstrahlen mit den einfallenden in derselben Ebene liegen, und dass der Quotient aus dem Sinus des Einfalls- und Brechungswinkels eine constante Grösse, der Brechungsexponent des Mittels, sein muss. Wenn man daher bei Mitteln, welche von krummen Flächen begrenzt sind, den Brechungsexponenten des Mittels und den Einfallswinkel des Lichtes kennt, so lässt sich auch hier sofort der Gang des gebrochenen Lichtes bestimmen. Wie aber bei der Reflexion, so wird auch hier die Bestimmung der gebrochenen Lichtstrahlen complicirter als bei ebenen Flächen, indem die Einfallslothe für die verschiedenen Punkte der Fläche nicht einander parallel sind, sondern an den verschiedenen Punkten verschiedene Richtungen haben, welche durch die Natur der krummen Fläche bestimmt sind. Es ist daher, um den Gang der in krummen Flächen gebrochenen Lichtstrahlen zu bestimmen, nothwendig, das Krümmungsgesetz der Flächen zu kennen.

Bei der Behandlung dieser mehr in das Gebiet der Geometrie als der Physik fallenden Aufgabe wollen wir uns auf einen speciellen Fall beschränken, der allein für uns von Interesse ist, auf die Brechung des Lichtes durch kugelförmige Flächen.

Sei zu dem Ende MN der Durchschnitt durch eine kugelförmige Fläche, deren Mittelpunkt in C liegt, auf welche ein leuchtender Punkt Q seine Strahlen sendet, und suchen wir die Richtung zu bestimmen, nach welcher irgend ein Strahl QJ, der den Durchschnitt MN in J trifft, gebrochen wird. Wir werden dieselbe durch den Abstand SD bestimmt haben, in welchem der gebrochene Strahl die passend verlängerte Verbindungslinie QC des leuchtenden Punktes mit dem Mittelpunkt der Kugel auf alle Fälle schneiden wird.

Fig. 69.



Bezeichnen wir nun den Einfallswinkel QJE mit i, und den Brechungswinkel CJD mit i', den Brechungsexponenten aus dem ersten vor MN liegengen Mittel, aus welchem das Licht kommt, in das zweite mit n, so haben wir

$$\frac{\sin i}{\sin i'} = n.$$

Nach dem Satze der Trigonometrie, dass sich in einem Dreiecke zwei Seiten verhalten wie die Sinus der Gegenwinkel, ist dann weiter

$$\frac{QC}{CJ} = \frac{\sin QJC}{\sin JQD} = \frac{\sin EJQ}{\sin JQD}$$

und ebenso

$$\frac{CD}{CJ} = \frac{\sin CJD}{\sin CDJ}$$

und durch Division der beiden letzten Gleichungen

$$\frac{QC}{CD} = \frac{\sin EJQ}{\sin JQD} \cdot \frac{\sin CDJ}{\sin CJD} = \frac{\sin i}{\sin i'} \cdot \frac{\sin CDJ}{\sin JQD}.$$

Nun ist weiter

$$\frac{\sin CDJ}{\sin JQD} = \frac{QJ}{JD}$$

und somit

$$\frac{QC}{CD} = n\frac{QJ}{JD}.$$

Wir erhalten daraus

$$CD = \frac{JD \cdot QC}{n \cdot QJ}$$

und folglich

$$SD = SC + \frac{JD \cdot QC}{n \cdot QJ}.$$

Man sieht demnach, der Werth von SD hängt, ausser von dem Radius der Kugel, ab von der Lage des leuchtenden Punktes und der des Punktes J, wo der Strahl die Fläche trifft. Bei constantem Abstande des leuchtenden Punktes ist er daher für alle Strahlen derselbe, für welche J dieselbe Lage hat. Lassen wir daher die Figur 69 um QD als Axe sich drehen, so wird der Punkt J einen Ring beschreiben, und alle diesen Ring treffenden Strahlen werden nach der Brechung die Axe in D schneiden. Man nennt daher D den Brennpunkt dieses Ringes. Die Brennpunkte der verschiedenen Ringe aber, welche der Punkt J in andern Lagen beschreibt, werden verschieden weit von S entfernt sein.

Beschränken wir uns aber auch hier wieder nur auf solche Strahlen, welche sehr nahe bei S auftreffen, so werden wir für diese Strahlen ohne merklichen Fehler setzen können

$$QJ = QS \text{ und } JD = SD,$$

demnach

$$\frac{QC}{CD} = n\,\frac{QS}{SD}.$$

Bezeichnen wir jetzt den Abstand des leuchtenden Punktes von S mit a, den Abstand SD des Punktes, in welchem der gebrochene Lichtstrahl die Axe schneidet vom Scheitel mit f, und den Radius der Kugelfläche mit r, so erhalten wir

$$\frac{a+r}{f-r} = n\,\frac{a}{f},$$

woraus durch einfache Umformung sich ergibt

$$f = \frac{nar}{na-a-r} \quad \ldots \quad (1).$$

Diese Ableitung gilt zunächst nur für kugelförmige Flächen, welche dem Lichtstrahle ihre convexe Seite darbieten, indess folgt aus dem Reciprocitätsgesetze, dass wenn D der leuchtende Punkt und DJ der aus dem zweiten Mittel in das erste einfallende Lichtstrahl ist, dass dann JQ der gebrochene Lichtstrahl ist. Die von D ausgehenden Centralstrahlen werden daher ebenso in Q ihren Brennpunkt haben, wie die von Q ausgehenden ihn in D haben. Um daher den Brennpunkt zu erhalten für den Fall, dass auf die concave Seite der Kugelfläche das Licht auffällt, haben wir in unserem obigen Ausdrucke a und f mit einander zu vertauschen, indem dann SD der Abstand des leuchtenden und QS der des Brennpunktes vom Scheitel ist, und anstatt

$$\frac{\sin i}{\sin i'} = n$$

einzusetzen

$$\frac{\sin i'}{\sin i} = n,$$

da wir den Brechungsexponenten des Mittels, in welches das Licht eintritt, mit n bezeichneten, und jetzt i' der Einfallswinkel und i der Brechungswinkel ist. Demnach erhalten wir

$$a = \frac{fr}{f - nf - nr}$$

oder

$$f = \frac{nar}{a - na - r} = \frac{-nar}{na - a + r}.$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich von dem vorigen nur dadurch, dass hier r, der Radius der Fläche, das entgegengesetzte Vorzeichen hat. Wir können daher den vorher entwickelten Ausdruck

$$f = \frac{nar}{na - a - r}$$

als den für alle Fälle gültigen betrachten, indem wir das Vorzeichen von r unbestimmt lassen und bemerken, dass dasselbe positiv ist, wenn die Fläche dem ankommenden Lichtstrahl die convexe, negativ jedoch, wenn sie demselben die concave Seite darbietet. Das Gleiche gilt für alle aus diesem abgeleitete Ausdrücke.

Unser Ausdruck wird bequemer, wenn wir anstatt des Werthes f seinen reciproken Werth einführen, es wird dann

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{r} - \frac{1}{nr} - \frac{1}{na}$$

oder

$$\frac{n}{f} + \frac{1}{a} = \frac{n-1}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Bezeichnen wir den Abstand f, wenn der Abstand a unendlich wird, also die Brennweite paralleler Strahlen mit F, so wird, da dann

$$\frac{1}{a} = o,$$

$$\frac{n}{F} = \frac{n-1}{r}$$

$$F = \frac{nr}{n-1}.$$

Den im Abstand F von dem Scheitel der brechenden Fläche liegenden Punkt, in welchem sich vor der Brechung die mit der Axe parallelen Strahlen nach der Brechung schneiden, nennt man den zweiten Hauptbrennpunkt der brechenden Fläche.

Setzen wir F in die allgemeine Gleichung (2) ein, so wird dieselbe

$$\frac{n}{f} + \frac{1}{a} = \frac{n}{F} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Bezeichnen wir ferner den Abstand des leuchtenden Punktes, für welchen der Brennpunkt unendlich weit entfernt ist, mit A, so haben wir

$$\frac{1}{A} = \frac{n-1}{r}$$

$$A = \frac{r}{n-1}; \quad F = nA.$$

Diesen Punkt, von welchem die Strahlen ausgehen müssen, damit sie nach der Brechung parallel werden, nennt man den ersten Hauptbrennpunkt der brechenden Fläche.

Mit Hülfe der für A erhaltenen Ausdrücke wird die Gleichung (2)

$$\frac{n}{f} + \frac{1}{a} = \frac{1}{A}$$

$$\frac{nA}{f} + \frac{A}{a} = 1 = \frac{F}{f} + \frac{A}{a} \quad \ldots \quad (4).$$

Und daraus erhalten wir für f den Ausdruck

$$f = \frac{aF}{a - A} \quad \ldots \quad (5).$$

Die verschiedenen Ausdrücke für den Abstand des Brennpunktes von dem Scheitel der brechenden Fläche sind je nach den verschiedenen Grössen, welche in Bezug auf dieselbe gegeben sind, bald der eine, bald der andere bequemer anzuwenden.

Ganz analoge Ausdrücke erhalten wir für den Abstand des Brennpunktes vom Mittelpunkte der brechenden Fläche. Bezeichnen wir den Abstand des leuchtenden Punktes von dem Mittelpunkte C mit b, und den des Brennpunktes mit g, so können wir den vorhin (p. 176) abgeleiteten Ausdruck

$$\frac{QC}{CD} = n \frac{QS}{SD}$$

schreiben

$$\frac{b}{g} = n \frac{b - r}{g + r},$$

woraus

$$g = \frac{br}{(n-1)\,b - nr} \quad \ldots \quad (1\text{a})$$

und

$$\frac{1}{g} + \frac{n}{b} = \frac{n-1}{r} \quad \ldots \quad (2\text{a}).$$

Bezeichnen wir nun wieder den Abstand des zweiten Hauptbrennpunktes vom Mittelpunkte mit G, so wird, da dann

$$\frac{n}{b} = 0,$$

$$\frac{1}{G} = \frac{n-1}{r}, \; G = \frac{r}{n-1}$$

und

$$\frac{1}{g} + \frac{n}{b} = \frac{1}{G} \quad \ldots \quad (3\text{a}).$$

Bezeichnen wir schliesslich den Abstand des ersten Hauptbrennpunktes mit B, so ist

$$\frac{n}{B} = \frac{n-1}{r}$$

$$B = \frac{nr}{n-1}, \; B = nG.$$

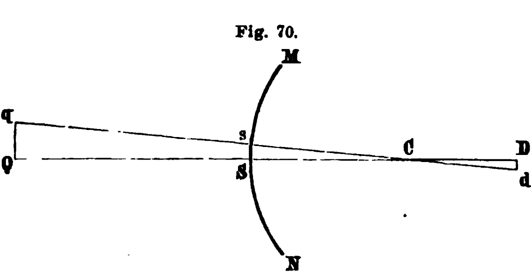
Daraus erhalten wir gerade wie vorhin

$$\frac{G}{g} + \frac{B}{b} = 1 \quad \ldots \ldots (4\,a)$$

$$g = \frac{b \,.\, G}{b - B} \quad \ldots \ldots (5\,a).$$

Unsere Entwicklung gilt zunächst nur für leuchtende Punkte, welche in der Axe der brechenden Fläche liegen, indess ist sie sofort auch auf solche Punkte zu übertragen, welche ausserhalb derselben in nicht grosser Entfernung von ihr liegen. Ist q (Fig. 70) ein solcher Punkt, dessen Verbindungslinie mit dem Mittelpunkte C, qC mit der Hauptaxe QC nur einen kleinen Winkel bildet, so ist qC ebenso die Axe des von q auf die brechende Fläche fallenden Strahlenkegels, wie es QC für den Punkt Q ist. Wenn wir uns daher wie vorhin nur auf die Strahlen beschränken, welche in der Nähe des Scheitels s die brechende Fläche treffen, so gelten die vorhin für den Punkt Q und die Axe QC abgeleiteten Sätze unmittelbar auch für den Punkt q in Bezug auf die Nebenaxe qC. Der dem Punkte q zugehörige Brennpunkt wird daher auf der Axe qC liegen in einem Abstande sd vom Scheitel, der uns gegeben wird durch

Fig. 70.



$$sd = \frac{n \,.\, sq \,.\, r}{(n-1)\, sq - r},$$

oder nach Gleichung (3)

$$\frac{n}{sd} + \frac{1}{sq} = \frac{n}{F},$$

worin F denselben Werth wie vorhin hat, nämlich

$$F = \frac{nr}{n-1}.$$

Mit Hülfe unseres Ausdruckes für den Abstand des Brennpunktes vom Mittelpunkte können wir nun einen wichtigen Satz ableiten über die Lage des Brennpunktes d für ausser der Axe liegende leuchtende Punkte. Nach Gleichung (4 a) haben wir für den Abstand Cd des Brennpunktes vom Mittelpunkte

$$\frac{G}{Cd} + \frac{B}{Cq} = 1,$$

worin G und B genau dieselben Werthe haben wie für leuchtende Punkte, die auf der Axe liegen, nämlich

$$G = \frac{r}{n-1}; \quad B = \frac{nr}{n-1}.$$

Lassen wir nun von q eine Senkrechte qQ auf die Hauptaxe herab, und ebenso von d die Senkrechte dD, so haben wir bekanntlich, da QC und qC sich in C schneiden, wenn wir den Winkel qCQ mit α bezeichnen,

$$qC = \frac{QC}{\cos\alpha};\ Cd = \frac{CD}{\cos\alpha}$$

und setzen wir diese Ausdrücke in unsere Gleichung ein

$$\frac{G}{CD} + \frac{B}{QC} = \frac{1}{\cos\alpha}.$$

Bezeichnen wir nun den Abstand QC mit b, so erhalten wir für den Brennpunkt eines in Q befindlichen leuchtenden Punktes nach (4 a)

$$\frac{G}{g} + \frac{B}{b} = 1.$$

Da wir nun vorausgesetzt haben, dass der Punkt q sehr nahe bei Q liegt, so ist der Winkel α sehr klein und daher $\cos\alpha$ nur sehr wenig von 1 verschieden. Unter der Voraussetzung ist daher

$$\frac{G}{CD} + \frac{B}{b} = \frac{G}{g} + \frac{B}{b}$$

oder

$$CD = g,$$

das heisst, der Fusspunkt der von dem Brennpunkt d auf die Hauptaxe herabgelassenen Senkrechten schneidet die Hauptaxe in dem Punkte, welcher der Brennpunkt ist des Punktes, in welchem das von dem leuchtenden Punkte auf die Hauptaxe herabgelassene Loth die Hauptaxe schneidet.

Daraus folgt dann unmittelbar, dass eine zur Hauptaxe senkrechte leuchtende Linie als Bild ebenfalls eine zur Hauptaxe senkrechte Linie hat, welche dort liegt, wo der Brennpunkt des in der Hauptaxe liegenden Punktes jener Linie sich befindet. Dasselbe gilt dann auch unmittelbar von einer leuchtenden, in Q befindlichen, zur Hauptaxe senkrechten Ebene.

Eine kugelförmige brechende Fläche entwirft daher von einer leuchtenden Ebene ein Bild, welches man durch eine einfache Construction leicht erhalten kann. Man legt durch den Brennpunkt des in der Hauptaxe liegenden Punktes jener Ebene eine zur Hauptaxe senkrechte Ebene, zieht für alle Punkte der leuchtenden Ebene die Nebenaxen und verlängert dieselben, bis sie die durch den ersten Brennpunkt gelegte Ebene treffen. Die letztern Punkte sind die Bildpunkte der erstern.

Daraus folgt dann, dass die durch derartige Flächen entworfenen Bilder den Gegenständen selbst ähnlich sind.

Auch die Grösse der Bilder ist durch diesen Satz gegeben, alle Dimensionen des Bildes und Gegenstandes verhalten sich zu einander wie die Abstände der Ebenen, in welchen sie sich befinden, vom Mittelpunkte C. Denn wir haben

$$Dd : Qq = CD : CQ = g : b$$

und daher, da $g = f - r,\ \ b = a + r$,

$$Dd = \frac{f - r}{a + r} \cdot Qq.$$

Dabei ist indess zu beachten, dass wenn $f > r$ ist, das Bild eines ausserhalb der Axe liegenden leuchtenden Punktes auf der entgegengesetzten Seite

der Axe liegt als der leuchtende Punkt selbst, da die Hauptaxe QC und die Nebenaxe qC sich im Mittelpunkte, also in dem Falle zwischen dem leuchtenden Punkte und seinem Bildpunkte schneiden.

Um das in der Gleichung für Dd auszudrücken, müssen wir demselben das negative Vorzeichen geben, also schreiben

$$-Dd = \frac{f-r}{a+r} \cdot Qq \text{ oder } Dd = -\frac{f-r}{a+r} \cdot Qq.$$

Mit Benutzung der Gleichungen zwischen g, b, G, B, f, a, F, A, welche wir vorhin abgeleitet haben, können wir dieser Gleichung manche andere Form geben. Man erhält leicht die Formen

$$\left.\begin{aligned} Dd &= -\frac{A}{a-A} \cdot Qq = -\frac{f-F}{F} \cdot Qq \\ Dd &= -\frac{r}{(n-1)a-r} \cdot Qq = -\frac{f}{na} \cdot Qq \end{aligned}\right\} \cdots \text{II.}$$

Jede der Gleichungen II gestattet die Grösse des Bildes aus derjenigen des Gegenstandes und seinem Abstande von der brechenden Fläche entweder direkt oder mit Hülfe der bekannten Hauptbrennweiten zu berechnen.

Das Bild kann nun ein reelles oder virtuelles sein, jenachdem der Brennpunkt des auf der Axe liegenden Punktes ein reeller oder virtueller ist. Ist die brechende Fläche convex, und n grösser als 1, so haben wir

$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{r} - \frac{1}{na}.$$

Der Werth von f ist im Allgemeinen positiv, der Brennpunkt des in der Axe liegenden leuchtenden Punktes liegt auf der andern Seite der brechenden Fläche als der leuchtende Punkt, die Strahlen schneiden sich dort wirklich, der Brennpunkt ist ein reeller.

Ist die brechende Fläche concav, so ist

$$\frac{1}{f} = -\frac{n-1}{r} - \frac{1}{na}.$$

In diesem Falle ist der Brennpunkt im Allgemeinen ein virtueller, er liegt, da der Werth von f negativ ist, auf derselben Seite der brechenden Fläche mit dem leuchtenden Punkte, die Strahlen divergiren nach der Brechung so, als kämen sie von einem Punkte vor der Fläche, der jedoch ein anderer ist als der leuchtende Punkt.

Convexe brechende Flächen geben daher im Allgemeinen reelle, concave dagegen virtuelle Bilder, wenn der Brechungsexponent des Mittels, in welches das Bild eintritt, grösser ist als 1. Ist der Brechungsexponent kleiner als 1, so ist nach unseren Formeln das Umgekehrte der Fall, und da dann das Licht vom Einfallslothe fortgebrochen wird, so zeigt eine der Fig. 69 analoge Construction dieses unmittelbar.

Auch wenn $n > 1$ ist, kann letzteres der Fall sein, und zwar da

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{na},$$

tritt es ein, wenn

$$na < F,$$

da dann

$$\frac{1}{na} > \frac{1}{F}$$

und somit f negativ wird. Welchen Werth dann a haben muss, das hängt, wie man sieht, wesentlich von dem Werthe des Brechungsexponenten n ab[1].

§. 32.

Brechung in einem Systeme kugelförmiger Flächen. In den seltensten Fällen hat man den Gang der Lichtstrahlen nur durch eine brechende Fläche zu verfolgen, indem bei allen optischen Apparaten mehrere brechende Flächen vereinigt sind. Wir haben daher zunächst den Gang der Lichtstrahlen durch ein System von brechenden Flächen zu betrachten, wobei wir uns jedoch auf centrirte Systeme von Kugelflächen beschränken wollen, das heisst auf solche, deren Mittelpunkte alle auf einer geraden Linie liegen, welche wir als die Axe des Systemes bezeichnen.

Es ist nun nicht schwierig, mit Hülfe der im vorigen Paragraphen abgeleiteten Sätze den Gang der Strahlen durch ein solches System brechender Flächen zu bestimmen. Wir wissen, dass die von einem in der Axe liegenden Punkte ausgehenden Strahlen nach der Brechung an der ersten Fläche wieder nach einem in der Axe liegenden Punkte convergiren; dieser Punkt ist dann als der leuchtende Punkt zu betrachten, der seine Strahlen auf die zweite Fläche sendet. Nach der Brechung an der zweiten Fläche müssen dann die Strahlen nach einem zweiten Brennpunkte convergiren, welcher ebenfalls auf der Axe liegen muss, und dessen Abstand von der Fläche aus der Entfernung des ersten Brennpunktes von ihr und dem Radius der Fläche sowie dem Brechungsverhältnisse des Mittels, das sie begrenzt, gefunden wird durch eine der vorigen ganz gleiche Formel.

Das Bild einer zur Axe senkrechten Ebene, das eine kugelförmige brechende Fläche entwirft, liegt ebenfalls in einer zur Axe senkrechten Ebene, das Bild, welches die zweite brechende Fläche von diesem Bilde entwirft, muss daher ebenfalls in einer zur Axe senkrechten Ebene liegen, und seine Grösse ist durch eine der vorigen ganz analoge Rechnung zu finden. Gleiches gilt dann natürlich für eine dritte, vierte, $n$te Fläche.

Wir wollen uns zunächst auf den in der Praxis häufigsten Fall zweier brechender Flächen beschränken und dann mit Hülfe der dort erhaltenen Beziehungen zeigen, wie man leicht zu der Brechung in beliebig vielen Flächen übergehen kann.

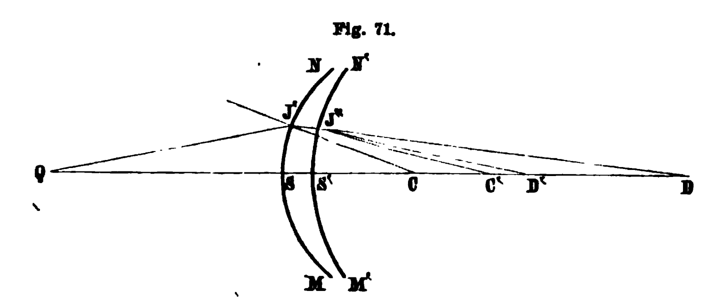
---

1) Diese Ableitung ist wesentlich die von *Helmholtz* gegebene, siehe dessen physiologische Optik I. §. 9.

Es sei n der Brechungsexponent in der ersten, ν der in der zweiten Fläche, r der Radius der ersten, ϱ jener der zweiten Fläche.

Um nun den Brennpunkt eines auf der Axe liegenden Punktes zu bestimmen, sei D (Fig. 71) der Bildpunkt, wenn das von Q ausstrahlende Licht

Fig. 71.



nur an der ersten Fläche MN eine Brechung erfahren und dann in dem zweiten Mittel bliebe. Der Abstand $Sd = f'$ dieses Bildpunktes von dem Scheitel S der ersten brechenden Fläche ist dann gemäss den Entwicklungen des vorigen Paragraphen gegeben durch

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{F'} - \frac{1}{na},$$

wenn F' die zweite Hauptbrennweite der ersten brechenden Fläche bezeichnet, oder wenn wir F' durch seinen Werth ersetzen durch

$$f' = \frac{nar}{(n-1)\,a - r} \quad \cdots \quad (1),$$

worin wie immer a den Abstand QS des leuchtenden Punktes vom Scheitel S bezeichnet.

Die im zweiten Mittel nach dem Punkte D convergirenden Strahlen werden nun in der zweiten brechenden Fläche $N'M'$ neuerdings gebrochen, da diese Fläche zwei verschiedene Medien von einander trennt, und zwar, da die die Fläche treffenden Strahlen homocentrisch sind, das heisst zu einem in D liegenden Wellenmittelpunkt gehören, so, dass sie nach der Brechung wieder nach einem Punkte D' convergiren, dessen Abstand vom Scheitel der zweiten brechenden Fläche S', nämlich $S'D' = f$ durch eine der vorigen ganz ähnliche Gleichung bestimmt wird. Nennen wir den Abstand des Punktes D von S', dem Scheitel der zweiten brechenden Fläche α, so ist

$$f = \frac{\nu \cdot \alpha \cdot \varrho}{(\nu - 1)\,\alpha - \varrho} \quad \cdots \quad (2).$$

In dieser Gleichung haben wir nur α durch die bekannten Grössen unserer Flächencombination auszudrücken.

Nennen wir den Abstand SS' der Scheitel der beiden brechenden Flächen d, so erhalten wir zunächst

$$\alpha = S'D = SD - SS' = f' - d,$$

worin f' durch die Gleichung (1) gegeben ist. Ist nun $f > d$, wie in der Figur, so liegt der leuchtende Punkt D hinter der brechenden Fläche $N'M'$; um das anzudeuten, müssen wir, da wir den Abständen der leuchtenden Punkte, die vor der brechenden Fläche liegen, das positive Vorzeichen gegeben haben, dieser Differenz das negative Vorzeichen geben, also schreiben:

$$\alpha = -(f' - d) = d - f'.$$

Setzen wir nun für f' seinen Werth nach Gleichung (1), so erhalten wir

$$\alpha = d - \frac{nar}{(n-1)a - r} = \frac{\left\{(n-1)a - r\right\} d - nar}{(n-1)a - r}$$

und indem wir jetzt diesen Werth für α in die Gleichung (2) einsetzen

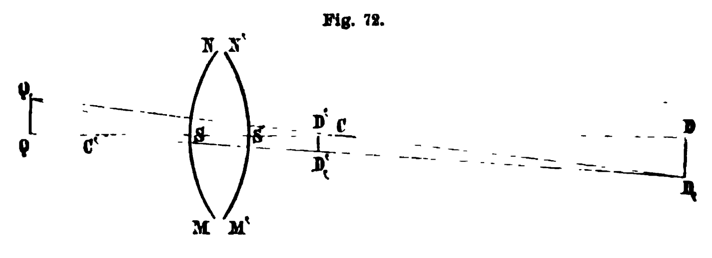
$$f = \frac{\nu \cdot \varrho \dfrac{\left\{(n-1)a - r\right\} d - nar}{(n-1)a - r}}{(\nu - 1)\dfrac{\left\{(n-1)a - r\right\} d - nar}{(n-1)a - r} - \varrho},$$

woraus sich unmittelbar durch passendes Ordnen der einzelnen Glieder ergibt

$$f = \frac{\nu d \varrho \left\{(n-1)a - r\right\} - n\nu a r \varrho}{a\left\{(\nu-1)(n-1)d - (\nu-1)nr - (n-1)\varrho\right\} - (\nu-1)rd + r\varrho} \quad \ldots \text{(I)}.$$

Dieser Ausdruck gestattet den auf der Axe gerechneten Abstand des Bildpunktes von dem Scheitel der zweiten brechenden Fläche zu berechnen, wenn man den auf der Axe gerechneten Abstand des leuchtenden Punktes von dem Scheitel der ersten brechenden Fläche, die Krümmungsradien der beiden brechenden Flächen sowie den Abstand ihrer Scheitel und die Brechungsexponenten der verschiedenen Medien kennt. Liegt also der leuchtende Punkt auf der Axe selbst, so ist die Lage seines Bildpunktes vollständig bestimmt. Liegt aber der leuchtende Punkt ausserhalb der Axe, so gibt uns f den Abstand des Punktes auf der Axe vom Scheitel der zweiten brechenden Fläche, in welchem eine von dem Bildpunkte auf die Axe gezogene Senkrechte die Axe trifft. Liegt deshalb der leuchtende Punkt ausserhalb der Axe, oder ist das leuchtende Object eine Linie oder Ebene, so haben wir noch den senkrechten Abstand des Bildpunktes von der Axe oder die Grösse des Bildes zu berechnen. Wir gelangen dazu leicht mit Hülfe einer zweimaligen Anwendung

Fig. 72.



einer der Gleichungen II des vorigen Paragraphen. Denn ist Q_1 Fig. 72 ein solcher ausserhalb der Axe liegender Punkt, dessen Projection auf die Axe Q

ist, so erhalten wir den ersten Brennpunkt von Q_1, das heisst, den Punkt, nach welchem die von Q_1 ausgehenden Strahlen nach der ersten Brechung an MN convergiren, D_1, wenn wir in D, dem Brennpunkte von Q, ein Perpendikel errichten und dasselbe verlängern, bis es die durch den Mittelpunkt C der ersten brechenden Fläche gelegte Axe $Q_1 C$ in D_1 trifft, und wir haben nach der vorletzten der Gleichungen II des vorigen Paragraphen

$$y_1 = \frac{r}{(n-1)\,a - r} \cdot Y,$$

wenn wir $DD_1 = y_1$ und $QQ_1 = Y$ setzen.

Nun ist D_1 der leuchtende Punkt für die zweite brechende Fläche; für den Abstand seines Bildes D'_1, welches die zweite brechende Fläche von diesem Punkte entwirft, von der Axe erhalten wir deshalb ganz in derselben Weise

$$y = -\frac{\varrho}{(\nu-1)\,\alpha - \varrho} \cdot y_1,$$

worin wie vorhin α den Abstand DS' des Punktes D von dem Scheitel der zweiten brechenden Fläche bedeutet und $D'D'_1$ gleich y gesetzt ist.

Setzen wir in diesen Ausdruck für y_1 seinen Werth ein, so wird zunächst

$$y = \frac{r}{(n-1)\,a - r} \cdot \frac{\varrho}{(\nu-1)\,\alpha - \varrho} \cdot Y$$

und wenn wir jetzt für α seinen Werth wie in Gleichung (I) einsetzen

$$y = \frac{r}{(n-1)\,a - r} \cdot \frac{\varrho}{(\nu-1)\,\dfrac{\left\{(n-1)\,a - r\right\}d - nar}{(n-1)\,a - r} - \varrho} \cdot Y,$$

woraus man unmittelbar ableitet

$$y = \frac{r\,.\,\varrho}{a\left\{(\nu-1)(n-1)\,d - (\nu-1)\,nr - (n-1)\,\varrho\right\} - (\nu-1)\,rd + r\varrho} \cdot Y \;\cdots\; \text{(II)}.$$

Dieser Ausdruck, dessen Nenner mit dem vorhin für f abgeleiteten vollständig übereinstimmt, gestattet somit den Abstand des Bildpunktes eines ausserhalb der Axe liegenden leuchtenden Punktes aus den bekannten Grössen der brechenden Flächen und dem Abstande des leuchtenden Punktes vom Scheitel der ersten der brechenden Flächen zu berechnen. Die Gleichungen (I) und (II) setzen uns somit in den Stand, die Brechung durch ein centrirtes System von zwei Kugelflächen vollständig zu bestimmen.

In der vorliegenden Form sind indess die beiden Gleichungen sehr unbequem, und wenig geeignet die Lage und Grösse der Bilder in ihrer Abhängigkeit von den verschiedenen Grössen übersichtlich darzustellen. Sehr viel bequemer und übersichtlicher werden dieselben indess, wenn wir den Abstand d der brechenden Flächen von einander so klein voraussetzen, dass wir ihn gegenüber den sonst hier in Betracht kommenden Grössen vernachlässigen dürfen. Denn setzen wir in den Gleichungen (I) und (II) $d = 0$, so erhalten wir zunächst

$$f = \frac{-nvar\varrho}{-a\left\{(v-1)\,nr + (n-1)\,\varrho\right\} + r\varrho}$$

oder wenn wir im Zähler und Nenner die Zeichen ändern

$$f = \frac{nvar\varrho}{a\left\{(v-1)\,nr + (n-1)\,\varrho\right\} - r\varrho}$$

und für y

$$y = -\frac{r\varrho}{a\left\{(v-1)\,nr + (n-1)\,\varrho\right\} - r\varrho} \cdot Y = -\frac{f}{nva} \cdot Y.$$

Führen wir anstatt des Werthes f seinen reciproken Werth ein, so erhalten wir

$$\frac{1}{f} = \frac{v-1}{v\varrho} + \frac{n-1}{n\,.\,v\,.\,r} - \frac{1}{nva}.$$

Definiren wir nun die Hauptbrennweiten des Systems wieder gerade so als die der einzelnen Fläche, als erste Hauptbrennweite somit den Abstand des leuchtenden Punktes von dem Scheitel der ersten brechenden Fläche, dessen Strahlen nach der Brechung in beiden Systemen einander und der Axe parallel werden, als zweite Hauptbrennweite den Abstand des Punktes von dem Scheitel der zweiten brechenden Fläche, in welchem sich die vor der Brechung einander und der Axe parallelen Strahlen schneiden, so erhalten wir zunächst die letztere, F, wenn wir in der letzten Gleichung

$$a = \infty \; \frac{1}{nn'a} = 0$$

setzen, somit

$$\frac{1}{F} = \frac{v-1}{v\varrho} + \frac{n-1}{nvr}.$$

Das von a unabhängige Glied der Gleichung für $\frac{1}{f}$ ist somit der reciproke Werth der zweiten Hauptbrennweite, und dadurch wird

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{n\,.\,v\,.\,a},$$

eine Gleichung, welche der für eine brechende Fläche ganz analog ist, um so mehr noch, wenn wir uns daran erinnern, dass das Produkt $n\,.\,v$ der beiden Brechungsexponenten in der ersten und zweiten brechenden Fläche gleich ist dem Brechungsexponenten beim Uebergange des Lichtes aus dem ersten Mittel direkt in das dritte.

Die erste Hauptbrennweite erhalten wir aus der letzten Gleichung, indem wir den Werth von a für $f = \infty$ bestimmen. Darnach wird

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{n\,.\,v\,.\,A}; \quad A = \frac{F}{n\,.\,v}.$$

Zwischen den beiden Hauptbrennweiten besteht also eine ganz ebensolche Beziehung wie bei einer brechenden Fläche; damit können wir der Gleichung für f ganz dieselben Formen geben, die wir für eine Fläche erhielten.

Insbesondere erhalten wir sofort durch Multiplikation unserer Gleichung für f mit F

$$\frac{F}{f} + \frac{A}{a} = 1$$

und

$$f = \frac{a \cdot F}{a - A}.$$

§. 33.

Vereinfachung der Gleichungen durch Einführung der Hauptpunkte. Die am Schlusse des vorigen §. den Gleichungen gegebene einfachere Gestalt haben wir nur auf Kosten der Genauigkeit erhalten; ist der Fehler auch in den meisten Fällen so klein, dass man ihn in der That ausser Acht lassen kann, so gibt es doch Fälle, in welchen die Abstände der brechenden Flächen keineswegs gegenüber den sonstigen in Betracht kommenden Dimensionen verschwindend klein sind. Man kann indess auch bei Berücksichtigung der Abstände der brechenden Flächen zu denselben einfachen Gleichungen kommen, wenn man die Abstände der leuchtenden Punkte und Brennpunkte nicht von den Scheiteln der brechenden Flächen, sondern von einem Paar anderer Punkte aus rechnet, welche Gauss[1]) unter dem Namen Hauptpunkte in die Dioptrik eingeführt hat. Die Lage dieser Punkte würden wir direkt ableiten können, wenn wir die eben aufgestellte Bedingung mathematisch formulirten; wir gelangen indess bequemer dahin, wenn wir von einer von Gauss für die Hauptpunkte bewiesenen Eigenschaft ausgehen und dann zeigen, dass die Gleichungen die verlangte einfachere Gestalt bekommen, wenn wir alle Abstände von diesen Punkten nehmen.

Die Lage der Hauptpunkte ist durch folgende Definitionen bestimmt.

Der zweite Hauptpunkt ist das Bild des ersten, das heisst befindet sich in dem ersten ein leuchtender Punkt, so liegt sein Bild in dem zweiten.

Ein leuchtender Punkt, welcher in einer durch den ersten Hauptpunkt senkrecht zur Axe gelegten Ebene, der ersten Hauptebene, liegt, hat sein Bild in einer durch den zweiten Hauptpunkt ebenso gelegten Ebene, der zweiten Hauptebene, und zwar liegt dasselbe an derselben Seite der Axe und ebenso weit von ihr entfernt als der leuchtende Punkt in der ersten Hauptebene.

Die zweite Eigenschaft der Hauptpunkte lässt uns sofort mit Hülfe der Gleichung II des vorigen §. den Abstand h_1 des ersten Hauptpunktes vom Scheitel der ersten brechenden Fläche bestimmen. Denn befindet sich in der ersten Hauptebene ein leuchtender Punkt im Abstande Y von der Axe, so

---

1) *Gauss*, Dioptrische Untersuchungen. Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften. Theil I. 1838—1841.

liegt sein Bild in der zweiten Hauptebene in einem solchen Abstande y an derselben Seite der Axe, dass

$$y = Y,$$

somit nach Gleichung II, dass

$$\frac{r\varrho}{h_1\left\{(\nu-1)(n-1)d-(\nu-1)nr-(n-1)\varrho\right\}-(\nu-1)rd+r\varrho}=1\,.$$

Der sich aus dieser Gleichung ergebende Werth h_1 ist somit der Abstand des ersten Hauptpunktes von dem Scheitel der ersten brechenden Fläche; er wird

$$h_1=\frac{(\nu-1)\,rd}{(\nu-1)(n-1)d-(\nu-1)nr-(n-1)\varrho}\,.$$

Den zweiten Hauptpunkt erhalten wir durch den ersten Theil der Definition, dass derselbe das Bild des ersten Hauptpunktes ist. Setzen wir daher in die Gleichung (I) für a diesen Werth von h_1, so erhalten wir in dem dann sich ergebenden Werthe von f, den wir mit h_2 bezeichnen wollen, den Abstand des Bildes jenes Punktes vom Scheitel der zweiten Fläche, welcher von der ersten Fläche um h_1 entfernt ist, also des Bildes des ersten Hauptpunktes.

Die Gleichung (I) können wir schreiben

$$h_2=\frac{h_1\left\{(n-1)\nu d\varrho-n\nu r\varrho\right\}-\nu d\varrho r}{h_1\left\{(\nu-1)(n-1)d-(\nu-1)nr-(n-1)\varrho\right\}-(\nu-1)rd+r\varrho}\,,$$

und setzen wir hier ein für h_1

$$h_1=\frac{(\nu-1)\,rd}{(\nu-1)(n-1)d-(\nu-1)nr-(n-1)\varrho}\,,$$

so erhalten wir nach einigen leicht auszuführenden Reductionen

$$h_2=\frac{(n-1)\,\nu\varrho d}{(\nu-1)(n-1)d-(\nu-1)nr-(n-1)\varrho}\,.$$

Wie man sieht hängt die Lage der beiden Hauptpunkte ab von den Brechungsexponenten der Medien und von den Krümmungsradien und dem Abstande der beiden brechenden Flächen.

Um die Lage der Hauptpunkte zu übersehen, wollen wir die allgemeinen Gleichungen auf einzelne specielle Fälle anwenden. Wir wollen zunächst eine Glaslinse in der Luft betrachten, welche auf beiden Seiten ihre Convexität nach aussen wendet, eine sogenannte biconvexe Glaslinse. Der Brechungsexponent des Glases sei 1,5, die Radièn der beiden Flächen seien gleich gross und der Abstand ihrer Scheitel sei gleich $0{,}1\,r$. Wir haben dann nur diese Werthe in unsere Gleichungen für h_1 und h_2 einzusetzen. Diese Werthe sind $n = 1{,}5$; der Brechungsexponent ν ist in diesem Falle, da wir auf beiden Seiten Luft voraussetzen, gleich $\frac{1}{n}=\frac{1}{1{,}5}=0{,}66$. Da wir voraussetzen, dass beide brechende Flächen ihre Convexität nach aussen richten, so wendet jedenfalls die zweite brechende Fläche dem ankommenden Lichte ihre concave Seite zu, somit ist

$$\varrho = -r.$$

Ersetzen wir nun im Nenner unserer Gleichungen noch d durch seinen Werth $0{,}1\, r$, so wird zunächst die Gleichung für den ersten Hauptpunkt

$$h_1 = -\frac{\left(\frac{1}{n} - 1\right) r \,.\, d}{\left(\frac{1}{n} - 1\right) (n - 1)\, 0{,}1\, r - \left(\frac{1}{n} - 1\right) nr + (n - 1)\, r}$$

$$h_1 = \frac{d}{(n-1)\; 0{,}1 - 2n} = - \frac{d}{2n - (n-1)\; 0{,}1},$$

und wenn wir jetzt $n = 1{,}5$ setzen

$$h_1 = - \frac{d}{3 - 0{,}05} = - \frac{d}{2{,}95}.$$

Da das Vorzeichen dieses Werthes von h_1 negativ ist, so liegt der erste Hauptpunkt hinter dem Scheitel der ersten brechenden Fläche und zwar fast genau um $^1/_3$ des Abstandes der beiden Flächen.

Für den zweiten Hauptpunkt bekommen wir zunächst

$$h_2 = -\frac{(n-1)\,\frac{1}{n}\,.\, rd}{\left(\frac{1}{n} - 1\right) (n-1)\, 0{,}1\, r - \left(\frac{1}{n} - 1\right) nr + (n-1)\, r}$$

$$h_2 = - \frac{d}{(1-n)\,.\, 0{,}1 + 2n} = - \frac{d}{2n - (n-1)\,.\, 0{,}1}$$

$$h_2 = - \frac{d}{2{,}95}.$$

Das negative Vorzeichen bedeutet hier, dass der zweite Hauptpunkt vor der zweiten brechenden Fläche liegt, und zwar wieder um fast genau $^1/_3$ des Abstandes der beiden brechenden Flächen.

In diesem Falle liegen also beide Hauptpunkte zwischen den beiden brechenden Flächen und zwar von einander und den brechenden Flächen um $^1/_3$ des Abstandes der Scheitel entfernt.

Befindet sich hinter der zweiten brechenden Fläche ein stärker brechendes Mittel, so rücken die Hauptpunkte näher an die erste brechende Fläche und näher an einander. Befindet sich z. B. hinter der zweiten brechenden Fläche Wasser, so wird $\nu = {^8/_9}$, da der Brechungsexponent des Wassers, wenn das Licht aus Luft in dasselbe übertritt, gleich $^4/_3$ ist. Denn wir erhalten dann nach §. 15 den Brechungsexponenten des Lichtes beim Uebergang aus Glas in Wasser

$$\nu = {^4/_3} : {^3/_2} = {^8/_9}.$$

Setzen wir diesen Werth für ν in die Gleichungen der Hauptpunkte ein, während n, r, ϱ, d die eben angenommenen Werthe behalten, so wird

$$h_1 = - \frac{2d}{11{,}9}; \qquad h_2 = - \frac{8d}{11{,}9}.$$

Der erste Hauptpunkt liegt also fast genau $^1/_6 d$ hinter dem Scheitel der ersten brechenden Fläche und der zweite fast genau $^1/_6 d$ hinter dem ersten.

Wird die Form der brechenden Fläche eine andere, so wird es auch die Lage der Hauptpunkte; nehmen wir an, die zweite brechende Fläche wende ebenfalls ihre convexe Seite dem ankommenden Lichte zu, ihr Radius sei aber doppelt so gross als der der ersten Fläche, also

$$\varrho = 2r,$$

so erhalten wir, wenn alles Uebrige ungeändert bleibt, auf beiden Seiten des Systems Luft ist und $n = 1,5$, $d = 0,1\, r$ ist, für die Lage der Hauptpunkte folgende Werthe

$$h_1 = \frac{d}{1,55}; \qquad h_2 = -\frac{2d}{1,55}.$$

Der Abstand des ersten Hauptpunktes von der ersten Fläche hat das positive Vorzeichen, der Punkt liegt also vor der ersten Fläche und zwar um $^2/_3$ der Linsendicke. Der zweite Hauptpunkt liegt, da der Werth von h_2 negativ ist, vor der zweiten Fläche, und da $\frac{2d}{1,55} > d$ selbst vor der ersten Fläche und zwar fast genau um $^1/_3 d$. Der Abstand der Hauptpunkte ist also wieder fast genau $^1/_3 d$. Würde bei diesem System brechender Flächen hinter der zweiten Fläche wieder ein stärker brechendes Mittel sich befinden, so würden die Hauptpunkte auch wieder einander und der ersten Fläche näher rücken; wäre das Mittel Wasser, so würde

$$h_1 = \frac{d}{7,55}; \qquad h_2 = -\frac{8d}{7,55}.$$

Beide Punkte liegen vor der ersten Fläche; ihr Abstand ist etwa $^1/_{15} d$ und fast ebenso gross ist der Abstand des zweiten Hauptpunktes von der ersten Fläche.

Führen wir nun zur Bestimmung der Bildpunkte anstatt der Entfernung der leuchtenden Objecte vom Scheitel der ersten brechenden Fläche jene vom ersten Hauptpunkte, anstatt des auf der Axe gerechneten Abstandes des Bildpunktes vom Scheitel der zweiten brechenden Fläche jenen vom zweiten Hauptpunkt in unsere Gleichungen ein, so ergibt sich die Vereinfachung unserer Gleichungen unmittelbar.

Da ein positiver Werth von h_1 bedeutet, dass der erste Hauptpunkt vor dem Scheitel der ersten Fläche liegt, so ergibt sich, dass der Abstand der leuchtenden Punkte vom ersten Hauptpunkte gleich ist der Differenz zwischen dem Abstande des leuchtenden Punktes und des ersten Hauptpunktes vom Scheitel; oder nennen wir den Abstand des leuchtenden Punktes vom Scheitel jetzt a', den Abstand desselben von dem ersten Hauptpunkte dagegen a, so ist

$$a = a' - h_1; \quad a' = a + h_1.$$

Ein positiver Werth von h_2 bedeutet, dass der zweite Hauptpunkt hinter der zweiten Fläche liegt; der Abstand des Bildpunktes vom zweiten Hauptpunkte ist also gleich der Differenz der Abstände des Bildpunktes und Haupt-

punktes vom zweiten Scheitel. Oder wenn f' den Abstand des Bildpunktes vom Scheitel, f den vom zweiten Hauptpunkt bedeutet, so ist

$$f = f' - h_2.$$

Um nun in unsere Gleichungen die Abstände von den Hauptpunkten einzuführen, haben wir a' durch $a + h_1$ zu ersetzen und statt f' den Werth von f zu berechnen. Wir erhalten dann

$$f = f' - h_2 = \frac{\left\{a + h_1\right\}\left\{(n-1)\nu d\varrho - n\nu r\varrho\right\} - \nu d r\varrho}{\left\{a + h_1\right\}\left\{(\nu-1)(n-1)d - (\nu-1)nr - (n-1)\varrho\right\} - (\nu-1)rd + r\varrho} - h_2.$$

Ersetzen wir nun hierin h_1 und h_2 durch ihre Werthe

$$h_1 = \frac{(\nu-1)\,rd}{(\nu-1)\,(n-1)\,d - (\nu-1)\,nr - (n-1)\,\varrho},$$

$$h_2 = \frac{(n-1)\,\nu\varrho d}{(\nu-1)\,(n-1)\,d - (\nu-1)\,nr - (n-1)\,\varrho},$$

so erhält man nach einigen leicht zu machenden Reductionen

$$f = \frac{n\nu a r\varrho}{a\left\{(\nu-1)\,nr + (n-1)\,\varrho - (\nu-1)\,(n-1)\,d\right\} - r\varrho} \quad \ldots \text{Ia},$$

ein Ausdruck, welcher sich bis auf das mit d behaftete Glied im Nenner nicht von dem durch Vernachlässigung des Abstandes d erhaltenen vereinfachten Ausdruck unterscheidet.

Ganz ebenso vereinfacht sich die Gleichung II für den Abstand des Bildes eines ausserhalb der Axe liegenden leuchtenden Punktes von der Axe oder die Grösse des Bildes eines ausgedehnten Objectes, wenn wir in derselben den Abstand des leuchtenden Objectes vom ersten Hauptpunkt einführen. Unsere Gleichung II war

$$y = \frac{r\varrho}{a'\left\{(\nu-1)\,(n-1)\,d - (\nu-1)\,nr - (n-1)\,\varrho\right\} - (\nu-1)\,rd + r\varrho} \cdot Y$$

und ersetzen wir a' durch $a + h_1$, indem wir für h_1 seinen Werth schreiben, so ergibt sich unmittelbar

$$y = -\frac{r\varrho}{a\left\{(\nu-1)\,nr + (n-1)\,\varrho - (\nu-1)\,(n-1)\,d\right\} - r\varrho} \cdot Y \quad \ldots \text{IIa.}$$

oder wieder, wie wir mit Vernachlässigung des Abstandes d erhielten

$$y = -\frac{f}{n\nu \,.\, a} \cdot Y.$$

Durch Einführung der Hauptbrennweiten können wir auch hier die Gleichungen noch weiter vereinfachen. Aus Gleichung Ia erhalten wir zunächst

$$\frac{1}{f} = \frac{\nu - 1}{\nu\varrho} + \frac{n-1}{n\nu r} - \frac{(\nu-1)\,(n-1)\,d}{n\nu r\varrho} - \frac{1}{n\nu a}.$$

Definiren wir jetzt die zweite Hauptbrennweite als den Abstand des Brennpunktes der Strahlen, die einander und der Axe parallel sind, von dem zwei-

ten Hauptpunkte, so haben wir in der letzten Gleichung zur Bestimmung derselben nur einzusetzen

$$a = \infty \quad \frac{1}{n\nu a} = 0$$

und bekommen dann

$$\frac{1}{F} = \frac{\nu - 1}{\nu \varrho} + \frac{n - 1}{n \nu r} - \frac{(\nu - 1)(n - 1) d}{n \nu r \varrho},$$

oder das von a unabhängige Glied unserer Gleichung für $\frac{1}{f}$ ist der reciproke Werth der zweiten Hauptbrennweite. Mit Hülfe dieser wird

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{n \nu a}.$$

Definiren wir als erste Hauptbrennweite den Abstand des leuchtenden Punktes vom ersten Hauptpunkte, dessen Strahlen nach sämmtlichen Brechungen einander und der Axe parallel werden, so haben wir, um dieselbe zu erhalten, in der letzten Gleichung nur

$$f = \infty; \qquad \frac{1}{f} = 0$$

zu setzen und bekommen dann

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{n \nu A}; \qquad A = \frac{F}{n \nu}.$$

Wir erhalten also auch hier wieder dieselbe Beziehung zwischen erster und zweiter Hauptbrennweite, wie bei einer brechenden Fläche, und damit auch hier wieder die Gleichungen (4) und (5) des §. 31

$$\frac{F}{f} + \frac{A}{a} = 1$$

$$f = \frac{aF}{a - A}.$$

Da somit f ausser durch den Abstand des leuchtenden Punktes vollständig durch die beiden Hauptbrennweiten bestimmt ist, so folgt, dass ein optisches System durch die Lage seiner Hauptpunkte und seine Hauptbrennweiten vollkommen bestimmt ist, oder dass zwei Systeme, deren Hauptpunkte dieselbe Lage und deren Hauptbrennweiten denselben Werth haben, in optischer Beziehung identisch sind.

§. 34.

Einführung der Knotenpunkte. Wir gelangten in §. 31 zur Lage der Bildpunkte von ausser der Axe liegenden leuchtenden Punkten durch Benutzung der Nebenaxen, indem wir bemerkten, dass die Bilder der leuchtenden Punkte jedenfalls auf diesen liegen müssen. Für ein System von zwei brechenden Flächen gelangten wir zu diesen Bildern, indem wir die Nebenaxen beider brechenden Flächen anwandten, da wir für das System als solches

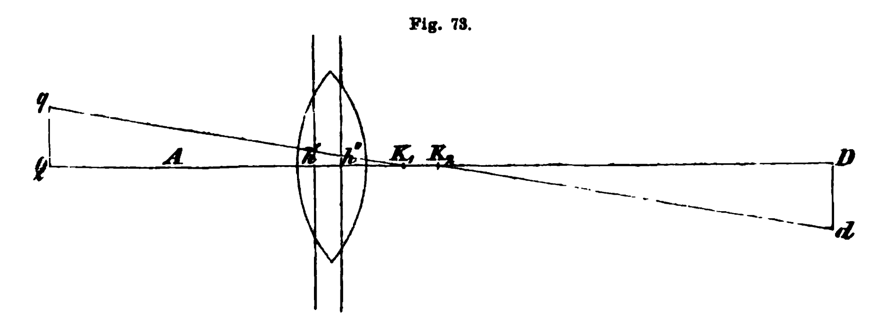
eine Nebenaxe nicht kannten. Es ist jedoch in jedem durch ein solches System gebrochenen Strahlenbündel ein Strahl vorhanden, welcher einem Strahle des einfallenden Strahlenbündels parallel ist. Könnten wir deshalb die Lage dieser Strahlen bestimmen, so würden diese die Stelle der Nebenaxen bei einer brechenden Fläche vertreten und könnten so zur Bestimmung der Lage der Bilder dienen, ohne dass wir den Werth von y berechnen müssten.

Die Lage dieser Strahlen lässt sich nun bestimmen, indem wir die Punkte aufsuchen, in welchen dieselben die Axe schneiden; und um diese zu finden, haben wir nur die ihnen zukommende Eigenschaft mathematisch auszudrücken. Die erste Eigenschaft dieses Punktpaares ist wie gesagt die, dass ein im ersten Mittel nach dem ersten dieser Punkte hingehender Strahl nach allen Brechungen im letzten Mittel durch den zweiten dieser Punkte gehen soll. Das ist nur dann möglich, wenn der zweite Punkt das von dem optischen System entworfene Bild des ersten Punktes ist. Nennen wir deshalb den Abstand des ersten Punktes vom ersten Hauptpunkte k_1, den Abstand des zweiten Punktes vom zweiten Hauptpunkte k_2, die erste Hauptbrennweite A, die zweite F, so erhalten wir als erste Gleichung für k_1 und k_2

$$k_2 = \frac{k_1 F}{k_1 - A} \cdots (1)$$

Die zweite Gleichung zur Bestimmung von k_1 und k_2 liefert uns die Bedingung, dass der Strahl, welcher im letzten Mittel durch den zweiten Knotenpunkt geht, dem im ersten Mittel durch den ersten Knotenpunkt gehenden parallel sein soll. Ist demnach Fig. 73 q ein leuchtender Punkt und d sein Bildpunkt, so sind K_1 und K_2 die verlangten Punkte, wenn $q\,K_1$ parallel $K_2\,d$ ist. Daraus folgt dann aber, dass die beiden Dreiecke qQK_1 und dDK_2 einander ähn-

Fig. 73.



lich sind und daraus, dass sich verhält

$$Qq : QK_1 = dD : DK_2.$$

Bezeichnen wir nun wie früher Qq mit Y, dD mit $-y$, so können wir diese Proportion auch schreiben

$$-\frac{y}{Y} = \frac{K_2 D}{K_1 Q}.$$

Ist nun h' der erste, h'' der zweite Hauptpunkt, so ist $h'K_1 = k_1$, $h''K_2 = k_2$, ferner ist $Qh_1 = a$, $h''D = f$, demnach

$$QK_1 = a - k_1 \qquad DK_2 = f - k_2,$$

worin zum Verständniss des negativen Vorzeichens von k_1 zu beachten ist, dass wenn wie in der Figur K_1 hinter dem ersten Hauptpunkte liegt, der Werth von k_1 negativ, also $-k_1$ positiv ist. Mit diesen Werthen wird dann

$$-\frac{y}{Y} = \frac{f - k_2}{a - k_1}.$$

Andererseits haben wir aber nach Gleichung IIa (p. 191)

$$-\frac{y}{Y} = \frac{f}{nn'a} = \frac{aF}{(a - A)\,nn'a} = \frac{A}{a - A},$$

somit als zweite Gleichung für k_1 und k_2

$$\frac{f - k_2}{a - k_1} = \frac{A}{a - A} \quad \dots \quad (2).$$

Drücken wir nun in dieser Gleichung k_2 aus Gleichung (1) durch k_1 aus, so wird

$$\frac{f - \frac{k_1 F}{k_1 - A}}{a - k_1} = \frac{A}{a - A}$$

und indem wir ebenfalls f durch a, A, F ausdrücken

$$\frac{\frac{aF}{a - A} - \frac{k_1 F}{k_1 - A}}{a - k_1} = \frac{A}{a - A},$$

woraus man unmittelbar ableitet

$$k_1 = A - F.$$

Die Lage des zweiten der gesuchten Punkte liefert uns nun direkt die Gleichung (1)

$$k_2 = \frac{k_1 \,.\, F}{k_1 - A} = \frac{(A - F)\,F}{A - F - A} = -(A - F) = F - A.$$

Es folgt somit, dass es in jedem aus zwei brechenden Flächen bestehenden optischen System ein Punktpaar gibt, dessen Verbindungslinien des ersten mit dem leuchtenden Punkte, des zweiten mit dem Bildpunkte einander parallel sind, und dass die Lage dieser Punkte nur abhängig ist von den Constanten des Systems, nicht aber von der Lage des leuchtenden Punktes und seines Bildpunktes. Die Eigenschaft dieses Punktpaares ist von Listing aufgefunden, welcher denselben den Namen Knotenpunkte [1]) gegeben hat. Die Knotenpunkte mit den vorhin abgeleiteten Hauptpunkten und Hauptbrennpunkten bilden die sogenannten Cardinalpunkte eines optischen Systems. Durch diese drei Punktpaare ist das optische System vollständig bestimmt, so dass optische

---

1) *Listing*, Beitrag zur physiologischen Optik. Göttingen 1845. Man sehe auch Artikel Dioptrik in Wagner's Handwörterbuch der Physiologie. Bd. IV. p. 451.

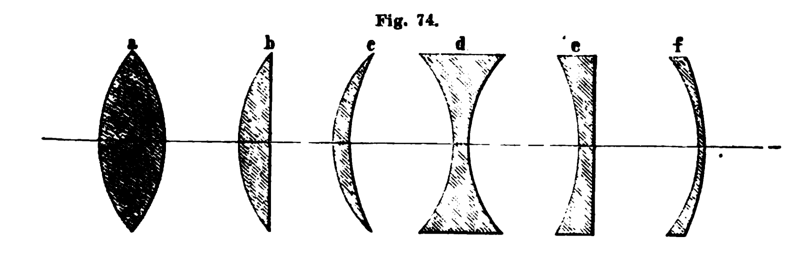
Systeme, deren Cardinalpunkte dieselben sind, mit einander identisch gleich sind. Ausreichend bestimmt ist das System bereits durch die Hauptpunkte und die Hauptbrennpunkte, da die Lage der Knotenpunkte durch diese vollkommen bestimmt ist. Der erste Knotenpunkt liegt nämlich um die Differenz der ersten und zweiten Hauptbrennweite vor dem ersten Hauptpunkte, so dass also, wenn $A > F$, der Knotenpunkt vor dem ersten Hauptpunkte, wenn $A < F$, hinter demselben liegt und wenn $A = F$, mit ihm zusammenfällt. Aehnliches gilt für den zweiten Knotenpunkt in Bezug zum zweiten Hauptpunkt, ist $F > A$, so liegt er hinter, ist $F < A$, vor dem zweiten Hauptpunkt, ist $F = A$, so fallen zweiter Knotenpunkt und Hauptpunkt zusammen. Daraus folgt schliesslich, da der Abstand der beiden Hauptbrennpunkte von einander gleich ist der Summe der beiden Hauptbrennweiten und des Abstandes der Hauptpunkte von einander, dass der Abstand der beiden Knotenpunkte von einander gleich ist dem der Hauptpunkte von einander.

§. 35.

Linsen und Linsenbilder. Die in den letzten §§. erhaltenen allgemeinen Resultate setzen uns nun sofort in den Stand, den Gang der Lichtstrahlen durch die in der Praxis gebrauchten Linsen genauer zu untersuchen. Als Linsen bezeichnet man alle von zwei krummen Flächen begrenzten brechenden Mittel; die von kugelförmigen Flächen begrenzten Linsen nennt man sphärische Linsen, und solche sind es fast ausschliesslich, welche in der Praxis gebraucht werden.

Man unterscheidet sechs Arten von sphärischen Linsen, je nachdem die Flächen derselben convex oder concav sind. Ist die Linse durch zwei nach aussen convexe Flächen begrenzt (Fig. 74 a), so nennt man sie biconvexe Linsen. Ist eine der beiden Begrenzungsflächen convex, die andere eben (wie Fig. 74 b), so ist die Linse eine planconvexe. Ist eine der Flächen convex,

Fig. 74.



die andere concav (wie Fig. 74 c oder Fig. 74 f), so heissen die Linsen concavconvexe, wenn der Radius der concaven Fläche grösser ist als derjenige der convexen, oder convex-concave, wenn das Umgekehrte der Fall ist (Fig. 74 f). Im ersten Falle nennt man sie auch wohl Menisken. Die Fig. 74 d abgebildete Linse, welche durch zwei nach aussen concave Flächen begrenzt ist, nennt

man biconcav und die von einer concaven Fläche und einer Ebene begrenzte Linse (Fig. 74 e) ist eine planconcave Linse.

Man kann die Linsen auch nach zwei Gattungen ordnen, die drei ersten (Fig. 74 a, b, c) sind in der Mitte dicker als am Rande, die letztern (d, e, f) umgekehrt am Rande dicker als in der Mitte. Da die ersten, wie wir sofort ableiten werden, gewöhnlich ein reelles Bild geben, die durch sie hindurchtretenden Strahlen also convergent gemacht werden, so nennt man sie Sammellinsen, die drei letztern, welche ein virtuelles Bild liefern, die Strahlen also divergent machen, dagegen Zerstreuungslinsen.

Ist nun n der Brechungsexponent des Lichtes für irgend eine Farbe beim Eintritt in die Linse, ν derselbe beim Austritt, r der Radius der ersten, ϱ jener der zweiten Fläche, wo wir als erste jene bezeichnen, durch welche das Licht in die Linse eintritt, so folgt zunächst aus den Entwicklungen der vorigen §§., dass das von einem Punkte ausgehende Licht nach dem Durchtritt durch die Linsen stets wieder in einem Punkte, dem Bildpunkte, sich vereinigt, dessen auf der Axe gerechneter Abstand vom zweiten Hauptpunkte unmittelbar durch die Gleichung Ia

$$f = \frac{n\nu a r \varrho}{a\left\{(\nu-1)\,nr + (n-1)\,\varrho - (\nu-1)(n-1)\,d\right\} - r\varrho},$$

oder mit Benutzung der Hauptbrennweiten durch

$$f = \frac{a \,.\, F}{a - A}$$

gegeben ist, während der Abstand des Bildpunktes von der Axe

$$y = -\frac{h}{n\nu a} \cdot Y = -\frac{A}{a - A} \cdot Y$$

ist. Die Lage der Hauptpunkte ist gegeben durch die Gleichungen des §. 33

$$h_1 = \frac{(\nu-1)\,rd}{(\nu-1)(n-1)\,d - (\nu-1)\,nr - (n-1)\,\varrho}$$

$$h_2 = \frac{(n-1)\,\nu\varrho d}{(\nu-1)(n-1)\,d - (\nu-1)\,nr - (n-1)\,\varrho}$$

und die beiden Hauptbrennweiten durch

$$\frac{1}{F} = \frac{\nu-1}{\nu\varrho} + \frac{n-1}{n\nu r} - \frac{(\nu-1)(n-1)\,d}{n\nu r\varrho}$$

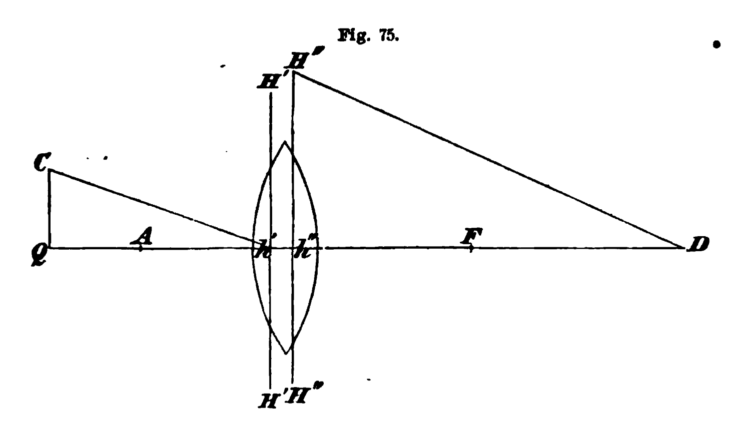
$$A = \frac{F}{n\nu}.$$

Die Lage der Bildpunkte ist wie man sieht durch die der Hauptpunkte und Hauptbrennpunkte vollständig bestimmt; wir können mit diesen die Lage der Bildpunkte sowohl berechnen als durch Construction bestimmen. Eine für alle Linsen sehr einfache Construction des auf der Axe liegenden Abstandes des Bildpunktes liefert uns die letzte Gleichung für f, wenn wir ihr die Form geben

$$a : a - A = f : F;$$

dieselbe zeigt, dass wir mit Hülfe zweier ähnlicher Dreiecke den Werth von f erhalten können. Sind nämlich Fig. 75 $H'H'$ und $H''H''$ die beiden Hauptebenen, in denen h' und h'' die beiden Hauptpunkte sind, ist ferner A der

Fig. 75.



erste, F der zweite Hauptbrennpunkt und Q ein auf der Axe liegender leuchtender Punkt, so hat man zur Bestimmung des Bildpunktes D nur $QC = QA$ senkrecht zur Axe zu ziehen, C mit h_1 zu verbinden, dann in der zweiten Hauptebene $h''H''$ gleich der zweiten Hauptbrennweite zu machen und $H''D \parallel Ch'$ zu ziehen. Der Punkt D, wo diese Linie die Axe trifft, ist der gesuchte Brennpunkt.

Liegt der leuchtende Punkt ausserhalb der Axe, etwa in C, so erhalten wir den Bildpunkt, wenn wir noch die Knotenpunkte zu Hülfe nehmen. Wir tragen von A aus die zweite Hauptbrennweite und von F aus die erste Hauptbrennweite gegen die Linse hin ab, und erhalten so den ersten und zweiten Knotenpunkt. Wir verbinden C mit dem ersten Knotenpunkt, legen durch den zweiten eine mit dieser Verbindungslinie parallele, und verlängern dieselbe, bis sie eine in D zur Axe gezogene Senkrechte schneidet, der Schnittpunkt ist der gesuchte Bildpunkt.

Die Werthe von h_1, h_2, F und A unterscheiden sich nun für die verschiedenen Linsen nur durch die Werthe von n, ν, r und ϱ. Nehmen wir an, die brechenden Mittel seien immer dieselben, so unterscheiden sie sich nur durch die verschiedenen Werthe und Vorzeichen von r und ϱ. Da wir nun für Kugelflächen, welche dem ankommenden Lichte ihre concave Fläche zuwenden, nach §. 31 das negative Vorzeichen wählen müssen, so haben wir für unsere sechs Arten von Linsen zu beachten, dass für

1) die erste Art (Fig. 74 a) die erste Fläche convex, die zweite Fläche concav ist, indem wir von jetzt an die Flächen als convex bezeichnen, welche dem ankommenden Lichte ihre convexe, als concav, welche demselben ihre concave Fläche darbieten. Für die Linsen der ersten Art ist daher

r positiv, ϱ negativ.

2) Die Linsen der zweiten Art haben eine convexe Fläche und eine Ebene. Die Ebene kann als eine Kugel von unendlich grossem Radius angesehen werden. Ist daher die Kugelfläche die erste, so ist

$$r \text{ positiv}, \ \varrho = \infty,$$

ist dagegen die Ebene die erste Fläche, so ist

$$r = \infty, \ \varrho \text{ negativ}.$$

In letzterm Falle hat die Linse nur die entgegengesetzte Lage.

3) Bei den Linsen der dritten und sechsten Art sind entweder beide Flächen convex oder beide concav, also entweder

$$r \text{ positiv}, \ \varrho \text{ positiv},$$

oder

$$r \text{ negativ}, \ \varrho \text{ negativ},$$

je nach der Lage der Flächen kann für beide beides der Fall sein. Für den Meniscus (Fig. 74 c) ist, wenn

$$r \text{ und } \varrho \text{ positiv}, \ r < \varrho,$$
$$r \text{ und } \varrho \text{ negativ}, \ r > \varrho,$$

für die convex-concave Linse gilt natürlich das Gegentheil, also

$$r \text{ und } \varrho \text{ positiv}, \ r > \varrho,$$
$$r \text{ und } \varrho \text{ negativ}, \ r < \varrho.$$

4) Bei der biconcaven Linse ist stets die erste Fläche concav, die zweite convex, also

$$r \text{ negativ}, \ \varrho \text{ positiv}.$$

5) Die planconcave Linse hat entweder eine concave Fläche als Begrenzung und eine Ebene als zweite Fläche, oder bei umgekehrter Lage als erste Begrenzung eine Ebene und als zweite eine convexe Fläche, also entweder

$$r \text{ negativ}, \ \varrho = \infty,$$

oder

$$r = \infty, \ \varrho \text{ positiv}.$$

Untersuchen wir zunächst die Lage der Hauptpunkte für die verschiedenen Linsenarten, so finden wir für biconvexe Linsen, dass die Hauptpunkte immer im Innern der Linse liegen, sei es, dass die Linse aus einem Mittel besteht, welches optisch dichter oder optisch dünner ist als das erste und dritte. Denn setzen wir den Radius der zweiten Fläche $\varrho = -r'$, so wird

$$h_1 = -\frac{(\nu - 1)\, rd}{(\nu - 1)(n - 1)\, d - (\nu - 1)\, nr + (n - 1)\, r'}$$

$$h_2 = -\frac{(n - 1)\, rr'd}{(\nu - 1)(n - 1)\, d - (\nu - 1)\, nr + (n - 1)\, r'},$$

beide Werthe sind aber stets negativ, mag $n > 1$, $\nu < 1$ oder $n < 1$, $\nu > 1$ sein.

Für die planconvexe Linse ist, wenn die convexe Fläche die erste ist, r positiv, $\varrho = \infty$, damit wird $h_1 = 0$, $h_2 = -\nu d$, ist die ebene Fläche die

erste, so ist $r = \infty$, $\varrho = - r'$; damit wird $h_1 = - \frac{d}{n}$, $h_2 = 0$. Der eine Hauptpunkt fällt also immer in den Scheitel der convexen Fläche, der andere in das Innere der Linse und zwar um $\frac{d}{n}$ resp. $\nu \,.\, d$ von der ebenen Fläche entfernt, wenn die Linse optisch dichter ist als das Mittel, an welches die ebene Fläche grenzt, dagegen ausserhalb der Linse, wenn die Linse optisch dünner ist als jenes Mittel.

Für die concav-convexe Linse ist, wenn die convexe Fläche die erste ist, r positiv und ebenso $\varrho = + r'$ und $r' > r$; damit wird h_1 positiv, h_2 negativ und grösser als d, es fallen also beide Hauptpunkte vor die Linse, einerlei ob $n > 1$, $\nu < 1$ oder $n < 1$, $\nu > 1$. Nur wenn n und ν beide kleiner oder beide grösser als 1 wären, wir uns also z. B. eine Linse aus Wasser denken, vor welcher Luft, hinter welcher Glas wäre, würden die Hauptpunkte in die Linse fallen.

In der umgekehrten Lage würden beide Hauptpunkte hinter die zweite Fläche fallen, nur wenn n und ν beide grösser oder kleiner als 1, würden sie in die Linse fallen.

Bei biconcaven Linsen liegen die Hauptpunkte stets in der Linse, bei planconcaven der eine stets in der gekrümmten Fläche, der andere, wie bei den planconvexen, um νd oder $\frac{d}{n}$ von der ebenen Fläche gegen das Innere der Linse hin entfernt.

Bei convex-concaven Linsen liegen die Hauptpunkte auf der concaven Seite ausserhalb der Linse, nur wenn n und ν beide grösser oder kleiner als 1 wären, würden sie in die Linse fallen.

Bei der Untersuchung der Hauptbrennweiten wollen wir zunächst die Annahme machen, vor und hinter der Linse sei dasselbe Medium, also $\nu = \frac{1}{n}$. Diese Annahme lässt die Gleichung für F folgende Gestalt annehmen:

$$\frac{1}{F} = (n - 1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho} + \frac{n-1}{nr\varrho} \cdot d\right)$$

und macht ebenso

$$A = F.$$

Im Falle also vor und hinter der Linse dasselbe Medium ist, sind die beiden Hauptbrennweiten einander gleich, und damit fallen Haupt- und Knotenpunkte zusammen, oder die Verbindungslinien des ersten Hauptpunktes mit dem leuchtenden Punkte, des zweiten mit dem Bildpunkte sind einander parallel. Daraus folgt dann gleichzeitig, dass die Grösse des Bildes und Gegenstandes sich verhalten wie die respectiven Abstände von den Hauptpunkten oder dass

$$y = - \frac{f}{a} \cdot Y,$$

was übrigens auch direkt daraus folgt, dass $n \cdot \nu = 1$.

Aus der Gleichheit der beiden Brennweiten ergibt sich weiter, dass es gleichgültig ist, welche der Flächen wir dem Lichte zuwenden, dass die Lage der Bilder nicht durch eine Aenderung der Linsenstellung geändert wird. Denn aus der Gleichheit von F und A folgt zunächst

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{a} = \frac{1}{A} - \frac{1}{a}.$$

Kehren wir die Linse um, so dass die vorher erste Fläche zur zweiten wird und umgekehrt, und nennen die zweite Hauptbrennweite dann F', so wird

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F'} - \frac{1}{a}.$$

Nach dem schon mehrfach angewandten Reciprocitätsgesetze wird aber der jetzige zweite Hauptbrennpunkt dort sich befinden, wo vorher der erste Hauptbrennpunkt lag, das heisst parallel auf die Linse fallende Strahlen werden nach dem Punkte convergiren, dessen Strahlenkegel bei der vorigen Lage durch die Brechung in der Linse parallel wurden, oder

$$F' = A = F$$

und somit

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{A} - \frac{1}{a} = \frac{1}{F} - \frac{1}{a}.$$

Die Werthe der Hauptbrennweiten in ihrer Abhängigkeit von der Linsengestalt erhalten wir, indem wir in die allgemeine Gleichung für F die den einzelnen Linsen entsprechenden Werthe der Radien einsetzen.

Für die biconvexen Linsen ist r positiv, ϱ negativ, setzen wir deshalb $\varrho = -r'$, so wird für diese

$$\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} - \frac{n-1}{nrr'} \cdot d\right) \ldots\ldots (a).$$

Für die planconvexen Linsen ist r positiv, $\varrho = \infty$; es wird

$$\frac{1}{F} = (n-1) \cdot \frac{1}{r} \ldots\ldots (b)$$

oder es ist $r = \infty$, $\varrho = -r'$, dann wird

$$\frac{1}{F} = -(n-1)\,\frac{1}{-r'} = (n-1)\,\frac{1}{r'} \ldots\ldots (b).$$

Auch diese beiden Werthe für F, je nachdem die ebene oder die convexe Seite dem Licht zugewandt ist, zeigen den vorhin schon abgeleiteten Satz, dass es gleichgültig ist, welche der Flächen einer gegebenen Linse dem ankommenden Lichte zugewandt ist.

Für die concav-convexen Linsen ist die Bedingung entweder r positiv und ebenso $\varrho = +r'$ und dann $r' > r$; damit ist

$$\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} + \frac{n-1}{nrr'} \cdot d\right) \ldots\ldots (c).$$

oder r negativ, $\varrho = -r'$ und $r > r'$, damit ist

$$\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} + \frac{n-1}{nrr'} \cdot d\right) \ldots\ldots (c).$$

Auch hier liefern die beiden Gleichungen (c) für F denselben Werth.

Die drei Gleichungen (a), (b) und (c) haben das Gemeinsame, dass das von den Radien der Linsen abhängige Glied des Werthes von F stets positiv ist; denn auch die Differenz

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{r'} - \frac{1}{r}$$

ist stets positiv, da im ersten Falle $r' > r$, im zweiten $r > r'$.

Es folgt somit, dass bei diesen drei Linsenarten die Brennweiten dasselbe Vorzeichen haben, welches bedingt ist durch den Werth von n. Ist $n > 1$, ist also die Linsensubstanz optisch dichter als ihre Umgebung, wie es der Fall ist, wenn wir Glaslinsen in der Luft haben, so ist der Werth der Hauptbrennweiten positiv, die Linsen haben also dann zwei reelle Hauptbrennpunkte, das heisst parallele die Linse treffende Strahlen vereinigen sich wirklich nach ihrem Durchtritt durch die Linse in einem hinter der Linse liegenden Punkte; und Strahlen, welche von einem im Abstande F vor der Linse liegenden Punkte ausgehen, werden nach dem Durchtritt durch die Linse parallel.

Das Umgekehrte ist der Fall, wenn $n < 1$; dann wird der Werth von F negativ, oder Linsen, deren Substanz optisch weniger dicht ist als das die Linse umgebende Medium, haben zwei virtuelle Hauptbrennpunkte. Strahlen, welche parallel einander und der Axe auf die Linse auftreffen, divergiren nach dem Durchtritt durch die Linse, als kämen sie von einem im Abstande F vor der Linse liegenden Punkte, und Strahlen, welche nach dem Durchtritte durch die Linse parallel werden sollen, müssen vor der Linse nach einem im Abstande F hinter der Linse liegenden Punkte convergiren. Linsen, welche optisch weniger dicht sind als ihre Umgebung, kann man sich leicht herstellen, indem man passende Uhrgläser mit ihren Rändern je zwei zusammenkittet, so dass sie die Formen Fig. 74 erhalten. Bringt man die Linsen dann in ein Gefäss voll Wasser, das von ebenen und parallelen Glaswänden begrenzt ist, so hat die Linsensubstanz einen kleinern Brechungsexponenten als die Umgebung, nämlich das Wasser. Lässt man die Strahlen der Sonne auf solche Linsen fallen, so werden dieselben nicht in einem Punkte hinter der Linse vereinigt, sondern divergiren.

Die Linsen der zweiten Gattung verhalten sich wie jene der erstern, welche optisch dichter sind als die Umgebung, wenn sie selbst optisch dünner sind; also Luftlinsen im Wasser, wenn sie zur zweiten Gattung gehören, verhalten sich wie Glaslinsen in Luft der ersten Gattung; Glaslinsen der zweiten Gattung in Luft verhalten sich wie Luftlinsen in Wasser der ersten Gattung.

Denn für die biconcaven Linsen ist r negativ, ϱ positiv gleich $+ r'$. Es ist somit

$$\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{-r} - \frac{1}{r'} - \frac{n-1}{nrr'}\,d\right) = -(n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} + \frac{n-1}{nrr'}\cdot d\right) \text{(d.}$$

Für die planconcaven Linsen ist r negativ, $\varrho = \infty$,

$$\frac{1}{F} = -(n-1)\,\frac{1}{r}\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \text{(e)}$$

oder $r = \infty$, $\varrho = + r'$,

$$\frac{1}{F} = -(n-1)\,\frac{1}{r'}\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \text{(e)}$$

und schliesslich für die convex-concaven ist r negativ und $\varrho = - r'$ und zugleich $r' > r$,

$$\frac{1}{F} = -(n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} - \frac{n-1}{nrr'}\cdot d\right)\cdot\cdot\cdot \text{(f)}$$

oder r positiv, $\varrho = + r'$, dann aber $r > r'$,

$$\frac{1}{F} = -(n-1)\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} - \frac{n-1}{nrr'}\cdot d\right)\cdot\cdot\cdot \text{(f).}$$

Die drei Gleichungen unterscheiden sich von den ersten nur durch das Vorzeichen, bei ihnen ist also F negativ, wenn $n > 1$, F positiv, wenn $n < 1$. Im ersten Falle haben also die Linsen virtuelle, im zweiten reelle Hauptbrennpunkte. Die am meisten gebräuchlichen Linsen sind Glaslinsen in der Luft, und da bei solchen Linsen der ersten Gattung die Strahlen nach der Brechung convergiren, so nennt man die Linsen der ersten Gattung, die in der Mitte dicker sind als am Rande, Sammellinsen, die der zweiten Gattung dagegen Zerstreuungslinsen, weil bei ihnen die Strahlen nach der Brechung divergiren.

Bezeichnen wir für die Zerstreuungslinsen die Hauptbrennweite mit $- F$, so erhalten wir für den der Axe parallelen Abstand des Bildpunktes folgende beide Gleichungen:

1. Für die Sammellinsen, wenn $n > 1$, die Zerstreuungslinsen, wenn $n < 1$,

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{a}.$$

2. Für die Zerstreuungslinsen, wenn $n > 1$, für die Sammellinsen, wenn $n < 1$,

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{F} - \frac{1}{a} = -\left(\frac{1}{F} + \frac{1}{a}\right).$$

Im ersten Falle sind im Allgemeinen die Bilder reell, nur wenn $a < F$ und positiv ist, wird f negativ; im zweiten Falle dagegen ist f negativ, ausser wenn a negativ und kleiner als F ist.

Diese beiden Gleichungen zusammen mit der dritten für die Grösse der Bilder

$$y = -\frac{f}{a}\cdot Y$$

lassen nun sehr leicht die Lage und Grösse der Bilder, wie sie von Linsen geliefert werden, übersichtlich erkennen.

Ist bei den Sammellinsen der Abstand a des Gegenstandes von der Linse grösser als die Hauptbrennweite, so ist f stets positiv, somit das Bild immer reell und wegen des negativen Vorzeichens des Werthes von y umgekehrt, denn das negative Vorzeichen bedeutet, dass das Bild eines Punktes, der über der Axe sich befindet, unterhalb derselben liegt.

Das Bild kann, je nach seinem Abstande vom zweiten Hauptpunkte der Linse, kleiner, grösser oder an Grösse gleich dem leuchtenden Objecte sein. Ist $f < a$, so ist das Bild kleiner, ist $f > a$, so ist es grösser, ist $f = a$, so sind Gegenstand und Bild an Grösse gleich, der Lage nach entgegengesetzt. Nach unserer Gleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{a}$$

wird f gleich a, wenn

$$\frac{2}{a} = \frac{1}{F}$$

$$a = 2F$$

ist. Wenn demnach der Gegenstand sich in einem der doppelten Brennweite gleichen Abstande befindet, entwirft eine Sammellinse von ihm ein ihm an Grösse genau gleiches aber umgekehrtes Bild. In diesem Satze erhalten wir ein sehr bequemes Mittel, um die Brennweite einer Linse zu bestimmen, ohne Kenntniss der Krümmungsradien und des Brechungsexponenten der Linse. Man lässt das Licht einer Kerzenflamme oder das, welches durch eine Spaltöffnung in ein dunkles Zimmer tritt, auf eine Linse fallen und fängt das von der Flamme oder dem Spalte entworfene Bild auf einem Schirme auf. Verschiebt man dann Linse und Schirm so lange, bis das auf dem Schirme befindliche Bild genau die Grösse des Spaltes oder der Flamme hat, so gibt der halbe Abstand des Schirmes von der Linse, oder der Linse von der Flamme die Hauptbrennweite.

Wird nun der Abstand des Gegenstandes grösser wie $2F$, so wird f kleiner als a, das Bild nähert sich dem Hauptbrennpunkt und wird kleiner, ist $a = \infty$, so fällt das Bild in den Hauptbrennpunkt und ist unendlich klein. Von der Sonne, deren Entfernung in dieser Beziehung als unendlich gross angesehen werden kann, erhält man daher im Brennpunkt einer Sammellinse ein sehr kleines Bildchen. Indem man dessen Entfernung von der Linse misst, kann man ebenfalls die Hauptbrennweite der Linse bestimmen.

Ist der Abstand des Gegenstandes von der Linse kleiner als $2F$, so rückt das Bild weiter von der Linse fort und wird grösser, und zwar, indem a von $2F$ bis F abnimmt, wächst f von $2F$ bis unendlich.

Wird der Abstand des Gegenstandes kleiner als F, so wird f negativ, da dann

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{F},$$

und zwar ist der absolute Werth von f dann immer grösser als a, ausser wenn $a = o$. Denn damit $f = - a$ werde, muss nach unserer Gleichung

$$-\frac{1}{a} = \frac{1}{F} - \frac{1}{a},$$

also $\frac{1}{F}$ gegen $\frac{1}{a}$ einen verschwindenden Werth haben, deshalb $\frac{1}{a} = \infty$ oder was dasselbe ist $a = 0$ werden.

Wir erhalten also in diesem Falle stets virtuelle, vergrösserte Bilder, und da

$$y = -\frac{f}{a} \cdot Y = \frac{f'}{a} \cdot Y,$$

wenn wir den Werth des Abstandes vor der Linse mit $-f'$ bezeichnen, aufrecht stehende Bilder. Denn das positive Vorzeichen vor y zeigt, dass der ausser der Axe liegende Bildpunkt an derselben Seite der Axe liegt als der leuchtende Punkt, dessen Bild er ist.

Schliesslich kann der leuchtende Punkt noch hinter die Linse rücken, also a negativ werden; das ist dann der Fall, wenn ein Strahlenkegel auf die Linse fällt, dessen Spitze hinter der Linse liegt. Der Abstand dieser Spitze vom ersten Hauptpunkte der Linse ist dann gleich $- a$ zu setzen. Damit wird f aus

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{-a} = \frac{1}{F} + \frac{1}{a}$$

immer positiv, der Bildpunkt ist also stets ein reeller, er liegt hinter der Linse und da

$$\frac{1}{f} > \frac{1}{a},$$

näher bei der Linse als der virtuelle leuchtende Punkt.

Da ferner jetzt

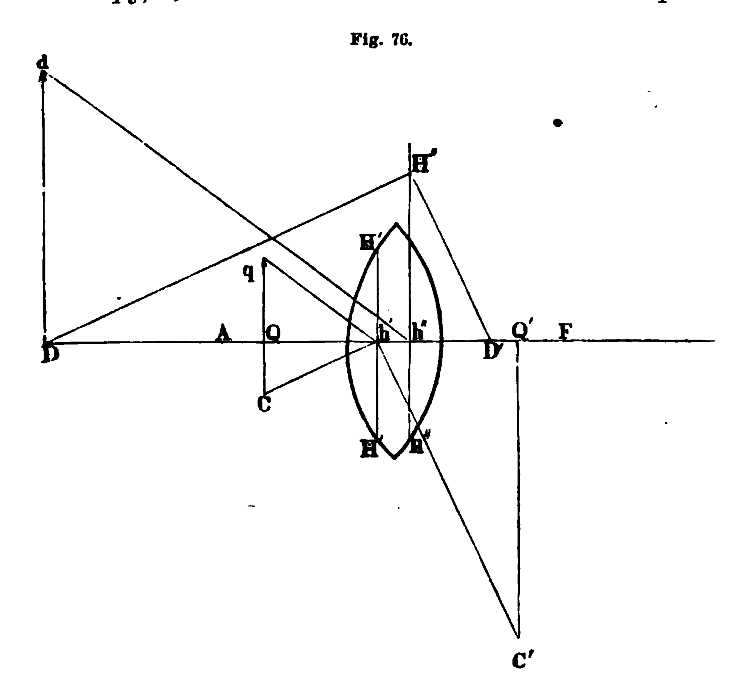
$$y = -\frac{f}{-a} \cdot Y = \frac{f}{a} \cdot Y,$$

so folgt, dass der Brennpunkt stets auf derselben Seite der Axe liegt als der leuchtende Punkt.

Alle diese einzelnen Fälle, wie sie sich durch Discussion der Gleichungen ergeben, folgen auch unmittelbar aus der im Anfange dieses §. angeführten Construction; es ist dabei nur zu beachten, dass wenn wir positive Werthe von $a - A$ senkrecht nach oben auf der Axe ziehen, dass dann negative Werthe senkrecht nach unten zu ziehen sind. Man erkennt dann sofort, dass wenn Q (Fig. 76) ein zwischen dem Hauptbrennpunkt A und dem ersten Hauptpunkt h' liegender leuchtender Punkt ist, sein Bildpunkt in D liegt, denn ziehen wir $QC = QA = a - A$ senkrecht nach unten und verbinden C mit h', so ist die mit Ch' parallele $H''D$ so geneigt, dass sie die Axe vor

der Linse in D schneidet. Zugleich erkennt man, dass das Bild ein aufrechtes sein muss; denn ist Qq eine leuchtende zur Axe senkrechte Linie, so erhalten wir, da die Hauptpunkte hier die Eigenschaften der Knotenpunkte haben, das Bild von qQ, wenn wir von h'' eine Parallele $h''d$ mit $h'q$ ziehen; wo

Fig. 76.



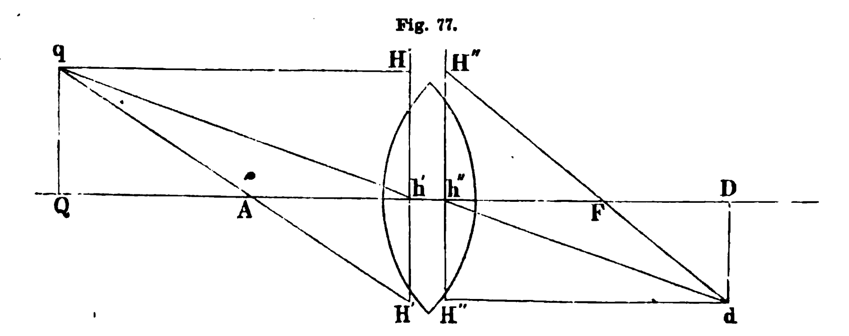
diese Parallele die in D zur Axe senkrechte Dd schneidet, liegt das Bild von q.

Ebenso ergibt die Construction unmittelbar, dass das Bild des hinter der Linse liegenden Punktes Q' ebenfalls hinter der Linse aber näher beim zweiten Hauptpunkte in D' liegt.

Mit Hülfe der Eigenschaft, dass der Axe parallele Strahlen nach der Brechung durch den zweiten Hauptbrennpunkt gehen, oder dass Strahlen, die durch den ersten Hauptbrennpunkt gehen, nach der Brechung der Axe parallel werden, können wir durch eine sehr einfache Construction auch direkt die Lage der Bilder erhalten, ohne vorher ihren Abstand vom zweiten Hauptpunkte aufsuchen zu müssen. Sind A und F (Fig. 77) der erste und zweite Hauptbrennpunkt einer Linse und Qq ein leuchtendes Object, so haben wir nur von q aus eine mit der Axe parallele qH' bis zur ersten Hauptebene zu ziehen; der zu dieser als einfallendem Strahl gehörige gebrochene geht dann durch einen Punkt H'' der zweiten Hauptebene, der ebenso weit von h'' entfernt ist, wie H' von h' und durch den zweiten Hauptbrennpunkt F. Der Bildpunkt von q muss deshalb auf dem Strahl $H''F$ liegen. Einen zweiten Strahl liefert uns entweder die Eigenschaft der Hauptpunkte als Knotenpunkte,

oder die erwähnte Eigenschaft des ersten Hauptbrennpunkts, dass die durch ihn gehenden Strahlen nach der Brechung der Axe parallel werden. Benutzt

Fig. 77.



man die erste Eigenschaft, so hat man nur q mit h' zu verbinden und durch h'' eine mit qh' parallele zu ziehen, wo diese $H''\ F$ in d schneidet, liegt der Bildpunkt von q, und dD ist das Bild von Qq. Im andorn Falle zieht man qAH', nimmt $h''\ H'' = h'\ H'$ und zieht durch H'' eine Parallele mit der Axe, wo diese $H''\ F$ schneidet, ist der gesuchte Bildpunkt.

Die Zerstreuungslinsen liefern im Allgemeinen keine reellen, sondern virtuelle, aufrecht stehende und verkleinerte Bilder der Gegenstände, welche ihre Strahlen auf sie senden. Wir haben dort

$$\frac{1}{f} = -\left(\frac{1}{F} + \frac{1}{a}\right).$$

So lange demnach a positiv ist, hat f immer einen negativen Werth und sein absoluter Werth ist kleiner als a, das heisst nach der Brechung divergiren die Strahlen so, als kämen sie von einem der Linse näher liegenden Punkte als der leuchtende.

Da auch hier

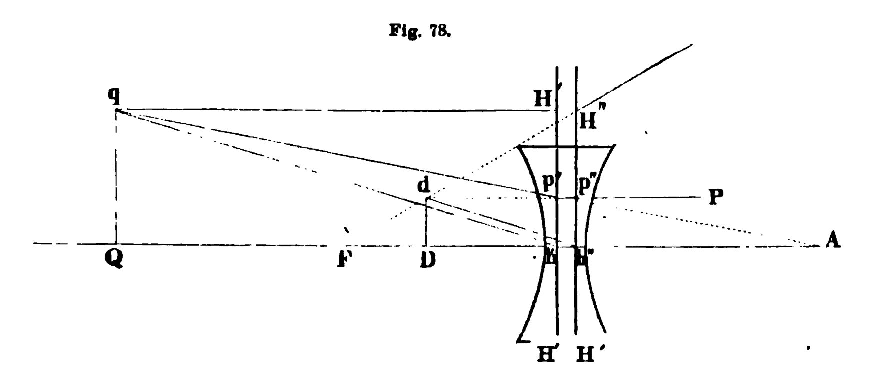
$$y = -\frac{-f}{a} Y = \frac{f}{a} \cdot Y,$$

so folgt, dass y kleiner ist als Y, dass also das virtuelle Bild kleiner ist, und da y dasselbe Vorzeichen hat wie Y, dass das Bild ein aufrechtes Bild ist.

Die vorhin für Sammellinsen abgeleitete Construction führt auch hier unmittelbar zum Ziele. Ist Qq Fig. 78 ein Gegenstand, der seine Strahlen auf die biconcave Linse sendet, deren Hauptpunkte in h' und h'' liegen, deren erster Hauptbrennpunkt in A, deren zweiter in F liegt, so können wir das Bild Dd zunächst erhalten, indem wir den der Axe parallelen Strahl $q\ H'$ ziehen; nach der Brechung scheint derselbe von F herzukommen, es muss also das Bild auf $H''F$ liegen. Ziehen wir dann $q\ h'$, so muss das Bild auf der durch h'' mit qh' gezogenen Parallelen $h''\ d$ liegen, wo also diese $F\ H''$ schneidet, in d liegt der Bildpunkt von q und dD ist das Bild von Qq. Wir können als zweiten Strahl auch den durch A gehenden nehmen; derselbe wird nach der Brechung parallel der Axe. Legen wir demnach durch den

Punkt p' der ersten Hauptebene $p'\,P$ parallel der Axe und verlängern rückwärts, bis diese Parallele $F\,H''$ oder $h''\,d$ in d schneidet, so erhalten wir ebenfalls den gesuchten Bildpunkt.

Fig. 78.



Ist in diesem Falle der leuchtende Punkt ein virtueller, das heisst convergiren die Strahlen nach einem hinter der Linse liegenden Punkte, so wird in der Gleichung für f der Abstand a negativ, und unsere Gleichung wird dann

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{F} - \frac{1}{-a} = -\left(\frac{1}{F} - \frac{1}{a}\right).$$

Je nach dem Werthe von a kann dann f alle die Werthe erhalten, die wir bei den Sammellinsen für ein positives a erhielten, nur dass das Vorzeichen von f immer das entgegengesetzte ist.

So lange a seinem absoluten Werthe nach grösser ist als F, ist f negativ, der Brennpunkt liegt also vor der Linse, die Strahlen divergiren nach der Brechung; wird $a = F$, so wird $f = \infty$, die Strahlen werden nach der Brechung parallel.

Der absolute Werth von f erhält sein Minimum für $a = \infty$, die Strahlen divergiren nach der Brechung vom Hauptbrennpunkt aus, er wird um so grösser, je kleiner a wird.

Ist $a = -2F$, so wird auch $f = -2F$, die Strahlen divergiren nach der Brechung von einem Punkte aus, der ebenso weit vor der Linse liegt, als der Convergenzpunkt der Strahlen vor dem Eintritt in die Linse hinter derselben liegt.

Wird $a < F$, das heisst convergiren die Strahlen nach einem Punkte, welcher der Linse näher liegt als die Hauptzerstreuungsweite, so wird f positiv, indem

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{F}$$

und zugleich

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{F}.$$

Da nun aber stets

$$\frac{1}{f} < \frac{1}{a},$$

so ist $f > a$, das heisst die Strahlen convergiren nach einem Punkte, welcher weiter hinter der Linse liegt, als der Punkt, nach welchem sie vorhin convergirten.

Die Lage der virtuellen oder reellen Bildpunkte von ausser der Axe liegenden Punkten ergibt sich auch hier aus

$$y = -\frac{f}{a} \cdot Y.$$

Ist f und a negativ, was der Fall ist, so lange $a > F$, so ist die Lage des virtuellen Brennpunktes in Bezug auf die Axe entgegengesetzt der des leuchtenden Punktes, und ist $f > a$, so lange $a < 2F$, so ist $y > Y$, der Brennpunkt ist weiter von der Axe entfernt als der virtuelle leuchtende Punkt.

Wenn $a > 2F$ ist, so ist $f < a$, der Brennpunkt liegt also der Axe näher als der virtuelle leuchtende Punkt.

Wenn $a < F$, so wird f positiv, und da a negativ ist, wird also auch y positiv und zwar, da $f > a$, auch immer grösser als Y. Im Falle also concave Linsen einen reellen Brennpunkt haben, liegt derselbe für ausser der Axe liegende leuchtende Punkte weiter von der Axe, als der leuchtende Punkt.

Wir haben bisher angenommen, dass die Linse auf beiden Seiten dasselbe brechende Medium habe; die Erscheinungen sind qualitativ nur wenig anders, wenn die Medien verschieden sind; ist $n > 1$, $\nu < 1$, so liefern die Sammellinsen unter denselben Umständen reelle oder virtuelle und ebenso die Zerstreuungslinsen virtuelle oder reelle Bilder, wie wenn auf beiden Seiten dasselbe Mittel und $n > 1$ ist. Ist $n < 1$, $\nu > 1$, so sind die Erscheinungen so, als wenn bei gleichem Mittel auf beiden Seiten $n < 1$. Bei gleichen Linsen werden nur die absoluten Werthe von f anders, da der Werth von F ein anderer wird und in der Gleichung für f

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{n \nu a}$$

der Nenner des letzten Gliedes den Factor $n\nu$ enthält, der hier nicht gleich 1 ist.

In Betreff der Grösse des Bildes und der Construction desselben ist ferner zu beachten, dass die beiden Hauptbrennweiten verschieden sind, somit auch die Hauptpunkte und Knotenpunkte nicht zusammenfallen. Bei den Constructionen Fig. 77 und 78 muss man deshalb anstatt der Linien $q\,h'$ und $d\,h''$ die Verbindungslinien des leuchtenden Punktes mit dem ersten Knotenpunkte und die durch den zweiten Knotenpunkt mit der letzten pararallel gezogene Richtung einführen. Fig. 73 §. 34 deutet an, wie etwa die Knotenpunkte liegen, wenn hinter der Linse Wasser, vor derselben Luft ist.

Sind n und ν beide grösser oder beide kleiner als 1, so hängt das Verhalten der Linsen wesentlich von dem Verhältniss dieser beiden Brechungsexponenten und der Radien r und ϱ ab, ob eine bestimmte Linse reelle oder

virtuelle Bilder liefert, das heisst, ob F positiv oder negativ ist, man wird in den einzelnen Fällen leicht den Werth berechnen können.

Auf einen Unterschied im Verhalten der Linsen, wenn an den beiden Seiten verschiedene Medien sind, müssen wir noch hinweisen. Wenn die Krümmungsradien der Flächen verschieden sind, ist es nicht gleichgültig, welche Seite der Linse dem ankommenden Lichte zugewandt ist. Es mag das an einem Beispiele gezeigt werden; nehmen wir eine planconvexe Linse aus Glas, vor welcher Luft, hinter welcher Wasser sei. Der Brechungsexponent des Glases sei 1,5, der des Wassers also $n\nu = 1,25$, somit $\nu = {}^8/_9$. Ist dann die convexe Seite die erste, so ist $\varrho = \infty$

$$\frac{1}{F} = \frac{n-1}{n \cdot \nu \cdot r} = \frac{0,5}{{}^4/_3 \cdot r} = \frac{1}{2,66\, r}$$

$$F = 2,66\, r; \quad A = 2\, r.$$

Ist dagegen die ebene Seite die erste, so ist $r = \infty$, $\varrho = -r$

$$\frac{1}{F} = -\frac{\nu - 1}{\nu \cdot r} = \frac{1}{8\, r}$$

$$F = 8\, r; \quad A = 6\, r.$$

Wie man sieht ist ein beträchtlicher Unterschied in den Hauptbrennweiten und deshalb auch in der Lage der Bilder. Aehnlich ist es in andern Fällen, wie man leicht durch Berechnung derselben findet.

§. 36.

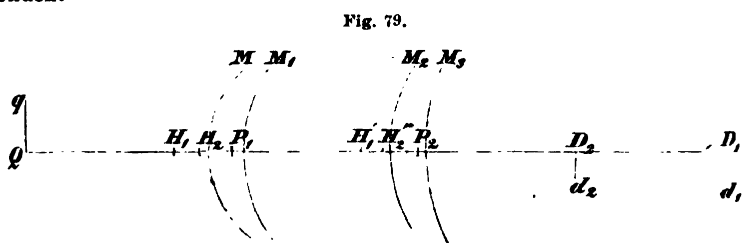
Brechung des Lichtes in einem Systeme beliebig vieler kugelförmiger Flächen. In den letzten Paragraphen haben wir den Gang des Lichtes durch ein centrirtes System von zwei Kugelflächen vollständig bestimmt; in der Praxis reichen wir indess damit nicht aus, da wir häufig den Gang des Lichtes durch ein combinirtes Linsensystem zu verfolgen haben. Wir müssen deshalb noch die Frage beantworten, wie wir die Lage und Grösse der Bilder bestimmen können, wenn wir anstatt zweier ein centrirtes System beliebig vieler kugelförmiger Flächen haben.

Dass ein solches System ebenfalls, wie die Linsen, Bilder entwirft, das haben wir bereits im Anfange des §. 32 erkannt, und ebenso dort bereits allgemein den Weg angedeutet, den wir zur Bestimmung derselben anzuwenden haben. Das von zwei Flächen entworfene Bild ist das leuchtende Object für die folgenden Flächen und dessen Lage wird nach den Gleichungen der letzten Paragraphen berechnet. Führen wir die Rechnungen durch, so erhalten wir die Ausdrücke, welche Lage und Grösse der Bilder für die vorhandene Zahl Flächen geben. Wir wollen die Rechnungen für ein System von vier Flächen durchführen, da uns diese schon das Resultat für beliebig viele Flächen erkennen lassen.

Seien M, M_1, M_2, M_3, Fig. 79, vier solcher brechender Flächen. Der Radius der ersten sei r, der zweiten ϱ, der dritten r_1, der vierten ϱ_1; die

Brechungsexponenten des Lichtes seien in der ersten Fläche n, in der zweiten ν, in der dritteu n_1, in der vierten ν_1. Wir fassen nun die ersten beiden Flächen als ein System, die Flächen M_2 und M_3 als ein zweites System von zwei Flächen auf; auf jedes derselben können wir dann unsere Gleichungen anwenden.

Fig. 79.



Die Hauptpunkte des ersten Systems, berechnet nach den für die Hauptpunkte im §. 33 abgeleiteten Gleichungen, seien H_1 und H_2, die des zweiten Systems seien H'_1 und H'_2; ferner sei die erste Hauptbrennweite des ersten Systems A_1, die des zweiten A_2, die zweite Hauptbrennweite des ersten Systems sei F_1, die des zweiten F_2. Befindet sich nun im Abstande a_1 vom ersten Hauptpunkte des ersten Systems ein leuchtendes Object Qq, so entwirft das erste System von demselben ein Bild im Abstande f_1 vom zweiten Hauptpunkte dieses Systems, welcher gegeben ist dureh die Gleichung

$$f_1 = \frac{n\nu \,.\, a_1 F_1}{n\nu a_1 - F_1} = \frac{a_1 F_1}{a_1 - A_1},$$

dessen Grösse gegeben ist durch

$$y_1 = -\frac{f_1}{n\nu a_1} \cdot Y = -\frac{A_1}{a_1 - A_1} \cdot Y.$$

Dieses Bild, es sei $d_1 D_1$, ist nun das leuchtende Object für das zweite System. Ist sein Abstand vom ersten Hauptpunkte des zweiten Systems a_2, so entwirft das zweite System von $d_1 D_1$ ein Bild, dessen Abstand vom zweiten Hauptpunkte des Systems gegeben ist durch

$$f_2 = \frac{n_1 \nu_1 \,.\, a_2 F_2}{n_1 \nu_1 a_2 - F_2} = \frac{a_2 F_2}{a_2 - A_2}$$

und dessen Grösse ist

$$y_2 = -\frac{f_2}{n_1 \nu_1 a_2} \cdot y_1 = -\frac{A_2}{a_2 - A_2} \cdot y_1,$$

und wenn wir hierin y_1 durch seinen Werth ersetzen,

$$y_2 = \frac{A_1}{a_1 - A_1} \cdot \frac{A_2}{a_2 - A_2} \cdot Y.$$

Nennen wir nun den Abstand des ersten Hauptpunktes des zweiten Systems vom zweiten Hauptpunkte des ersten D, so ist

$$a_2 = D - f_1,$$

da auch hier wieder, wenn $D < f_1$, a_2 negativ zu setzen ist. Ersetzen wir f_1 durch seinen Werth, so wird

$$a_2 = D - \frac{a_1 F_1}{a_1 - A_1} = \frac{a_1 D - A_1 D - a_1 F_1}{a_1 - A_1}$$

und setzen wir in die Gleichung für f_2 diesen Werth von a_2

$$f_2 = \frac{a_1 F_2 (D - F_1) - D A_1 F_2}{a_1 (D - F_1 - A_2) - A_1 D + A_1 A_2}.$$

Der Werth von y_2 wird dann

$$y_2 = \frac{A_1 A_2}{a_1 (D - F_1 - A_2) - A_1 D + A_1 A_2} \cdot Y.$$

Zur Vereinfachung dieser Ausdrücke suchen wir jetzt die Hauptpunkte des ganzen Systems, die wir wieder genau so definiren wie früher, und rechnen die Abstände des leuchtenden Objectes von dem ersten, des Bildes von dem zweiten Hauptpunkte.

Nennen wir den Abstand des ersten Hauptpunktes des ganzen Systems vom ersten Hauptpunkte des ersten Flächenpaares h_1, so gibt uns die Definition für diesen Abstand die Gleichung

$$\frac{y_2}{Y} = 1 = \frac{A_1 A_2}{h_1 (D - F_1 - A_2) - A_1 D + A_1 A_2}$$

und daraus

$$h_1 = \frac{A_1 D}{D - F_1 - A_2}.$$

Mit Hülfe dieses Werthes erhalten wir dann den Abstand des zweiten Hauptpunktes von dem zweiten Hauptpunkte des zweiten Flächenpaares, h_2, wenn wir in der Gleichung für f_2 für a_1 diesen Werth von h_1 einsetzen. Es wird

$$h_2 = \frac{F_2 D}{D - F_1 - A_2},$$

ein Ausdruck, der sich von dem für den ersten Hauptpunkt erhaltenen nur dadurch unterscheidet, dass an die Stelle der ersten Hauptbrennweite des ersten Flächenpaares im Zähler die zweite Hauptbrennweite des zweiten Flächenpaares eintritt.

Um nun die Abstände des leuchtenden Objectes von dem ersten Hauptpunkte P_1 an zu rechnen, sei $Q P_1 = a$; dann ist

$$a_1 = a + h_1 = a + \frac{D A_1}{D - F_1 - A_2}.$$

Bezeichnen wir ferner den Abstand des Bildes von dem zweiten Hauptpunkte P_2 oder $D_2 P_2$ mit f, so ist

$$f = f_2 - h_2 = f_2 - \frac{D F_2}{D - F_1 - A_2}.$$

Berechnen wir nun den Werth von f, indem wir a_1 durch den Werth von $a + h_1$ ausdrücken, so erhält man nach einigen leicht zu übersehenden Reductionen

$$f = \frac{a F_1 F_2}{a (F_1 + A_2 - D) - A_1 A_2};$$

ganz ebenso vereinfacht sich der Ausdruck für y_2

$$y_2 = -\frac{A_1 A_2}{a(F_1 + A_2 - D) - A_1 A_2} \cdot Y.$$

Durch Einführung der Hauptbrennweiten gelangen wir zu noch einfacheren Ausdrücken; die zweite Hauptbrennweite wird aus

$$\frac{1}{f} = \frac{F_1 + A_2 - D}{F_1 F_2} - \frac{A_1 A_2}{a \,.\, F_1 F_2},$$

indem $a = \infty$ gesetzt wird

$$\frac{1}{F} = \frac{F_1 + A_2 - D}{F_1 F_2}$$

und die erste Hauptbrennweite A aus

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{A_1 A_2}{a \,.\, F_1 F_2}$$

durch Einsetzen des Werthes $f = \infty$

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{F} \cdot \frac{F_1 F_2}{A_1 A_2}.$$

Beachten wir nun, dass

$$F_1 = n\nu \,.\, A_1 \quad F_2 = n_1 \nu_1 \,.\, A_2$$

so wird

$$F = n\nu \,.\, n_1 \nu_1 \,.\, A$$

und

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{n\nu\, n_1 \nu_1\, a}$$

und indem wir jetzt auf beiden Seiten mit F multipliciren und nach f auflösen

$$f = \frac{a F}{a - A}$$

$$y_2 = -\frac{f}{n\nu\, n_1 \nu_1 A} \cdot Y = -\frac{A}{a - A} \cdot Y.$$

Es reproduciren sich also durch Einführung der Hauptbrennweiten des ganzen Systems wieder genau dieselben Ausdrücke, die wir auch für zwei Flächen bekommen haben.

Daraus folgt dann auch unmittelbar, dass genau dieselben Beziehungen für beliebig viele brechende Flächen gültig sind, und dass man nur in jedem Falle die Lage der Hauptpunkte und die Hauptbrennweiten für das ganze System zu berechnen hat. Die Art und Weise dieser Berechnung ergibt sich aus dem Vorstehenden unmittelbar, man geht von Fläche zu Fläche weiter; man kann allerdings auch auf Grund obiger Formeln Gleichungen für die Hauptbrennweiten von n Flächen entwickeln und zwar ohne Schwierigkeiten, indess kommt man dadurch nicht rascher zum Ziel, als wenn man in der Weise weiter rechnet, wie es hier für vier Flächen geschehen ist.

§. 37.

Sphärische Abweichung bei Linsen; aplanatische und combinirte Linsen. Wir haben in unserer Entwicklung über die Linsenbilder die Voraussetzung gemacht, dass alle von einem Punkte ausgehende Strahlen nach den Brechungen in beiden Linsenflächen in der That alle nach einem Punkte convergiren. Es ist dies jedoch ein idealer Fall, der in der Praxis niemals erreicht werden kann, da nur die Strahlen, welche der Axe unendlich nahe liegen, wirklich genau, und die, welche der Axe sehr nahe liegen, nahezu in einem Punkte vereinigt werden. Diejenigen Strahlen, welche näher dem Rande der Linse auftreffen, werden in einem andern Punkte hinter der Linse vereinigt, als die centralen Strahlen, welche mit der Axe nur kleine Winkel bilden. Den Abstand des Punktes, in welchem die Randstrahlen nach der Brechung sich schneiden, von dem Brennpunkte der centralen Strahlen, nennt man die sphärische Längenabweichung.

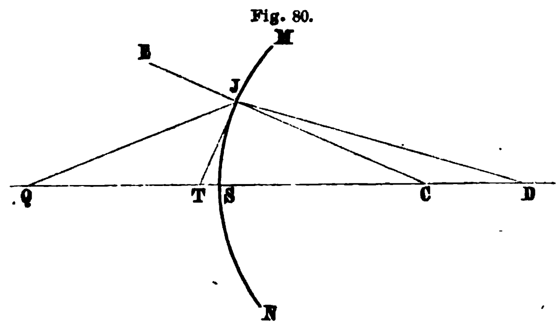
Wenn man anstatt der angenäherten Ausdrücke des §. 31 die genauern anwendet, also nicht anstatt der Abstände des leuchtenden Punktes und Brennpunktes von dem Punkte, wo der einfallende Strahl die Fläche trifft, die Abstände vom Scheitel der brechenden Fläche einsetzt, so findet man, dass bei convexen Flächen die Brennweite der centralen Strahlen grösser ist als diejenige der Randstrahlen. Nur wenn die einfallenden Strahlen nach dem Mittelpunkte der Kugel convergiren, vereinigen sie sich nach dem Durchtritt durch die Fläche, da sie ohne Brechung hindurchgehen, im Mittelpunkte der Kugel. Wird die Convergenz der einfallenden Strahlen noch stärker, so ist die Brennweite der Randstrahlen grösser als die der centralen. Bei concaven Flächen findet das Umgekehrte statt.

Man erkennt das unmittelbar, wenn man von den strengen Ausdrücken des §. 31 ausgeht

$$\frac{QC}{CD} = n \cdot \frac{QJ}{JD}.$$

Drücken wir hierin QJ und JD durch QC, CJ und CD sowie durch den Winkel $SCJ = \alpha$, welcher den Einfallspunkt J bestimmt, aus, so erhalten

Fig. 80.



wir, wenn wir gleichzeitig die bisher stets angewandte Bezeichnung $QC = b$, $CD = g$, $CJ = r$ anwenden,

$$\frac{b}{g} = n\sqrt{\frac{b^2 + r^2 - 2br \, . \cos\alpha}{g^2 + r^2 + 2gr \, . \cos\alpha}}$$

oder schreiben wir diese Gleichung

$$\frac{g^2}{b^2} = \frac{1}{n^2}\,\frac{(g+r)^2 + 2gr\,(\cos\alpha - 1)}{(b-r)^2 - 2br\,(\cos\alpha - 1)},$$

so erkennt man sofort, dass der grösste Werth, den dieser Ausdruck und damit g, im Falle r posititiv ist, annehmen kann, dem Werthe $\cos\alpha = 1$, also $\alpha = 0$ entspricht, dass somit alle nicht centralen Strahlen die Axe näher beim Scheitel schneiden als die centralen. Ist dagegen r negativ, so nimmt jener Ausdruck für $\alpha = 0$ seinen kleinsten Werth an, somit schneiden bei concaven Flächen die nicht centralen Strahlen die Axe in grösserm Abstand vom Scheitel.

Die Differenz des Werthes von g oder f, welcher sich aus diesem Ausdrucke ergibt, wenn wir für α die halbe Oeffnung der brechenden Fläche einsetzen und dessen, den wir erhalten, wenn wir α gleich 0 setzen, also die Abweichung der Randstrahlen hängt von dem Werthe von b, von dem Abstande des leuchtenden Punktes ab. Bei einem und demselben Abstande des leuchtenden Punktes hängt dieselbe von dem Werthe α, also von der Krümmung der Fläche ab; die Abweichung ist um so grösser, je grösser α ist.

Aehnliches wie für die einzelne Fläche gilt für die Linsen; bei der Ausgedehntheit der im Uebrigen nicht schwierigen Rechnungen begnügen wir uns hier damit, die von Herschel[1]) und andern[2]) gefundenen Resultate kurz mitzutheilen. Es folgt aus denselben, dass für die meisten Linsen, die biconvexen, planconvexen, biconcaven, planconcaven und convex-concaven die Brennweite der Randstrahlen immer kleiner ist als diejenige der Centralstrahlen. Bei den concav-convexen Linsen kann je nach dem Abstande des leuchtenden Punktes die Brennweite der Randstrahlen kleiner oder grösser sein als diejenige der centralen Strahlen, und es gibt für jede concav-convexe Linse eine von dem Verhältniss der Krümmungsradien und der Brechungsverhältnisse des Mittels abhängige bestimmte Entfernung des leuchtenden Punktes, für welche die beiden Brennweiten gleich werden. Für diesen Fall nennt man die Linse aplanatisch.

Die Verschiedenheit der Brennweiten der Rand- und Centralstrahlen bewirkt, dass die durch die Linsen erzeugten Bilder an Undeutlichkeit leiden, indem der von dem Rande kommende Strahlenkegel den Brennpunkt der centralen Strahlen umgibt, und somit das Bild jedes einzelnen Punktes nicht ein einzelner Punkt, sondern ein kleiner Kreis ist. Diese Undeutlichkeit wird um so grösser, je grösser der Unterschied der Brennweiten ist, und da dieser zunimmt, je grösser der Winkel ist, den die nach dem Rande gezogenen Radien der Flächen mit der Axe bilden, um so grösser, je stärker die Krüm-

1) *Herschel,* On Light. §. X.

2) Man sehe *Gehler's* Wörterbuch, Artikel Linse. Bd. VI. Abth. I.

mung der Linsenflächen oder je kleiner die Krümmungsradien derselben sind. Da nun die Brennweite um so kleiner wird, je kleiner die Krümmungsradien der Linse werden, so folgt, dass die sphärische Aberration um so grösser ist, je kleiner die Brennweite einer Linse ist.

Um diese Undeutlichkeit zu vermeiden, muss man entweder Linsen mit sehr kleinen Oeffnungen anwenden, bei denen nur centrale Strahlen durch die Linse hindurchtreten, oder man muss anstatt einer Linse ein System von Linsen anwenden.

Sowie nämlich eine concav-convexe Linse für eine bestimmte Entfernung des leuchtenden Punktes aplanatisch ist, so kann man durch eine passende Wahl der Linsenkrümmungen ein System von Linsen herstellen, welches für parallele Strahlen gar keine und für solche, welche von weit entfernten Punkten herkommen, fast gar keine Abweichung gibt, ein solches Linsensystem nennt man ein aplanatisches. Indess werden solche aplanatische Systeme selten angewandt, weshalb wir hier auf die ziemlich weitläufigen Rechnungen, welche doch nicht zu allgemeinen Sätzen führen, nicht eingehen wollen.

Ein einfacheres Mittel, um bei kurzen Brennweiten eine geringe Abweichung zu erhalten, ohne zugleich auf wenige centrale Strahlen beschränkt zu sein, ist die Anwendung einer Combination mehrerer Linsen von grosser Brennweite anstatt einer Linse von kleiner Brennweite. Die Linsen werden dann in einiger Entfernung von einander aufgestellt, so dass der aus der ersten convergirend austretende Strahlenkegel auf der folgenden Linse schon sehr nahe dem Centrum auftrifft. Wie wir im vorigen Paragraphen sahen, ist die Brennweite einer Combination von zwei Linsen aus der Gleichung

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{F_2} + \frac{A_2}{F_1 \cdot F_2} - \frac{D}{F_1 F_2},$$

oder wenn wir voraussetzen, dass die Linsen auf beiden Seiten dasselbe Mittel haben, so dass $A_2 = F_2$,

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_1} - \frac{D}{F_1 F_2}.$$

Nehmen wir nun zwei Linsen, deren Brennweiten jede $0^m,5$ beträgt, und stellen sie so, dass der Abstand der Hauptpunkte $0^m,1$ beträgt, so wirken dieselben gerade wie eine Linse von $0^m,26$ Brennweite, jedoch ist die Abweichung bei der Combination viel kleiner als bei der einfachen Linse, wenn die Helligkeit des Bildes dieselbe ist, da bei gleicher Grösse der Linsen der Werth von α bei der Combination nur halb so gross ist als bei der einfachen Linse.

Für drei Linsen erhalten wir, wenn D_1 der Abstand der ersten und zweiten, D_2 der der zweiten und dritten Linse ist,

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{F_3} + \frac{A_3}{F_2 F_3} + \frac{A_2 A_3}{F_1 F_2 F_3} - \frac{D_1 A_3}{F_1 F_2 F_3} - \frac{D_2 (F_1 + A_2 - D_1)}{F_1 F_2 F_3},$$

wie man unmittelbar findet, wenn man in den für zwei Linsen gegebenen Ausdruck anstatt F_2 den für zwei Linsen gültigen Ausdruck einsetzt. Nehmen

wir auf beiden Seiten des ganzen Systems und zwischen den Linsen dasselbe Mittel an, so wird

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{F_3} + \frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_1} - \frac{D_1}{F_1 F_2} - \frac{D_2}{F_2 F_3} - \frac{D_2}{F_1 F_3} + \frac{D_1 D_2}{F_1 F_2 F_3}.$$

Ist nun die Brennweite der drei Linsen jede $0^m,5$, die Distanz $D_1 = 0,1$, $D_2 = 0^m,01$, so erhält man $F = 0^m,181$. Bei einer solchen Combination ist die Abweichung kaum merklich.

§. 38.

Chromatische Abweichung. Achromatische Linsen. Bei den durch einfache Linsen erzeugten Bildern tritt noch eine andere Undeutlichkeit der Bilder ein, welche darin ihren Grund hat, dass das Licht verschiedener Farben eine verschiedene Brechbarkeit hat. Wir hatten bei einer Linse in Luft für f die Gleichung

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho} + \frac{n-1}{n r \varrho} \cdot d\right) - \frac{1}{a},$$

und es folgt daraus, dass je grösser n ist, um so kleiner f ist. Da nun der Brechungsexponent von dem rothen nach dem violetten Ende des Spectrums immer grösser wird, so folgt, dass die violetten Strahlen ihren Brennpunkt am nächsten bei der Linse haben, und dass derjenige der rothen Strahlen am weitesten entfernt ist. Man kann sich leicht davon überzeugen, indem man ein Bündel Sonnenstrahlen durch eine Sammellinse treten lässt und den convergenten Strahlenkegel auf einem Schirme auffängt. Bei jeder Entfernung, welche kleiner ist als die nach unseren Ausdrücken berechnete Brennweite für Strahlen mittlerer Brechbarkeit, erhält man auf dem Schirm einen weissen Kreis, der von einem rothen Rande umgeben ist, in Abständen, die grösser sind als die mittlere Brennweite, dagegen einen weissen Kreis, der von einem blau-violetten Rande umgeben ist. Dadurch wird bewiesen, dass der violette Strahlenkegel stärker convergirt als der rothe, denn anfangs wird der violette Strahlenkegel vom rothen, später der rothe Strahlenkegel vom violetten umhüllt.

Diese Abweichung, welche natürlich auch bei einer Linsencombination stattfindet, wie wir sie im vorigen Paragraphen betrachtet haben, wirkt bei Linsen von starker zerstreuender Kraft viel störender als die Abweichung wegen der Kugelgestalt; sie kann indess ebenso mittels einer passenden Combination von Linsen aufgehoben werden.

Da die chromatische Abweichung darin ihren Grund hat, dass nach dem Durchtritt durch die Linse die violetten Strahlen stärker convergiren als die rothen Strahlen, so kann sie dadurch aufgehoben werden, dass man die Strahlen durch eine zweite Linse hindurchtreten lässt, welche die Strahlen weniger convergent macht, also durch eine Zerstreuungslinse, welche dann die violetten Strahlen stärker bricht als die rothen Strahlen. Da aber mit der Aufhebung der chromatischen Abweichung nicht die Wirkung der Linse aufge-

hoben werden soll, so muss die zweite Linse einen ebenso grossen Unterschied zwischen den Brennweiten der rothen und violetten Strahlen haben, ohne dass die Brennweiten selbst die gleiche Grösse bei entgegengesetztem Vorzeichen haben. Wir müssen daher, wenn wir eine achromatische Sammellinse herstellen wollen, dieselbe aus einer convexen und einer concaven Linse zusammensetzen, deren letztere bei einer grössern negativen Brennweite den gleichen Unterschied zwischen den Brennweiten der rothen und violetten Strahlen besitzt.

Für die Lage des Brennpunktes, wenn das Licht durch eine Combination zweier Linsen hindurchgegangen ist, erhalten wir unter Voraussetzung, dass der Abstand des zweiten Hauptpunktes der ersten vom ersten Hauptpunkte der zweiten so klein ist, dass wir $D = 0$ setzen dürfen,

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F'} + \frac{1}{F''} - \frac{1}{a}.$$

Bezeichnen wir nun durch f_r, F'_r, F''_r den Abstand des Brennpunktes der rothen Strahlen von der zweiten Linse, resp. die Hauptbrennweiten der rothen Strahlen für die erste und zweite Linse, so haben wir

$$\frac{1}{f_r} = \frac{1}{F'_r} + \frac{1}{F''_r} - \frac{1}{a}$$

und analog für die violetten Strahlen

$$\frac{1}{f_v} = \frac{1}{F'_v} + \frac{1}{F''_v} - \frac{1}{a}.$$

Die Bedingung der Achromasie ist nun, dass die rothen und violetten Strahlen in gleichen Abständen von den Linsen vereinigt werden, ohne dass jedoch die Linse aufhört, als Linse zu wirken. Es muss daher

$$\frac{1}{f_r} = \frac{1}{f_v}.$$

Die erste Lösung dieser Aufgabe würde sein

$$F'_r = -F''_r, \quad F'_v = -F''_v,$$

also die Zusammensetzung zweier Linsen, von denen die zweite eine ebenso grosse negative Brennweite hat, als die erste eine positive besitzt; da aber dann die Linsencombination aufhört als Linse zu wirken, so würde diese Lösung der zweiten Bedingung der Aufgabe nicht Genüge leisten.

Die andere Lösung ist

$$\frac{1}{F'_r} + \frac{1}{F''_r} = \frac{1}{F'_v} + \frac{1}{F''_v},$$

ohne dass obige Bedingung erfüllt wird. Das ist nur dann möglich, wenn die Substanzen verschiedene Brechungsvermögen und verschiedene zerstreuende Kräfte besitzen.

Sind die Brechungsexponenten der Substanz des ersten Prismas n'_r und n'_v, derjenigen des zweiten n''_r und n''_v und die Krümmungsradien der vier Flächen $r'\ r''\ r'''\ r^{IV}$, so heisst obige Bedingung

$$(n'_r - 1)\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''} + \frac{n'_r - 1}{n'_r\, r'\, r''}\cdot d\right) + (n''_r - 1)\left(\frac{1}{r'''} - \frac{1}{r^{IV}} + \frac{n''_r - 1}{n''_r\, r'''\, r^{IV}}\cdot d_1\right) =$$

$$= (n'_v - 1)\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''} + \frac{n'_v - 1}{n'_v . r' r''}\cdot d\right) + (n''_v - 1)\left(\frac{1}{r'''} - \frac{1}{r^{IV}} + \frac{n''_v - 1}{n''_v\, r'''\, r^{IV}}\cdot d_1\right).$$

Die gestellte Aufgabe kann nun eine doppelte sein, entweder kann man verlangen, zu einer gegebenen Linse eine zweite aus einer gegebenen Substanz herzustellen, welche mit der ersten zusammen eine achromatische Combination macht, oder es soll aus zwei gegebenen Substanzen eine achromatische Combination hergestellt werden. So gestellt sind aber für beide Aufgaben noch sehr viele Lösungen möglich.

Denn unsere die Bedingung der Achromasie ausdrückende Gleichung hat zehn Grössen; die erste Aufgabe gibt deren sechs, nämlich n'_r, n'_v, n''_r, n''_v, r', r'', d und d_1, die noch übrigen Grössen r''', r^{IV} und d_1 lassen sich aber aus der einen Gleichung nicht bestimmen, es lässt sich daraus nur die Brennweite der zweiten Linse bestimmen, die dann noch sehr viele Formen haben kann. Die Aufgabe wird erst bestimmt, wenn über eine der beiden Grössen r''' oder r^{IV} noch eine Bedingung hinzugefügt, etwa dass $r''' = r''$ werden soll oder irgend eine andere, und über die Dicke der zweiten Linse eine bestimmte Annahme gemacht wird.

Bei der zweiten Aufgabe, wo die Brennweite der Combination gegeben ist, zerfällt die Gleichung in zwei

$$(n'_r - 1)\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''} + \frac{n'_r - 1}{n'_r r' r''}\cdot d\right) + (n''_r - 1)\left(\frac{1}{r'''} - \frac{1}{r^{IV}} + \frac{n''_r - 1}{n''_r\, r''' . r^{IV}}\, d_1\right) = \frac{1}{F}$$

$$(n'_v - 1)\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''} + \frac{n'_v - 1}{n'_v r' r''}\cdot d\right) + (n''_v - 1)\left(\frac{1}{r'''} - \frac{1}{r^{IV}} + \frac{n''_v - 1}{n''_v\, r''' . r^{IV}}\cdot d_1\right) = \frac{1}{F},$$

wenn wir mit F die Brennweite der Combination bezeichnen, in denen von den zehn Grössen sechs zu bestimmen sind. Auch dann müssen demnach, um die Aufgabe vollkommen bestimmt zu machen, noch zwei Bedingungen gegeben sein, welche zwei andere Relationen zwischen den vier unbekannten Grössen geben, und eine bestimmte Dicke der beiden Linsen gefordert werden. Eine leicht zu erfüllende Bedingung ist z. B. die, dass das Linsensystem zugleich ein aplanatisches sein soll, wenn auch die Rechnungen ziemlich complicirt werden.

Sehr leicht lassen sich die Rechnungen durchführen, wenn man z. B. die Bedingung macht, dass die erste Linse eine biconvexe sein soll, deren zweite Fläche einen halb so grossen Krümmungsradius hat als die erste, und dass der Radius der ersten Fläche der zweiten Linse gleich sein soll dem der zweiten Fläche der ersten Linse, also

$$r' = -2r'' = -2r''',$$

wenn wir gleichzeitig die Annahme machen, dass die Linsen so dünn seien dass wir sowohl d als d_1 gleich 0 setzen dürfen.

Berechnen wir für diesen Fall eine achromatische Combination aus Crownglas No. 9 und Flintglas No. 13, deren Brennweite $F = 500$ Millimeter ist, so haben wir

$$n'_r = 1{,}5258 \qquad n''_r = 1{,}6277$$
$$n'_v = 1{,}5465 \qquad n''_v = 1{,}6710$$

und unsere beiden Gleichungen werden

$$0{,}5258\left(\frac{1}{r'} + \frac{2}{r'}\right) + 0{,}6277\left(-\frac{2}{r'} - \frac{1}{r^{IV}}\right) = \frac{1}{500} = 0{,}002$$
$$0{,}5465\left(\frac{1}{r'} + \frac{2}{r'}\right) + 0{,}6710\left(-\frac{2}{r'} - \frac{1}{r^{IV}}\right) = \frac{1}{500} = 0{,}002.$$

Durch Subtraction beider Gleichungen erhalten wir

$$0{,}0207\left(\frac{1}{r'} + \frac{2}{r'}\right) + 0{,}0433\left(-\frac{2}{r'} - \frac{1}{r^{IV}}\right) = 0$$
$$\frac{0{,}0207}{0{,}0433}\left(\frac{1}{r'} + \frac{2}{r'}\right) = \frac{2}{r'} + \frac{1}{r^{IV}}$$
$$\left(\frac{621}{433} - 2\right)\frac{1}{r'} = \frac{1}{r^{IV}} = -\frac{0{,}5659}{r'}.$$

Setzen wir diesen Werth von r^{IV} in eine unserer beiden Gleichungen ein, so erhalten wir z. B. aus der ersten

$$0{,}5258 \cdot \frac{3}{r'} - 0{,}6277\,\frac{2-0{,}5659}{r'} = 0{,}002$$
$$r' = 338^{mm}{,}6$$

und daraus

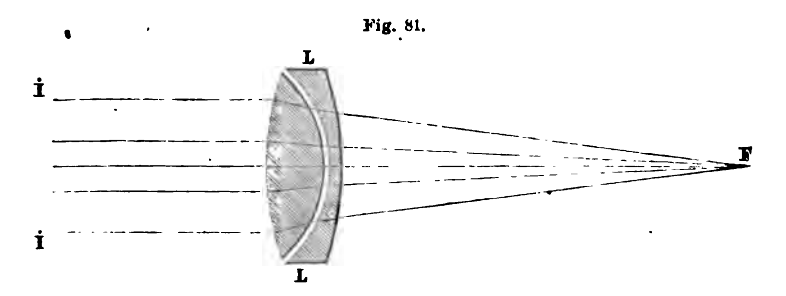
$$r^{IV} = -\frac{1}{0{,}5659} \cdot r' = -1{,}767\, r' = -598^{mm}{,}3$$

und

$$r'' = r''' = -\frac{r'}{2} = -169^{mm}{,}3.$$

Fig. 81 stellt diese Linse im Maassstabe 0,1 dar, das heisst es ist anstatt $F = 500^{mm}$ $F = 50^{mm}$ angenommen.

Fig. 81.



Die Brennweiten der einzelnen Linsen für Strahlen mittlerer Brechbarkeit sind dann

$$F' = 210{,}28; \quad F'' = -363{,}43.$$

Daraus berechnet sich dann die Brennweite der Combination

$$\frac{1}{F'} = \frac{1}{210,28} - \frac{1}{363,43} = 0,0047 - 0,0027 = 0,002$$

$$F' = 500^{mm}.$$

Es ist zu bemerken, dass diese Combination auch eine nahezu aplanatische ist.

Sowie zwei Prismen nicht ein vollkommen achromatisches Prisma liefern können, so können zwei Linsen ebenfalls keine achromatische Combination liefern, da, wenn in beiden auch die Abstände der Brennweiten für roth und violett ganz gleich sind, sie es doch nicht für die übrigen Farben sind. Es treten deshalb secundäre Farbensäume auf, zu deren Fortschaffung es noch einer oder mehrerer Linsen bedarf. Meist begnügt man sich indess mit einer Combination zweier Linsen [1]).

Drittes Kapitel.

Absorption und Emission des Lichtes und die sie begleitenden Erscheinungen.

§. 39.

Absorption des Lichtes in festen und flüssigen Körpern. In dem vorigen Kapitel haben wir zwei Gruppen von Erscheinungen betrachtet, welche bei der gestörten Fortpflanzung des Lichtes sich darbieten, und die vorzugsweise in einer Aenderung der Fortpflanzungsrichtung und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes bestanden. Bei den Reflexionserscheinungen nahmen wir an, dass das Licht von der Oberfläche der Körper zurückgeworfen werde, und bei der Brechung, dass das durch die erste Fläche in ein begrenztes Mittel eindringende Licht an der zweiten Fläche das Mittel wieder vollständig verlasse, wenn auch nicht, wie bei den Prismen, alles nach derselben Richtung. Oder nach der Wellentheorie zu sprechen: wir betrachteten bei der Reflexion nur die von der Grenzfläche in das erste Mittel zurückkehrenden Wellen und nahmen bei der Brechung an, dass die in das zweite Mittel übergegangene Wellenbewegung sich ungehindert durch das zweite Mittel fortpflanze.

---

1) Vollständigere Behandlung der Brechung in centrirten Systemen kugelförmiger Flächen siehe:

Gauss, Dioptrische Untersuchungen in den Abhandlungen der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Thl. I. 1841.

Bessel, Ueber die Grundformeln der Dioptrik in Schuhmacher Astronom. Nachrichten. Bd. 18. No. 415. Febr. 1841.

Möbius, Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik. Bd. V. 1830.

Ausser der regelmässigen Reflexion erwähnten wir damals bereits eine andere Art der Zurückwerfung, die unregelmässige oder zerstreuende, welche von der regelmässigen sich zunächst dadurch unterschied, dass wir durch sie nicht Bilder der den Körper beleuchtenden Lichtquelle erhielten, sondern den Körper selbst wahrnehmen konnten. Den Grund dieser Thatsache erkennen wir leicht eben in der Unregelmässigkeit der Zurückwerfung. Auch die glatteste Oberfläche eines Körpers ist keine Ebene, bei keiner sind alle Flächenelemente gleich gerichtet, wenn auch, je glatter eine Oberfläche ist, um so mehr Flächenelemente mit der als geometrische Begrenzung des Körpers betrachteten Fläche zusammenfallen.

Von den nicht mit der geometrischen Grenzfläche zusammenfallenden Flächenelementen wird nun auch das Licht nach andern Richtungen zurückgeworfen, und da die Einfallslothe dieser unregelmässig geordneten Elemente alle möglichen Richtungen haben können, so wird das Licht von diesen auch nach allen möglichen Richtungen zurückgeworfen. Diese nach allen möglichen Richtungen zurückgeworfenen Strahlen convergiren nun nicht nach denselben Punkten, nach welchen die regelmässig zurückgeworfenen Strahlen convergiren, sondern nach den verschiedenen Elementen der Fläche selbst, und da wir den Convergenzpunkt eines unser Auge treffenden Strahlenkegels als den Ausgangspunkt der Lichtstrahlen ansehen, scheinen uns die Oberflächen der Körper selbst das Licht auszusenden. Die sämmtlichen von den einzelnen Punkten der Fläche ausgehenden Strahlenkegel bewirken daher ebenso, dass wir den Körper selbst sehen, wie wir in den Convergenzpunkten der regelmässig zurückgeworfenen Strahlen das Bild der Lichtquelle erhalten.

Dies ist auch der Grund, weshalb der Körper selbst um so weniger sichtbar ist, je mehr Licht er regelmässig zurückwirft, je mehr Flächenelemente mit der geometrischen Grenzfläche zusammenfallen.

Bei der Zerstreuung des Lichtes fällt uns aber sofort noch eine andere Thatsache auf, welche uns zwingt, doch einen Unterschied zwischen der unregelmässigen und regelmässigen Zerstreuung zu machen, es ist die Erscheinung, dass die verschiedenen Körper uns in immer anderer von der des auf sie fallenden Lichtes verschiedenen Farbe erscheinen.

Eine solche Aenderung der Farbe findet bei der regelmässigen Reflexion nicht statt, oder doch nur in so unbedeutendem Maasse, dass wir die Farbe der reflectirten Strahlen als merklich gleich derjenigen des auffallenden Lichtes ansehen können; die durch die diffus zurückgeworfenen Strahlen dagegen sichtbaren Körper erscheinen in weissen Lichte farbig und im einfarbigen Lichte hell oder dunkel; nur wenige Körper gibt es, welche im weissen Lichte weiss und in jedem farbigen Lichte hell in der Farbe des Lichtes erscheinen.

Die diffuse Reflexion ändert jedoch die Farbe des Lichtes nicht in der Art, dass sie Licht bestimmter Farbe in anderer Farbe zurückwirft, sie ändert sie nur insoweit, dass sie nicht alles Licht, welches den Körper trifft, wieder zurücksendet. Man überzeugt sich davon schon dadurch, dass ein

Körper nur farbig erscheint, wenn er von weissem Lichte getroffen wird, dass er aber im einfarbigen hell erscheint, wenn das ihn treffende Licht mit ihm gleichgefärbt ist, dagegen dunkel oder schwarz, wenn das Licht eine andere Farbe besitzt. Ein sehr einfacher Versuch liefert dafür einen überzeugenden Beweis. Wirft man das durch ein Prisma erzeugte Spectrum direkt auf einen farbigen Körper, so erscheinen diejenigen Farben, welche die im weissen Licht sichtbare Farbe des Körpers zusammensetzen, hell und glänzend, während die Theile des Spectrums, denen keine Farbe in der des Körpers entspricht, dunkel sind; auf hochrothem Papier erscheinen meist die blauen und violetten Theile des Spectrums dunkel, auf mit Ultramarin gefärbtem dagegen die rothen und gelben.

Diejenigen Strahlen, welche die dunkel bleibenden Partieen des Spectrums ausmachen, werden offenbar nicht zurückgeworfen, sie werden vom Körper absorbirt; die Farbe, in welcher er im weissen Lichte erscheint, ist daher die aus den übrigbleibenden zusammengesetzte.

Es gibt keinen Körper, welcher gar keine der auf ihn fallenden Farben zurücksendet, ein solcher Körper würde vollkommen schwarz erscheinen, so wie es auch wohl keinen Körper gibt, der alle farbigen Strahlen ohne Schwächung oder alle gleichmässig geschwächt zurückstrahlt; ein solcher Körper würde vollkommen weiss sein.

Die Absorption erstreckt sich somit auf alle Strahlen, aber auf alle Strahlen in verschiedener Stärke; diejenigen, welche am stärksten absorbirt werden, fehlen in dem von den Körpern zurückgegebenen Lichte, die Körper erscheinen daher in der dieser fehlenden complementären Farbe.

Die Farbe der Körper ist daher in den seltensten Fällen eine homogene, sondern fast immer eine Mischfarbe, indem, soweit die Erfahrung reicht, kein Körper Licht nur einer Wellenlänge reflectirt. Ausser durch den soeben erwähnten Versuch kann man sich davon überzeugen, wenn man einen schmalen Streifen eines Körpers durch ein Prisma betrachtet, dessen brechende Kante mit der Längsrichtung des Streifens parallel ist. Der Streifen erscheint dann immer verbreitert und als ein theilweises Spectrum.

Nach der Erklärung der Reflexion in der Wellenlehre muss diese Erscheinung zunächst sehr auffallend und fast mit den Principien derselben im Widerspruch erscheinen. Denn wir sahen, dass nothwendiger Weise jede an der Grenze zweier Mittel ankommende Wellenbewegung, wenn die Mittel verschiedene Dichtigkeit oder Elasticität besitzen, zu zwei Wellenbewegungen Anlass ist, von denen die eine in das zweite Mittel übergeht, die andere in das erste Mittel zurückkehrt. Wenn demnach im weissen Lichte ein ganzes System verschiedener Wellen an der Oberfläche eines Körpers ankommt, so muss jede der ankommenden Wellen auch zu einer reflectirten Anlass geben. Indess fällt diese Schwierigkeit fort, wenn wir annehmen, dass die Reflexion nicht nur an der Grenzfläche auftritt, sondern dass im zerstreuten Lichte auch solche Strahlen in das erste Mittel zurückkehren, welche an tiefern Schichten

im Innern des Körpers reflectirt werden, welche also eine Schicht des Körpers durchlaufen haben.

An dem Lichte nämlich, welches durch durchsichtige Körper hindurchgegangen ist, nehmen wir etwas ganz ähnliches wahr, auch von diesem wird im Innern der Körper immer ein Antheil des Lichtes absorbirt, und die meisten absorbiren das verschieden farbige Licht in verschiedenem Maasse und erscheinen dadurch gefärbt.

Man kann die Absorption des Lichtes beim Durchtritt durch farbige Substanzen sehr gut an mit Kobalt gefärbtem blauen Glase untersuchen. Wird ein Glas mit nur wenig Kobalt gefärbt, so ist es bei der Dicke einer gewöhnlichen Fensterscheibe noch fast ungefärbt und weiss. Bringt man ein solches Glas vor den Spalt im Fensterladen eines dunkeln Zimmers und untersucht das durchgelassene Licht mit dem Prisma, so treten in dem Spectrum noch alle Farben auf, wenn auch schwächer an Intensität als in dem direkt von den Strahlen entworfenen Spectrum. Nimmt man aber immer dickere Platten, so wird das durchtretende Licht, hauptsächlich aber die mittlern Theile des Spectrums mehr und mehr geschwächt, und bei hinreichend dicker Platte besteht das Spectrum aus zwei durch einen ganz dunkeln Raum getrennten Theilen, einem schwächern rothen und einem breitern und hellern blauen Streifen.

Die gelben und grünen Strahlen werden daher beim Durchtritte durch das Glas stärker geschwächt als die blauen und rothen, daher rührt die blauviolette Färbung des durch ein solches Glas gegangenen Lichtes. Aehnliches gilt von allen durchsichtigen Körpern; alle schwächen das Licht und alle schwächen das verschieden gefärbte Licht in verschiedenem Maasse.

Bei hinreichender Dicke färben sie daher alle das durch sie hindurchtretende Licht, es fehlt in dem davon entworfenen Spectrum ein Theil. Selbst reines destillirtes Wasser färbt bei einer Dicke der Schicht von zwei Metern nach den Versuchen von Bunsen[1]) das Licht schwach blau.

Wie das farbig zurückgeworfene Licht, so ist auch das durchgelassene Licht niemals homogen, keine Substanz erstreckt also die Absorption auf alle Farben ausser einer; das durchgelassene Licht ist also stets eine Mischfarbe, wenn auch sein Ansehen sich dem einer spectralen Farbe fast ganz gleich stellt. Es gibt jedoch einige, welche fast homogenes Licht liefern, so rothes mit Kupfer gefärbtes Glas.

Wenn auch die Absorption stetig mit der Dicke des absorbirenden Mittels zunimmt, so kann doch Licht, welches eine Schicht von ziemlich homogener Farbe durchdrungen hat, viel mächtigere Schichten derselben Substanz ohne merkliche Schwächung durchlaufen. Wenn dagegen Licht, welches ein Mittel durchlaufen hat, auf ein zweites trifft, welches vorzugsweise anderes Licht durchlässt, so wird es sehr viel stärker geschwächt. Es ist eine bekannte Erfahrung, dass eine Combination eines rothen und grünen Glases fast gar

1) *Bunsen,* Liebig's Annalen. Bd. LXII.

kein Licht durchlässt, während jedes einzelne derselben das Licht nur sehr wenig schwächt.

Mit Hülfe dieser Erfahrungen über die Absorption beim Durchgange des Lichtes durch durchsichtige Körper erklären sich die Farben der Körper im reflectirten Lichte unmittelbar durch die Annahme, dass im zerstreuten Licht nicht nur von der Oberfläche, sondern auch aus einer gewissen Tiefe Licht zurückkehrt; dieses hat eine Schicht des Körpers zweimal durchlaufen, und in dieser sind die fehlenden Farben zurückgehalten worden. Die regelmässige Reflexion findet nur oder doch hauptsächlich an der Oberfläche statt, indem eine Glättung des Körpers nur die oberflächlichen Elemente beeinflussen kann, während die mehr im Innern liegenden Elemente alle möglichen Lagen besitzen. Die Reflexion der zerstreuten Strahlen findet dagegen vorwiegend an den Elementen des Körpers statt, welche unter der Oberfläche liegen, deshalb bei ihnen die Färbung, welche bei der regelmässigen Reflexion fehlt.

Die Annahme einer Reflexion im Innern der Körper widerspricht nicht dem in den Principien der Wellenbewegung (§. 127 I.) bewiesenen Satze, dass eine Reflexion im Innern eines und desselben Mittels nicht eintreten kann. Denn die Reflexion des Lichtes findet auch an den Elementen des Körpers statt, während die Wellenbewegung des Lichtes in den diese umlagernden Aethermolekülen ihren Sitz hat. Die Körpertheile verhalten sich daher der Wellenbewegung des Lichtes gegenüber wie ein anderes Mittel, und es können im Innern des Körpers ebenso gut Reflexionen stattfinden wie an der Oberfläche.

Die Erklärung der Farben der Körper setzt eine gewisse Durchsichtigkeit derselben voraus, eine Voraussetzung, welche ebenfalls mit unseren Erfahrungen im Einklang ist, nach denen auch die dichtesten Körper in hinreichend dünnen Schichten durchsichtig werden. Bei totalen Reflexionen kann daher eine Färbung nicht auftreten, es kann dann nur die Farbe der Beleuchtung reflectirt werden und der Körper heisst dann weiss. Diese totale Reflexion tritt nur ein, wenn das Licht aus einem dichtern durchsichtigen Mittel an der Grenze eines dünnern ankommt; soll sie nach allen Richtungen geschehen, so müssen beide Medien häufig mit einander abwechseln. Weisse Körper sind daher innige Gemenge von zwei durchsichtigen Mitteln, welche recht verschieden das Licht brechen. So bildet Luft und Wasser innig gemengt Schaum und Wolken, Luft und Eis den blendend weissen Schnee. Dagegen wird der undurchsichtige weisse Hydrophan im Wasser durchsichtig und farblos, weil die Poren desselben anstatt mit Luft mit Wasser angefüllt werden, das mit der Substanz des Hydrophanes gleiches Brechungsvermögen besitzt [1]).

Nach dem Vorigen wird das Licht nur im Innern der Körper zurückgehalten; da nun bei dem Durchstrahlen eines Körpers das Licht um so mehr geschwächt wird, je dicker die Schicht ist, so fragt es sich, nach welchem

1) *Dove,* Farbenlehre. p. 153. Berlin 1853.

Gesetze die Schwächung des Lichtes erfolgt, wenn die durchstrahlte Schicht ihre Dicke ändert. Die einfachste und naturgemässeste Annahme dafür ist die, dass Schichten gleicher Dicke unter denselben Umständen immer den gleichen Bruchtheil des sie treffenden Lichtes verschlucken [1]). Diese Annahme ist die gleiche mit derjenigen, dass ein und derselbe Körper unter denselben Umständen von einer ihn treffenden Lichtmenge eine der Intensität des Lichtes proportionale Menge absorbire, dass also, wenn man mit J die Menge des einfallenden, mit J' die Menge des absorbirten Lichtes bezeichnet, allgemein

$$\frac{J'}{J} = A$$

gleich einer constanten Grösse sei. Diese Annahme ist mehrfach durch photometrische Messungen geprüft und durch die Messungen Bunsen's [2]) und E. Becquerel's [3]) auf das ausreichendste bestätigt worden.

Fällt nun auf die Grenzfläche eines Körpers eine Lichtmenge M einer bestimmten Farbe, so wird in einer Schicht dieses Körpers von der Dicke 1 eine bestimmte Quantität zurückgehalten; ist x ein echter Bruch, so wird daher aus dieser Schicht die Lichtmenge $M \cdot x$ an der andern Seite hervortreten, und die Vorderfläche der zweiten Schicht des Körpers treffen. In der zweiten Schicht wird dann von der sie treffenden Lichtmenge derselbe Bruchtheil zurückgehalten, in dieser wird also die Lichtmenge Mx auf $x \cdot Mx = Mx^2$ geschwächt. In der dritten Schicht von der Dicke 1 wird dann die ihre Vorderfläche treffende Lichtmenge Mx^2 in demselben Verhältnisse geschwächt, sie wird $Mx^2 \cdot x = Mx^3$. Besitzt der Körper n Schichten von der Dicke 1, so wird hiernach die Intensität des ihn verlassenden Lichtes sein $M \cdot x^n$ und die Menge des absorbirten Lichtes $M\,(1 - x^n)$. Es ergibt sich demnach aus jener Annahme der Satz, dass die durch einen Körper hindurchdringende Lichtmenge in einer geometrischen Reihe abnimmt, wenn die Dicke des Körpers in arithmetischer Reihe zunimmt.

Die vorhin angeführten Erfahrungen über die Farben der Körper zeigen nun, dass die Grösse x, welche wir als den Schwächungscoefficienten des Lichtes bezeichnen wollen, abhängt von der Substanz des absorbirenden Körpers und von der Farbe des Lichtes. Für Licht einer und derselben Farbe hat x verschiedene Werthe je nach der Natur der absorbirenden Körper, für ein und denselben Körper je nach der Farbe des Lichtes. Wird daher ein Körper von einer gewissen Menge zusammengesetzten Lichtes getroffen, in welcher die Mengen $M_{,}$, $M_{,,}$, $M_{,,,}$ .... M_m verschiedener Lichtarten vorhanden sind, so wird das eine Schicht von der Dicke n verlassende Licht dargestellt sein durch die Summe

$$M_{,}x_{,}^{n} + M_{,,}x_{,,}^{n} + M_{,,,}x_{,,,}^{n} + \cdots\cdots M_m x_m^{n}.$$

---

1) *Herschel*, On Light. Art. 488.

2) *Bunsen* und *Roscoe*, Poggend. Annal. Bd. CI.

3) *E. Becquerel* nach Angabe Jamin's, Cours de physique. T. III. p. 443.

Die Farbe dieses Lichtes ist die aus der Zusammensetzung der einzelnen Bestandtheile resultirende.

Sind bei einem Körper die Werthe der verschiedenen x nur wenig von einander verschieden, so dass nahezu

$$x_{,} = x_{,,} = x_{,,,} \cdots\cdots = x_m,$$

so werden durch diesen Körper alle Farben nahezu gleich geschwächt; jene Summe geht über in

$$(M_{,} + M_{,,} + M_{,,,} + \cdots\cdots M_m)\, x^n,$$

es tritt durch die Absorption keine bemerkbare Aenderung der Farbe, sondern nur eine Schwächung des Lichtes im Verhältnisse $1 : x^n$ ein.

Diese Beziehung des Werthes von x stellt demnach die sogenannten farblosen oder weissen Körper dar, diejenigen, welche weisses Licht fast ungeändert durchlassen oder reflectiren. Ist der Körper sehr durchsichtig, so ist x sehr gross; je undurchsichtiger der Körper ist, um so kleiner wird x. Bis zu einem gewissen kleinen Werthe von x erscheint der Körper aber im weissen Lichte immer noch weiss; wird aber x noch kleiner, so erscheint der Körper grau und zwar um so dunkler, je kleiner x ist, bis schliesslich ein Körper, für welchen x einen unendlich kleinen Werth hat, vollkommen schwarz ist.

Mit wachsender Dicke der durchstrahlten Schichten werden nun alle durchsichtigen Körper farbig; es folgt das auch aus dem soeben abgeleiteten Satze, denn mit wachsendem n müssen die Werthe $x_{,}^n$, $x_{,,}^n$ ... immer verschiedener werden, wenn $x_{,}$, $x_{,,}$ ... nicht absolut gleich sind.

Die meisten Körper färben das Licht schon in dünnen Schichten, die Färbung des Lichtes wird aber im Allgemeinen um so reiner, das heisst weniger mit Weiss gemischt, je dicker die Schicht des durchstrahlten Körpers ist. Für diese Körper hat x je nach der Farbe der Körper einen merklich andern Werth, ohne dass jedoch für einige x sehr gross, für andere sehr klein ist. Das ist der Fall für diejenigen Körper, in welchen schon nach dem Durchtritt durch eine dünne Schicht die Färbung sehr rein wird, in denen dann bei Anwendung dickerer Schichten das Licht nur wenig mehr geschwächt wird als bei Anwendung dünner Schichten.

Einige absorbirende Mittel zeigen ein ganz eigenthümliches Verhalten, sie ändern die Farbe des weissen durch sie hindurchtretenden Lichtes verschieden, wenn das Licht durch verschieden dicke Schichten derselben hindurchtritt. Ein ausgezeichnetes Beispiel dieser Art bietet eine Lösung von Blattgrün in Alkohol. Lässt man das Licht durch eine dünne Schicht hindurchtreten, so wird es grün wie das von den Pflanzen reflectirte Licht, wendet man Schichten von grosser Dicke an, so wird das Licht tiefroth gefärbt.

Diese Thatsache ist mit Hülfe unseres Satzes leicht zu verstehen, sie beweist, dass der Werth von x verschiedene Maxima hat. Untersucht man das durch eine mässig dicke Schicht hindurchgelassene Licht prismatisch, so findet

man, dass dasselbe nur roth und grün enthält, alle andern Farben sind ausgelöscht. Dieser Versuch zeigt, dass x nur für grün und roth merkliche Werthe hat. Nehmen wir nun an, dass x für roth bedeutend grösser ist als für grün, so erklären sich die Erscheinungen leicht. Im weissen Licht ist nämlich nach Fraunhofer's Messungen die Intensität des grünen viel grösser als die des rothen Lichtes. So lange daher eine Schicht, welche nur grün und roth durchlässt, nur dünn ist, wird in dem durchgelassenen Licht, wenn x für grün nicht in demselben Verhältniss kleiner ist als für roth, in welchem das Roth im weissen Licht schwächer ist als im Grün, das Grün vorherrschen. Nimmt dann aber die Dicke der Schicht zu, so muss der Werth x^n für roth denjenigen für grün so stark überwiegen, dass das Roth vorherrscht und schliesslich bei hinreichend grossem n allein noch einen merkbaren Werth hat.

§. 40.

Absorption des Lichtes in Gasen. Während gefärbte Flüssigkeiten oder feste Körper die Intensität des Lichtes verschiedener Farben durch Absorption schwächen und dadurch im Spectrum des hindurchgegangenen Lichtes im Allgemeinen breitere dunkle Räume erzeugen, ist das Verhalten farbiger Gase dem Lichte gegenüber ein anderes und viel auffallenderes, welches eine Erklärung der Absorption sehr erschwert. Das Spectrum des durch eine Säule verschiedener Gase hindurchgegangenen Lichtes zeigt nämlich eine ganze Reihe schwarzer Streifen, welche den Fraunhofer'schen Linien äusserst ähnlich sind.

Brewster [1]) machte diese Beobachtung zuerst an gasförmiger salpetriger Säure. Wenn man das durch eine Schicht dieses Gases hindurchgegangene Licht der Sonne mit dem Prisma untersucht, so zeigen sich in dem Spectrum gegen 2000 schwarze Linien ganz nach Art der Fraunhofer'schen, nur zum Theil schärfer und breiter. Die Streifen sind, obwohl das Gas nur ganz schwach orange gefärbt ist, über das ganze Spectrum vertheilt, sie zeigen sich jedoch häufiger im grünen und blauen Theile als im rothen und gelben.

Ganz ähnliche Beobachtungen machten Daniell und Miller [2]) mit gewöhnlichem Lampenlichte, welches prismatisch analysirt keine dunklen Streifen nach Art der von Fraunhofer im Sonnenspectrum bestimmten darbietet.

Bei ihren Versuchen liessen die beiden Physiker das Licht einer Gaslampe, nachdem es durch die mit dem zu untersuchenden Gase gefüllte Flasche hindurchgegangen war, mittels Dazwischensetzung einer als Cylinderlinse wirkenden mit Wasser gefüllten Glasröhre in eine Brennlinie convergiren. Die so erhaltene Lichtlinie wurde dann nach der Fraunhofer'schen Methode (§. 22) prismatisch untersucht.

Wenn die Luft in der Flasche ein wenig mit Bromdampf gefärbt war,

---

1) *Brewster*, Poggend. Annal. Bd. XXVIII.
2) *Miller*, Poggend. Annal. Bd. XXVIII.

so zeigte sich das ganze Spectrum unterbrochen durch wahrscheinlich mehr als hundert Linien in gleichem Abstande; als der Dampf dichter wurde, verschwand das blaue Ende des Spectrums und in dem rothen Ende wurden die Linien stärker.

Joddampf erzeugt ähnliche Linien als der Bromdampf, mit dem Unterschiede jedoch, dass, wenn die Dichtigkeit des Dampfes nicht sehr gross ist, in dem violetten Theile sich keine dunklen Streifen zeigen.

Ebenso erzeugt der Dampf von Chromoxychlorid eine grosse Anzahl ähnlich liegender Linien [1]).

Eine ausgedehntere Untersuchung über die durch die Absorption in Gasen auftretenden festen Linien nahm später W. A. Miller vor [2]). Er verglich die Spectra von diffusem Tageslicht mit denjenigen, welche er erhielt, nachdem das Licht durch die entsprechenden Gase hindurchgegangen war. Die von ihm erhaltenen Resultate lassen sich folgendermassen zusammenfassen.

1) Die Linien treten nur bei Anwendung farbiger Gase auf, niemals bei denen farbloser; bei farbigen Gasen jedoch auch nicht immer; so erzeugt Chlor keine Linien. Selbst Dämpfe ganz gleicher Farbe verhalten sich verschieden. So gibt Bromdampf eine grosse Zahl von Linien, der ganz gleich gefärbte Dampf von Wolframchlorid dagegen gar keine.

2) Einfache und zusammengesetzte Gase oder Dämpfe können Linien geben; zwei einfache Gase, welche keine Linien geben, können zusammengesetzt welche erzeugen, Sauerstoff, Stickstoff, Chlor geben keine Linien, aber mehrere Oxyde sowohl vom Stickstoff als vom Chlor zeigen sie sehr auffallend. Andererseits geben einfache Körper Linien, ihre Verbindungen dagegen nicht immer. So erzeugt Jod eine Reihe von Linien, dagegen liefert Jodwasserstoffsäure sie nicht. Zuweilen erscheinen die Linien in gleicher Zahl und gleicher Lage bei verschiedenen Oxydationsstufen derselben Substanz, so bei chloriger Säure und Unterchlorsäure.

3) Die Linien nehmen an Zahl zu bei Verlängerung der durchstrahlten Gasschicht oder bei vermehrter Dichtigkeit derselben.

Letztere Erfahrung war früher schon von Brewster bei den Dämpfen der Untersalpetersäure (NO_2) gemacht, der ausserdem noch die merkwürdige Beobachtung machte, dass eine Erwärmung des Gases auf die Zahl der auftretenden Linien den merkwürdigsten Einfluss hat. Er fand [3]), dass es schwierig sei, eine Gasschicht von solcher Dicke zu erhalten, dass die Linien am rothen Ende des Spectrums auftraten, aber durch Erwärmung einer nicht ein Centimeter dicken Schicht erhielt er die Linien ganz deutlich. Ja bei weiterm Erwärmen wurde das Gas blutroth und schliesslich, ohne dass es zersetzt wurde,

1) *Miller*, Poggend. Annal. Bd. XXXII.
2) *W. A. Miller*, Poggend. Annal. Bd. LXIX.
3) *Brewster*, Poggend. Annal. Bd. XXXVIII.

ganz schwarz, so dass es auch nicht einen Strahl der hellsten Sommersonne durchliess.

Der erste der von Miller aufgestellten Sätze muss jedoch nach den neuern Versuchen von Janssen[1]) und Morren[2]) modificirt werden. Morren ist es gelungen zu zeigen, dass wenn man Sonnenstrahlen durch eine zwei Meter lange mit Chlor gefüllte Röhre hindurchgehen lässt, in dem Spectrum eine Reihe von neuen dunklen Linien auftreten, welche sich zwischen den auf dem Kirchhoff'schen Spectrum, man sehe Tafel III, mit 1800 und 2110 bezeichneten Linien befinden.

Janssen hat den Nachweis geliefert, dass der farblos durchsichtige Wasserdampf im Spectrum ebenfalls solche dunkle Linien erzeugt. Er liess das Licht einer hell leuchtenden Gasflamme, welche direkt betrachtet ein ganz continuirliches Spectrum liefert, durch eine 37 Meter lange mit farblos durchsichtigem Wasserdampf gefüllte Röhre hindurchgehen, und fand dann in demselben besonders im Roth und Orange eine ganze Anzahl neuer Linien. In einer andern Weise hat Secchi[3]) schon vor Janssen denselben Nachweis dadurch geführt, dass er in dem Spectrum einer weit entfernten Gasflamme eben dieselben dunklen Linien fand.

Dass die farblosen Gase solche Linien erzeugen können, folgt schon aus dem vom Brewster zuerst gelieferten Nachweise, dass wenigstens ein Theil der Fraunhofer'schen Linien seinen Ursprung in unserer Atmosphäre hat[4]). Brewster constatirte nämlich, dass die Zahl der in dem Sonnenspectrum vorhandenen dunklen Linien grösser wird, wenn die Sonnenstrahlen eine dickere Schicht der Atmosphäre durchlaufen haben; er beobachtete, dass des Morgens bei Sonnenaufgang oder des Abends bei Sonnenuntergang die Zahl der Linien grösser war als gegen Mittag, und allgemein im Winter grösser als im Sommer. Durch die Beobachtungen von Janssen[5]), Secchi[6]) und Cooke[7]) ist diese Erfahrung von Brewster auf das unzweifelhafteste bestätigt und zugleich gezeigt worden, dass hauptsächlich der Wasserdampf es ist, welcher als absorbirendes Gas in der Atmosphäre vorhanden ist, indem sich ein inniger Zusammenhang der Linienanzahl und des Wassergehalts der Atmosphäre erkennen liess. Besonders im Rothen und Gelben war die Anzahl der Linien gross, wenn die Luft mit Wasserdampf gesättigt war. Dass indess nicht nur der Wasserdampf in der Atmosphäre solche Linien erzeugt, ergibt sich aus

---

1) *Janssen*, Comptes Rendus. T. LXIII. p. 289.

2) *Morren*, Comptes Rendus. T. LXVIII. p. 376. Poggend. Annal. Bd. CXXXVII.

3) *Secchi*, Comptes Rendus. T. LVII. Archive des sciences physiques de Genève. XXVIII. 1866.

4) *Brewster*, Poggend. Annal. XXXVIII. *Brewster* u. *Gladstone*, Philosophical Transactions for 1860.

5) *Janssen*, Comptes Rendus. LX. p. 213. Poggend. Annal. CXXVI.

6) *Secchi*, Comptes Rendus. Bd. LX. p. 379. Poggend. Annal. Bd. CXXVI.

7) *Cooke*, Poggend. Annal. Bd. CXXVIII.

den Beobachtungen Ångströms[1]), der das Spectrum des Sonnenlichtes bei — 24° untersuchte. Alle zwischen den Fraunhofer'schen Linien *A* und *D* liegenden von den andern Beobachtern und ihm selbst als Wasserlinien erkannten verschwanden, deutlich waren aber die Fraunhofer'schen Linien *A* und *B* noch als atmosphärische zu erkennen, da ihre Dunkelheit wesentlich von dem Stande der Sonne bedingt war. Letzterer Umstand ist für die durch die Atmosphäre erzeugten dunklen Linien charakteristisch, und die Constanz anderer Linien, wie die der Doppellinie *D*, *F* u. a., beweist, dass deren Ursache ausserhalb der Atmosphäre gesucht werden muss. Der nächste §. wird uns die Quelle dieser Linien kennen lehren.

Aus diesen Erfahrungen über die absorbirende Wirkung der in unserer Atmosphäre vorhandenen farblosen Gase werden wir den Schluss zu ziehen geneigt sein, dass alle Gase, wenn man sie in hinreichend dicken Schichten als absorbirende Medien benutzt, ähnliche dunkle Linien liefern, ein Schluss, dessen Berechtigung die Untersuchung der Emissionsverhältnisse der Gase beweisen wird.

Das Auftreten neuer dunkler den Fraunhofer'schen ähnlicher Linien im Sonnenspectrum zeigt sich nur, wenn das Licht durch Gase hindurchgetreten ist; bei festen und flüssigen Körpern erstreckt sich die Absorption stets auf ausgedehntere Strecken des Spectrums; es gibt davon nur zwei Ausnahmen: die eine bildet das oxalsaure Chromoxydkali. Bei geringer Dicke lässt das Salz nur rothes Licht durch; mit dem Prisma untersucht zeigt sich aber in der Mitte des rothen, zwischen den Linien *A* und *B*, etwa $^1/_6$ des Intervalls mehr nach *B* hin eine scharf begrenzte dunkle Linie[2]). Die andere Ausnahme bilden die Salze des Didym, Erbium und Terbium, welche in fester Form, wie auch in Lösung ausgezeichnete Absorptionslinien zeigen[3]).

§. 41.

Absorption des Lichtes in farbigen Flammen. Noch viel auffallender als die Absorption des Lichtes in Gasen bei gewöhnlicher Temperatur ist auf den ersten Blick die Absorption desselben in glühenden Gasen, in Flammen. Die sämmtlichen Flammen, die wir herstellen können, und sämmtliche Gase, wenn sie bis zum Glühen erhitzt werden, liefern ein anderes Spectrum als die Sonne, und sehr viele sind gerade dadurch charakterisirt, dass ihr Spectrum nur aus einer Anzahl bestimmter heller Linien besteht. Wir werden diese Emissionsverhältnisse in den nächsten §§. näher untersuchen. Wir erwähnen hier nur beispielsweise, dass eine sonst nicht leuchtende Flamme einer Alkohollampe oder eines Bunsen'schen Gasbrenners, wenn man in dieselbe eine Perle von Kochsalz hält, sich gelb färbt, und dass das

1) *Ångström*, Comptes Rendus LXIII.
2) *Brewster*, Poggend. Annal. Bd. XXVIII.
3) *Bunsen*, Poggend. Annal. Bd. CXXVIII. Liebig Annal. Bd. CXXXI.

Spectrum derselben fast nur eine gelbe Doppellinie zeigt, welche genau der dunklen Doppellinie *D* im Sonnenspectrum entspricht. Um eine solche Flamme zu untersuchen, stellt man dieselbe so auf, dass ihr Saum sich gerade vor dem Spalt des Spectrometers befindet, und bringt dann nahe unter dem Spalt in den Saum der Flamme eine an eine Platinöse angeschmolzene Perle des Salzes. Wendet man anstatt des Natronsalzes ein anderes an, z. B. ein Lithionsalz, so nimmt die Flamme eine rothe Farbe an, und das Spectrum derselben ist eine scharf begrenzte, sehr helle rothe, zwischen *B* und *C* gelegene Linie.

Lässt man nun durch eine Flamme, in welcher mittels eines Metalles, z. B. Natrium, die charakteristische Färbung hervorgebracht ist, Licht hindurchgehen, welches Strahlen derselben Farbe enthält, so fand Kirchhoff[1]), dass von der mit Natrium gefärbten Flamme gerade die Strahlen der gleichen Farbe absorbirt werden. Das Spectrum des Drummond'schen Lichtes, eines im Knallgase glühenden Kalkcylinders, enthält in der Regel die beiden hellen Natriumlinien, wenn die leuchtende Stelle des Kalkcylinders noch nicht lange der Glühhitze ausgesetzt war; bleibt der Kalkcylinder unverrückt, so werden diese Linien schwächer, verschwinden endlich ganz und das Spectrum erscheint continuirlich. Sind sie verschwunden oder nur schwach hervortretend, so bewirkt eine mit Kochsalz versehene Alkoholflamme, welche zwischen den Kalkcylinder und den Spalt gestellt ist, dass an ihrer Stelle zwei dunkle Linien von ausgezeichneter Schärfe und Feinheit sich zeigen, die in jeder Hinsicht den Linien *D* des Sonnenspectrums entsprechen.

---

1) *Kirchhoff,* Poggend. Annal. Bd. CIX. Vielfach, besonders in französischen Werken wird Foucault als der erste Entdecker dieser Erscheinung angegeben. Foucault hat allerdings eine Beobachtung gemacht, welche ihn auf die Entdeckung Kirchhoff's hätte führen können; er fand nämlich, dass in dem Spectrum des elektrischen zwischen Kohlenspitzen erzeugten Lichtbogens sich gewöhnlich die oben als der Natronflamme eigenthümliche helle Doppellinie findet, welche genau an der Stelle der Linie *D* des Sonnenspectrums liegt. Liess er nun ein Bündel Sonnenstrahlen durch den Lichtbogen hindurchgehen, so zeigten sich in dem Spectrum derselben die Linien *D* nicht hell, sondern dunkel, und zwar viel dunkler, als wenn man das Sonnenlicht direkt mit dem Prisma untersuchte. Ebenso fand er, dass das Licht weissglühender Kohle durch den Lichtbogen betrachtet in seinem Spectrum die dunklen *D*-Linien in Folge der Absorption des Lichtes im Lichtbogen zeigte. Er hat indess diese Beobachtung nicht verfolgt und es versäumt, den Schluss daraus zu ziehen, den Kirchhoff zog, dass jede Lichtquelle gerade die Strahlen absorbire, die sie aussendet, im Gegentheil nach seinen eigenen Worten sah Foucault dies als eine Eigenthümlichkeit des Lichtbogens an, denn er sagt (ich citire nach Archives des sciences physiques et naturelles T. X. 1849. p. 223): „*Ainsi l'arc nous offre un milieu* qui émet pour son propre compte les rayons *D*, et qui, en même temps, les absorbe lorsque ces rayons viennent d'ailleurs.“ Darnach kann man nicht daran zweifeln, dass Foucault die Tragweite der Beobachtung nicht erkannte. Meines Wissens hat Foucault selbst, der erst 1868 starb, auch niemals diese Beobachtung der Kirchhoff'schen gegenüber benutzt, um für sich die Priorität der oben besprochenen Entdeckungen zu beanspruchen.

Die Alkoholflamme, welche selbst gelbes, den dunklen Linien D entsprechendes Licht aussendet, hat somit das von dem Kalkcylinder ausgehende Licht gleicher Wellenlänge absorbirt; und wegen der geringern Intensität des von der Alkoholflamme ausgesandten Lichtes erscheint die demselben entsprechende Stelle im Spectrum des Kalklichtes dunkel auf hellem Grunde.

Bringt man in die Flamme der Bunsen'schen Gaslampe Chlorlithium, so zeigt sich im Spectrum derselben eine sehr helle scharf begrenzte rothe Linie, die in der Mitte der Fraunhofer'schen Linien B und C liegt.

Lässt man nun Sonnenlicht von mässiger Intensität, durch einen engen Spalt, durch die Flamme auf den Spalt des Collimatorrohres eines Spectralapparates, etwa des Apparates Fig. 63 fallen, so sieht man an dem bezeichneten Ort die Linie hell auf dunklem Grunde; bei grösserer Stärke aber des Sonnenlichtes tritt an ihrer Stelle eine dunkle Linie auf, die ganz denselben Charakter hat, als die Fraunhofer'schen Linien.

Kirchhoff schloss aus diesen Beobachtungen, dass farbige Flammen, in deren Spectra helle, scharfe Linien vorkommen, Strahlen von der Farbe dieser Linien, wenn dieselben durch sie hindurchgehen, so schwächen, dass an Stelle der hellen Linien dunkle auftreten, sobald hinter der Flamme eine Lichtquelle von hinreichender Intensität angebracht wird, in deren Spectrum diese Linien sonst fehlen.

Später hat Kirchhoff[1]) dann durch theoretische Betrachtungen nachgewiesen, dass die soeben beschriebene Erscheinung nur ein specieller Fall

---

1) *Kirchhoff* a. a. O. p. 275. Ångström erhebt ebenfalls auf diesen von Kirchhoff bewiesenen Satz Ansprüche, und hält diesen Anspruch, trotz der Zurückweisung, welche ihm Kirchhoff schon Poggend. Annal. Bd. CXVIII. hat angedeihen lassen, in seiner neuesten Arbeit „Recherches sur le spectre solaire" Berlin bei Dümmler 1869 p. 39 aufrecht. Mit diesem Anspruche verhält es sich aber gerade so wie mit dem für Foucault erhobenen. Ångström hat aus einem von Euler in seiner Theoria lucis et caloris aufgestellten Satze, nach welchem in ähnlicher Weise wie bei der Resonanz die in einen Körper eindringenden Schwingungen die Moleküle desselben in Schwingungen versetzen, wenn sie dieselbe Periode haben, in welcher die Körpermoleküle zu schwingen geneigt sind, den Schluss gezogen, „dass der Körper im glühenden Zustande gerade alle die Lichtarten aussenden muss, welche er in gewöhnlicher Temperatur absorbirt." Dass dieser Satz ein ganz anderer ist als der Kirchhoff'sche liegt auf der Hand, denn Kirchhoff bezieht Absorption und Emission auf dieselbe Temperatur. Dass Ångström aber auch diesen Satz gar nicht in der Weise aufgefasst hat, wie er durch Kirchhoff als das Fundament der glänzendsten Entdeckung der neuern Zeit, als Fundament der Analyse der Gestirne aufgestellt ist, beweist der auf den angeführten folgende Satz von Ångström (Poggend. Annal. Bd. XCIV p. 144): „Die Prüfung der Richtigkeit dieses Satzes ist indess grossen Schwierigkeiten unterworfen, weil ein ins Glühen versetzter Körper unter ganz andern Elasticitätsverhältnissen auftritt, als unter welchen sein Absorptionsvermögen geprüft wurde." Hätte Ångström seine Ideen weiter verfolgt und die sechs Jahre früher von Foucault gemachte Beobachtung hinzugezogen, so hätte er vielleicht die Entdeckungen Kirchhoff's machen können; es ist aber unberechtigt, wenn er jetzt auf Grund der angeführten Sätze einen solchen Anspruch erhebt.

eines ganz allgemeinen Gesetzes ist. Dieses Gesetz spricht er dahin aus, dass das Verhältniss zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen für Licht für alle Körper bei ein und derselben Temperatur dasselbe sei. Unter Emissionsvermögen versteht er dann die Intensität der von den Körpern ausgesandten Strahlen irgend einer Gattung oder Farbe, und unter Absorptionsvermögen das Verhältniss der Intensität der absorbirten Strahlen zur Intensität der den Körper treffenden Strahlen ebenderselben Gattung. Für dieses Verhältniss findet Kirchhoff dann einen bestimmten Werth, welcher nur abhängig ist von der Temperatur des Körpers und der Wellenlänge des den Körper treffenden Lichtes. Wir können diesen Werth leicht auf folgende Weise erhalten.

Nennen wir einen vollkommen schwarzen Körper einen solchen, welcher Licht weder zurückwerfen noch durchlassen kann, so wird ein solcher stets alles ihn treffende Licht absorbiren, sein Absorptionsvermögen, welches mit a bezeichnet werden mag, ist also für alle Temperaturen und für Licht aller Farben dasselbe und zwar gleich 1. Denken wir uns nun eine Kugel eines solchen Körpers, so wird diese bei einer bestimmten Temperatur eine bestimmte Menge Licht einer bestimmten Farbe aussenden. Dieselbe sei gleich e. Denken wir uns nun eine eben solche Kugel irgend eines bestimmten andern Körpers, so wird dieser bei derselben Temperatur eine andere Menge Licht derselben Farbe ausstrahlen. Die letztere sei gleich E. Die beiden Grössen e und E sind dann das Emissionsvermögen des ganz schwarzen und des beliebigen andern Körpers.

Wenn nun der letzte Körper von allen Seiten von Strahlen derselben Gattung und der Intensität J getroffen wird, so wird er von diesen die Intensität J' absorbiren. Das Verhältniss

$$\frac{J'}{J} = A$$

ist nun die als Absorptionsvermögen bezeichnete Grösse.

Nach dem erwähnten Kirchhoff'schen Satze ist nun das Verhältniss des Emissionsvermögens und Absorptionsvermögens für alle Körper dasselbe, also auch für schwarze und nicht schwarze, somit ist

$$\frac{E}{A} = \frac{e}{a} = e.$$

Es folgt somit, dass das Absorptionsvermögen irgend eines Körpers für eine bestimmte Farbe bei bestimmter Temperatur sich zu dem eines vollkommen schwarzen Körpers verhält, wie die Intensität des von diesem Körper bei derselben Temperatur ausgesandten Lichtes der gleichen Wellenlänge zur Intensität des von dem vollkommen schwarzen Körper unter den gleichen Verhältnissen ausgesandten Lichtes.

Schreiben wir obige Gleichung

$$A = \frac{E}{e}; \quad E = A \cdot e,$$

so sieht man, wie Absorptionsvermögen und Emissionsvermögen einander proportional sind.

Die Grösse e ist die Intensität des bei der betrachteten Temperatur von dem vollkommen schwarzen Körper ausgesandten Lichtes der in Rede stehenden Wellenlänge; sie ist somit nur abhängig von der Temperatur und der Wellenlänge der Strahlen.

Den Beweis dieses Satzes können wir allerdings erst in der Wärmelehre führen[1]), indess wird es doch gut sein, die Begründung desselben aus dem Vorgange der Emission und Absorption, wie sie Stokes[2]) gegeben hat, hier mitzutheilen.

Die Aussendung des Lichtes hat jedenfalls in einer periodischen Bewegung der Körpermoleküle ihren Grund, welche sich dem umgebenden Aether mittheilt; die Aussendung einer bestimmten Lichtqualität beweist daher, dass die Moleküle der Flamme in einer bestimmt periodischen Bewegung schwingen. Glühender Natrondampf, welcher gelbes der Linie D entsprechendes Licht aussendet, wird daher eine ebensolche periodisch schwingende Bewegung haben, seine Theilchen werden eine der des Aethers im gelben Lichte gleiche Oscillationsdauer haben. Die Theilchen des mit rothem Lichte leuchtenden Lithiumdampfes werden dagegen eine dem rothen Lichte gleiche Oscillationsdauer haben. Wenn nun in eine solche Flamme Licht eindringt, dessen Schwingungsdauer ganz dieselbe ist als die der Moleküle der Flamme, dessen Intensität aber grösser ist als die des von der Flamme erzeugten, so wird die Bewegung des eindringenden Lichtes sich mit derjenigen des in der Flamme enthaltenen Aethers zusammensetzen. Die Bewegung des Aethers wird dann, da derselbe in der Flamme jedenfalls in allen Phasen der Bewegung ist, durch Interferenz theils geschwächt, theils an den Stellen, wo die in der Flamme vorhandene und ankommende Bewegung gleicher Phase ist, verstärkt. Es wird daher in Folge dieser Interferenz in der Flamme weder eine Stärkung noch eine Schwächung des Lichtes eintreten, es würde, wenn keine andern Umstände hinzuträten, die Summe des in die Flamme eindringenden und des von der Flamme erzeugten Lichtes die Flamme verlassen. Nun aber wird an den Stellen, wo in Folge der gleichen Phase der ankommenden Bewegung die Bewegung des Aethers verstärkt wird, diese Bewegung auch ganz gleicher Phase mit dem an der Stelle vorhandenen Körpermoleküle sein, dessen Bewegung an dieser Stelle Ursache der in der Flamme erregten Lichtbewegung war. Da nun die neben einander liegenden Aether und Körpermoleküle sich zugleich und nach gleicher Richtung bewegen, das Aethermolekül in Folge seiner, der grössern Intensität des eindringenden Lichtes entsprechenden Be-

1) Man sehe im 3. Theil: Verhältniss zwischen Absorption und Emission der Wärme.

2) Nach einer Bemerkung von Thomson in Annales de chim. et de phys. III. S. T. LXII. p. 191. Nachtrag zu Kirchhoff's Abhandlung.

wegung aber rascher, so werden die Moleküle an einander stossen und dadurch das Aethermolekül an Bewegung verlieren. Da nun die Perioden der Bewegung ganz gleich sind, so wird sich bei jeder Schwingung der Stoss wiederholen und so das Aethertheilchen von seiner Geschwindigkeit immer mehr verlieren. Dieser Verlust geht dann an das Körpermolekül über, und erhöht, wie in der Wärmelehre gezeigt wird, die Temperatur der Flamme; indess wird diese Temperaturerhöhung je nach dem Verhältniss der Massen der Moleküle des Aethers und des Körpers sehr unbedeutend sein.

Der Erfolg wird daher sein, dass das in die Flamme eindringende Licht, welches mit dem der Flamme die gleiche Oscillationsdauer hat, in der Flamme geschwächt, dass es dort absorbirt wird.

Anderes in die Flamme eindringendes Licht wird dagegen nicht merklich geschwächt werden, denn sind die Schwingungsperioden nicht gleich, so werden die Stösse bald in dem einen, bald in dem andern Sinne erfolgen, die Wirkung wird daher bald beschleunigend, bald verzögernd sein, und der Erfolg ist, dass die eindringende Bewegung keine merkliche Störung erfährt. Solches Licht kann daher in der Flamme nicht merklich absorbirt werden.

Die vorhin beschriebenen Absorptionserscheinungen in Flammen ergeben sich aus dem Kirchhoff'schen Satze folgendermassen. Für eine constante Temperatur ändert sich die Grösse e nur mit der Farbe des Lichtes; wir werden zugleich annehmen dürfen, dass die Grösse e sich continuirlich ändert, und dass sie bei gleichbleibender Temperatur keine stark hervortretenden Maxima oder Minima hat, wie sich schon daraus ergibt, dass e das Emissionsvermögen eines vollkommen schwarzen Körpers ist, und ein solcher in seinem Spectrum keine Discontinuitäten haben kann. Wenn demnach in dem Spectrum einer glühenden Flamme helle Streifen, also Maxima des Emissionsvermögens, sich zeigen, so folgt, dass für dieselben Farben auch das Absorptionsvermögen ein Maximum haben muss. Denn da e sich stetig mit der Farbe des Lichtes ändert, so kann wegen der Gleichung

$$E = A \cdot e$$

E für eine bestimmte Farbe nur dann einen grössten Werth haben, wenn zugleich A einen solchen erhält.

Lässt man Licht durch eine solche Flamme gehen, so wird deshalb vorzugsweise jenes absorbirt, welches von der Flamme selbst ausgesandt wird; untersucht man dann das durchgetretene Licht prismatisch, so muss an der Stelle der hellen Flammenstreifen die Wirkung folgende sein: die Helligkeit wird vermehrt durch die Aussendung des Lichtes von der Flamme, vermindert durch die Absorption des Lichtes in der Flamme. Wird nun von der Flamme mehr Licht absorbirt, als sie aussendet, so muss an der Stelle der vorher hellen Streifen jetzt eine Schwächung des Lichtes bemerkbar sein, dieselbe muss dunkler sein, als wenn keine Flamme vorhanden wäre.

Das Spectrum der Lithiumflamme besteht z. B. nur aus dem einen hellen Streifen im Roth mitten zwischen B und C. Nehmen wir nun an, dass die

Intensität der hellen Lithiumlinie $\frac{1}{n}$ von derjenigen ist, welche ein vollkommen schwarzer Körper an dieser Stelle zeigen würde, so wird die Lithiumflamme auch von dem durch sie hindurchtretenden Lichte derselben Farbe $\frac{1}{n}$ absorbiren. Ist nun die Intensität der hintern Lichtquelle gerade die $n$fache der Lithiumflamme, so wird das Spectrum des durch die Flamme getretenen Lichtes durch die Flamme gar nicht geändert, da dann die Flamme $\frac{1}{n}$ fortnimmt und selbst ebenso viel Licht aussendet. Ist aber die Helligkeit der hintern Lichtquelle grösser, strahlt sie z. B. das 2 . $n$fache Licht der Lithiumflamme aus, so wird die Lithiumflamme $\frac{1}{n}$ dieses Lichtes absorbiren, also doppelt so viel als sie aussendet, es muss daher an der Stelle der hellen Lithiumlinie eine dunkle Linie auf dem hellen Grunde des übrigen Spectrum sich zeigen.

Mit Hülfe des Sonnenlichtes gelingt es leicht, durch passendes Enger- und Weitermachen des ersten Spaltes, durch den man die Strahlen auf den Spalt des Collimatorrohres eines Spectralapparates fallen lässt, alle drei Fälle mit der Lithiumflamme hervorzubringen.

Die Spectra, welche andere Salze, wenn sie in die Flamme gebracht werden, hervorrufen, sind meist weniger einfach und bilden selten Linien von der Helligkeit der Lithium- und Natriumlinien. Alle diese Spectra kann man auf ähnliche Weise umkehren. Wenn man hinter der Flamme eine Lichtquelle von hinreichender Intensität aufstellt und der Flamme eine genügende Dicke gibt, so gehen die vorher hellen Linien in dunkle über.

Nach diesen Erfahrungen müssen in dem Spectrum eines leuchtenden Körpers immer dann dunkle Streifen auftreten, wenn das zu dem Prisma dringende Licht nur durch eine Schicht von absorbirenden Dämpfen hindurchgeht, selbst dann, wenn diese Dämpfe von dem leuchtenden Körper selbst ausgehen. Man kann in der That auf diese Weise Lichtquellen erzeugen, die in einem ganz continuirlichen Spectrum dunkle Linien haben, wie die Fraunhofer'schen. Ich habe ein solches auf zwei verschiedene Arten erhalten[1]. Wenn man durch eine Capillarröhre, welche an ihren Enden mit Erweiterungen, in welche Metalldrähte eingeschmolzen sind, versehen ist, und welche irgend ein Gas in höchst verdünntem Zustande enthält, die elektrischen Entladungen einer Leydener Flasche mit sehr kleiner Schlagweite gehen lässt, so wird zunächst das Gas glühend, und man sieht das Spectrum des Gases; vergrössert man die Schlagweite ein wenig, so verdampft in Folge der gesteigerten Temperatur etwas Natrium aus dem Glase, und man sieht in dem Spectrum, wenn man die Röhre mit dem Prisma betrachtet, auch das Licht des glühenden Natriumdampfes, die gelbe Doppellinie. Nimmt man nun die

1) *Wüllner*, Poggend. Annal. Bd CXXXV und Bd. CXXXVII.

Schlagweite der elektrischen Entladung gross, so werden durch diese von der Innenwand der Glasröhre eine Menge feiner Glassplitterchen abgerissen, welche auf das lebhafteste weiss glühen. Wie alle weissglühenden festen Körper liefern diese Glassplitter ein continuirliches Spectrum, in demselben erscheint aber an Stelle der Natriumlinie eine dunkle Linie, wie im Sonnenspectrum die Linie *D*. Da nämlich die Glassplitter in einer mit Natriumdampf gefüllten Atmosphäre glühen, so wird das von ihnen ausgesandte entsprechende gelbe Licht in dieser Atmosphäre absorbirt, und die Stelle erscheint bei der grossen Helligkeit ihrer Umgebung dunkel.

Eine andere Lichtquelle, deren Spectrum dieselbe dunkele Linie enthält, erhält man, wenn man durch eine im nächsten §. zu beschreibende Geissler'sche Röhre, welche Wasserstoff unter einem Drucke von 1200 ^{mm} enthält, den Strom eines starken Inductionsapparates gehen lässt, in welchem ausserdem noch eine Leydener Flasche eingeschaltet ist. Das Spectrum des von dem Wasserstoffe unter diesen Umständen ausgesandten Lichtes ist vollständig continuirlich, es zeigt nur die dunkle *D*-Linie, da bei der hohen Temperatur desselben aus dem Glase der Röhre Natrium verdampft, welches den Wasserstoff einhüllt.

In anderer Weise kann man diese Erscheinung selbst objectiv zeigen mit Hülfe der im vierten Theile zu beschreibenden elektrischen Lampe; erzeugt man den elektrischen Lichtbogen zwischen Kohle und metallischem Natrium und erzeugt mit Linsen und Prismen ein objectives Spectrum auf einem Schirm, so sieht man zunächst einen Streifen von orangegelbem Licht, sehr bald tritt dann aber an der Stelle, wo wenn ein Sonnenspectrum auf dem Schirme in der entsprechenden Lage entworfen würde, die *D*-Linie sich zeigen würde, eine dunkle Linie auf. Durch die hohe Temperatur des Lichtbogens verdampft ein grosser Theil des Natriums und hüllt das glühende Metall ein; der Dampf absorbirt dann das Licht, welches er selbst aussenden würde.

Wie wir im vorigen §. sahen, müssen wir in dem Sonnenspectrum eine grosse Anzahl dunkler Linien als dem Sonnenlichte eigenthümlich ansehen, da ihre Schärfe und Dunkelheit durchaus von der Stellung der Sonne, also von dem Wege, den die Sonnenstrahlen in der Atmosphäre zurücklegen, unabhängig ist. Nach den in diesem §. vorgelegten Erfahrungen sind wir daher berechtigt den Schluss zu ziehen, dass diese Linien durch Absorption in einer die Sonne umgebenden Dampfatmosphäre entstehen.

Kirchhoff[1]) hat deshalb gegenüber der frühern aus der Erscheinung der Sonnenflecken abgeleiteten Anschauung von der Beschaffenheit der Sonne, nach welcher die Sonne aus einem dunklen von einer leuchtenden Photosphäre umgebenen Kerne besteht, eine andere Annahme über die physische Beschaffenheit der Sonne gebildet. Er nimmt an, dass die Sonne ein fester oder flüssiger

1) *Kirchhoff,* Untersuchungen über das Sonnenspectrum und die Spectren der chemischen Elemente. (Abhandlungen d. Berliner Acad. 1861.)

Körper von der höchsten Glühhitze sei, welcher wie alle festen oder flüssigen in Weissglühhitze befindlichen Körper ein ganz continuirliches Spectrum bildet. Dieser Kern wird von einer gasförmigen Hülle umgeben, in welcher sich die Dämpfe der in dem Kern verdampfbaren Substanzen befinden, und deren Temperatur niedriger ist. Diese Dämpfe absorbiren die Lichtarten, welche sie selbst in geringerer Intensität als der feste Kern aussenden. Die diesen Lichtarten entsprechenden Stellen im Spectrum müssen demnach dunkel erscheinen, sie bilden die dunklen Fraunhofer'schen Linien. Würde man nun wissen, welche Dämpfe gerade jene Lichtarten aussenden, die im Sonnenspectrum fehlen, so würden wir daraus sofort schliessen können, welche Substanzen in der Sonne vorhanden sind; aus dem Bisherigen schliessen wir sofort schon, dass in der Sonne Natrium vorhanden sein wird, da wir schon mehrfach hervorgehoben, dass die dunklen D-Linien genau mit den hellen Natriumlinien zusammenfallen, und da wir keinen andern Stoff kennen, der genau diese Linien gibt. Die weitere Kenntniss liefert uns eine genauere Untersuchung der Emission des Lichtes.

§. 42.

Emission des Lichtes; Spectralanalyse. Der in dem vorigen §. besprochene Satz über das Verhältniss der Absorption und Emission des Lichtes lässt sofort nun auch weitere Schlüsse ziehen über die Emission des Lichtes selbst. Wir wissen zunächst, dass im Allgemeinen die Körper nur dann Licht selbständig aussenden, wenn sie erhitzt werden, und zwar wenn sie zu einer gewissen sehr hohen Temperatur erhitzt werden, welche man gewöhnlich als die Glühhitze bezeichnet. Untersucht man nun die Strahlen eines festen, einer allmählich gesteigerten Glühhitze ausgesetzten Körpers, z. B. eines Platindrahtes, mit dem Prisma, so findet man zunächst, dass das ausgesandte Licht roth ist und zwar das am wenigsten brechbare Roth des Spectrums; steigert man die Temperatur, so wächst die Intensität dieses Lichtes, zugleich treten aber zu den rothen Strahlen allmählich solche kleinerer Wellenlänge, zunächst kommen gelbe hinzu, dann grüne und so fort, bis schliesslich in der Weissglühhitze der Körper Strahlen aller Brechbarkeiten aussendet, das Spectrum wird continuirlich und enthält alle Farben vom Roth bis zum Violett. Nach dem Kirchhoff'schen Satze ist nun das Emissionsvermögen irgend eines Körpers E für irgend eine Lichtart

$$E = A \cdot e,$$

worin, wie wir sahen, e das Emissionsvermögen eines vollkommen schwarzen Körpers und A das Absorptionsvermögen des in Rede stehenden Körpers für dieselbe Lichtart ist. Nach den eben mitgetheilten Erfahrungen an einem Platindraht folgt nun, dass dessen Emissionsvermögen, also sein Werth von E, bis zu einer bestimmten Temperatur gleich Null ist und bei dieser zunächst für rothes Licht einen von Null verschiedenen Werth annimmt. Da nun das

Platin in allen Temperaturen undurchsichtig ist, so folgt, dass A dort stets einen von Null verschiedenen Werth hat. Daraus folgt dann aber weiter, dass e, das Emissionsvermögen des schwarzen Körpers, erst bei dieser bestimmten Temperatur von Null verschieden ist und von dieser Temperatur an stetig wächst. Da nun aber für alle Körper bei dieser Temperatur das Emissionsvermögen gleich ist dem Produkte aus ihrem Absorptionsvermögen und dem Werthe von e, so folgt, dass alle Körper, die bei der betreffenden Temperatur nicht vollkommen durchsichtig sind, bei eben dieser Temperatur anfangen müssen rothes Licht auszustrahlen. Dasselbe gilt für alle übrigen Lichtarten, so dass wir also allgemein zu dem Satze gelangen, dass alle Körper, wenn sie allmählich erhitzt werden, bei derselben Temperatur Strahlen von derselben Farbe auszusenden beginnen, also bei derselben Temperatur roth zu glühen, bei einer höhern, allen gemeinsamen Temperatur gelbe Strahlen u. s. w. auszugeben anfangen[1]).

Dieser Satz ist schon früher durch Versuche von Draper experimentell bewiesen worden[2]). Draper schloss kleine Stückchen Kalk, Marmor, Flussspath, Kupfer, Antimon, Blei, Platin und Coaks in ein Flintenrohr und fand, dass beim Erhitzen alle diese Körper gleichzeitig leuchtend wurden und beim Abkühlen alle gleichzeitig erloschen. Wenn nun aber auch für alle Körper der Factor e in dem das Emissionsvermögen darstellenden Ausdruck denselben Werth hat, so ist für die verschiedenen Körper der Werth von E für eine bestimmte Lichtart doch nicht derselbe, da dieser ausser von e auch von dem Werthe von A abhängt. Ja es ist denkbar, dass ein Körper in einer Temperatur, in welcher e für alle Farben einen von Null verschiedenen Werth hat, doch gar kein Licht aussendet, wenn nämlich A für alle Farben den Werth Null hat. Ein solcher Körper würde dann in dieser Temperatur vollkommen durchsichtig sein. In der That hat Kirchhoff einen solchen Körper aufgefunden. In einen aus Platindraht gebogenen Ring von etwa 5^{mm} Durchmesser brachte er etwas phosphorsaures Natron und erhitzte dasselbe in der wenig leuchtenden Flamme der Bunsen'schen Lampe. Das Salz schmolz, bildete eine flüssige Linse und blieb dabei vollkommen klar; aber es leuchtete auch gar nicht, während der dasselbe berührende Platinring das lebhafteste Licht ausstrahlte.

Bezeichnen wir nun das Emissionsvermögen eines vollkommen schwarzen Körpers für die verschiedenen Lichtarten mit $e_1, e_2 \ldots e_n$, das Absorptionsvermögen irgend eines Körpers für dieselben Lichtarten mit $A_1, A_2 \ldots A_n$, so werden wir die gesammte bei einer bestimmten Temperatur von diesem Körper ausgesandte Lichtmenge darstellen können durch

---

1) *Kirchhoff,* Poggend. Annal. Bd. CIX. p. 293.

2) *Draper,* Philosophical Magazin XXX. 1847. Man sehe auch *E. Becquerel,* Annal. de chim. et de phys. 3. Sér. T. LXVIII und La lumière, ses causes et ses effets. Paris 1867. p. 71—97.

$$S = A_1 e_1 + A_2 e_2 \ldots\ldots A_n e_n$$

und man sieht deutlich, dass die Zusammensetzung des Lichtes oder das bei der angenommenen Temperatur von dem Körper gelieferte Spectrum wesentlich von dem Absorptionsvermögen desselben für die verschiedenen Lichtarten abhängt. Da nun dieses letztere, wie sich unmittelbar aus der Stokes'schen Begründung des Kirchhoff'schen Satzes ergibt, wesentlich von der Natur des betreffenden Körpers abhängt, so werden wir allgemein den Schluss ziehen, dass das Spectrum, welches ein glühender Körper liefert, wesentlich von seiner Natur abhängig und für ihn charakteristisch ist. Nach den in den frühern §§. mitgetheilten Erfahrungen werden wir hinzufügen können, dass das besonders gilt für die Spectra glühender Dämpfe und Gase in Flammen.

Diese aus dem Kirchhoff'schen Satze sich unmittelbar ergebende Folgerung ist schon lange von verschiedenen Chemikern und Physikern geahnt worden[1]), wie man ja schon längst bei der chemischen Analyse aus der gelben Flamme des Weingeistes, in dem ein Salz aufgelöst wurde, auf die Gegenwart von Natrium, aus der violetten Färbung auf die von Kalium geschlossen hat. So hat Ångström[2]) in seinen optischen Untersuchungen bereits erkannt, dass das Spectrum des elektrischen Funkens von den Metallen, zwischen denen der Funke überspringt, und dem Gase, in welchem der Funke sich bildet, abhängt, so hat ganz besonders Plücker erkannt, dass jedes Gas ein für dasselbe charakteristisches Spectrum hat, so dass die Natur des Gases und seine chemische Aenderung durch die hellen Linien seines Spectrums in charakteristischer Weise angezeigt wird. Ja Plücker erkannte bereits, dass wenn man die dem Spectrum eines bestimmten Gases eigenthümlichen Lichtlinien mit Genauigkeit bestimmt habe, dass man dann das Vorhandensein eines Gases mit Sicherheit aus der Beobachtung einer seiner Linien schliessen könne, und dass man in dem Spectrum dann ein sicheres Mittel habe, um mannichfaltige Fragen über die chemische Constitution von Gasen und Dämpfen zu beantworten[3]).

In seiner ganzen Allgemeinheit wurde indess der Satz, dass jede verdampfbare Substanz in eine Flamme gebracht oder überhaupt jeder glühende Dampf ein sie charakterisirendes Spectrum habe und dass deshalb das Spectrum ein ausgezeichnetes Mittel der chemischen Analyse sei, von Kirchhoff und Bunsen erkannt[4]).

Kirchhoff und Bunsen benutzten zur Untersuchung der Spectra der chemischen Elemente theils den Fig. 63 gezeichneten grossen Spectralapparat, theils einen einfachern, Fig. 82.

---

1) Man sehe *Kirchhoff*: Zur Geschichte der Spectralanalyse. Poggend. Annal. Bd. CXVIII.

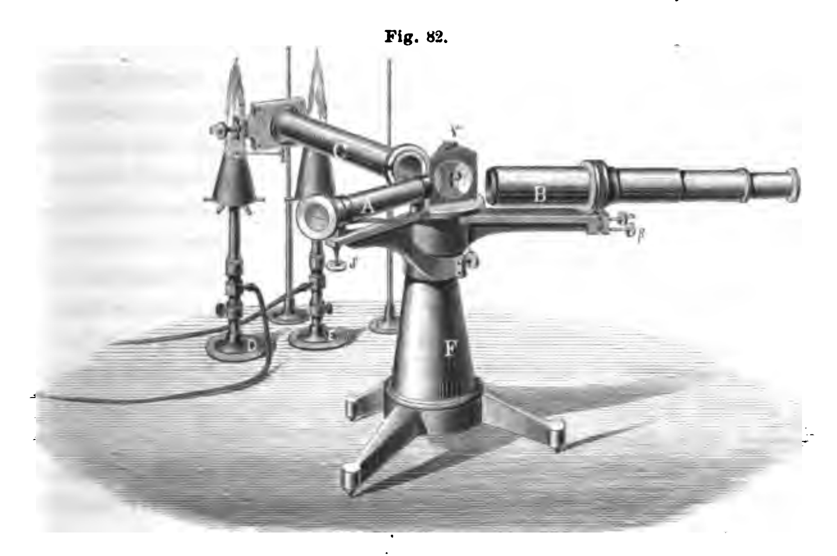
2) *Ångström*, Poggend. Annal. Bd. XCIV.

3) *Plücker*, Poggend. Annal. Bd. CVII. p. 498 ff.

4) *Kirchhoff* und *Bunsen*, Poggend. Annal. Bd. CX. u. Bd. CXIII.

Auf das obere Ende des gusseisernen Fusses F ist eine Messingplatte geschraubt, die das Flintglasprisma P von 60^0 brechendem Winkel und das Rohr C trägt, welches an dem dem Prisma zugewandten Ende durch eine Sammellinse, an dem andern durch eine Platte verschlossen ist, die mit einem

Fig. 82.

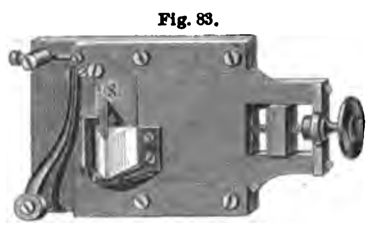


Spalt versehen ist. An dem Fusse sind weiter zwei Arme so befestigt, dass sie um eine Axe drehbar sind, von denen der eine das Fernrohr B von etwa achtfacher Vergrösserung, der andere das Rohr A hält; in dem dem Prisma zugewandten Ende des letztern ist eine Sammellinse, in dem andern eine Skala angebracht, die durch Reflexion an der vordern Prismenfläche sich dem durch das Fernrohr blickenden Beobachter zeigt. Die Skala ist eine auf Glas photographirte auf etwa $^1/_{15}$ verkleinerte Millimeterskala, sie ist mit Stanniol so weit gedeckt, dass nur der schmale Streifen, auf welchem die Theilstriche und die Zahlen sich befinden, sichtbar ist.

Die hellen oder dunklen Linien in dem Spectrum einer vor dem Spalt befindlichen Lichtquelle sieht man dann auf dem Bilde der Skala projicirt, und indem man die Stelle der Skala beobachtet, an welcher die Linien erscheinen, ist sofort die Stellung derselben im Spectrum, welches dieser Apparat gibt, bestimmt. Man hat deshalb nur in dem Apparate die Stellung der Fraunhofer'schen Linien im Sonnenspectrum zu bestimmen, um sofort auch die Stellung der hellen Linien einer künstlichen Lichtquelle im Sonnenspectrum zu kennen. Zur direkten Vergleichung der Lage der Linien in dem Spectrum zweier verschiedener Lichtquellen gaben Kirchhoff und Bunsen dem Spalt die Fig. 83 dargestellte Einrichtung. Von dem Spalt ist nur die obere Hälfte frei; die untere ist gedeckt durch ein kleines gleichseitiges Glasprisma, das durch totale Reflexion die Strahlen der Lichtquelle E durch den Spalt sendet, während die Strahlen der Lichtquelle D frei durch die obere Hälfte

desselben treten. Ein kleiner Schirm S über dem Prisma hält das Licht von D von der oberen Hälfte ab. Bei dieser Anordnung erblickt der Beobachter die beiden Spectra unmittelbar über einander, und kann direkt die Uebereinstimmung oder Verschiedenheit der etwa in den Spectren vorhandenen Linien erkennen.

Fig. 83.



Als Lichtquellen wandten Kirchhoff und Bunsen die nicht leuchtende Flamme des Bunsen'schen Brenners und eine Anzahl anderer Flammen, wie die des Kohlenoxydes, des Wasserstoffs, des Knallgasgebläses, sowie den elektrischen Funken an: letztern, indem sie den Funken, welchen der im vierten Theile zu beschreibende elektrische Inductionsapparat gibt, zwischen Drähten des zu untersuchenden Metalles überspringen liessen. In die Flammen wurden Verbindungen der Metalle mit Chlor, Brom u. s. w. gebracht.

Auf diese Weise fanden sie, dass für alle Metalle ein charakteristisches Spectrum existirt, welches in allen den untersuchten Flammen und im elektrischen Funken dasselbe war, und dass dieses charakteristische Spectrum der Metalle in den Flammen sich zeigte, welche Verbindung des Metalles auch in die Flamme gebracht wurde. Die von Kirchhoff und Bunsen auf diese Weise bestimmten Linien der Metallspectra sind zum grössten Theil auf Tafel II und III unter den Linien des Sonnenspectrums angedeutet.

Die Fruchtbarkeit dieser neuen analytischen Methode hat sich schon auf das glänzendste dadurch bewährt, dass sie bereits zur Entdeckung mehrerer neuer Metalle geführt hat. Kirchhoff und Bunsen selbst entdeckten bei ihren Untersuchungen das Cäsium und Rubidium, zwei Metalle, welche in ihrem Verhalten dem Kalium sehr nahe stehen. Das Spectrum des Cäsiums ist hauptsächlich charakterisirt durch zwei scharfe blaue Linien, etwa in der Mitte zwischen F und G, ausserdem zeigen sich auf schwach beleuchtetem Hintergrunde einige schwächere Linien in Gelb und Grün. Das Rubidium ist charakterisirt durch zwei sehr nahe beisammen liegende Linien im Blau-Violetten, etwa $^1/_3$ des Zwischenraums zwischen G und H von G entfernt, ausserdem durch zwei rothe Linien, welche noch vor der Linie A des Sonnenspectrums liegen; endlich zeigt es, ähnlich wie das Cäsium, einige schwache Linien auf schwach beleuchtetem Hintergrunde im Gelben und Grünen[1]).

Im Jahre 1861 entdeckte Crookes in dem Schlamme der Bleikammern ein neues Metall, welches wesentlich durch eine grüne Linie charakterisirt wird, dem er den Namen Thallium gab; die charakteristische Linie fällt mit derjenigen Nr. 1402,6 des Kirchhoff'schen Spectrums zusammen[2]).

---

1) *Kirchhoff* und *Bunsen*, Poggend. Annal. Bd. CXIII.

2) *Crookes*, Philosophical Magazin. 4. Ser. T. XXI. *Lamy*, Annales de chim. et de phys. 3. Série. T. LXVII.

Im Jahre darauf entdeckten Reich und Richter in Freiberg im Zink ein neues Metall, das Indium, welches besonders durch eine blaue Linie charakterisirt ist[1]).

Die von Kirchhoff bestimmten Linien der verschiedenen Elemente sind auf Tafel II und III unter den einzelnen Stellen des Sonnenspectrums, denen sie entsprechen, angegeben. Man sieht daraus, wie ganz besonders die vielen dem Eisen angehörigen hellen Linien sich im Sonnenspectrum als dunkle Linien wieder finden, wie ebenso die Linien des Cäsium, Mangan, Kobalt, Nickel u. a. dunkeln Linien des Sonnenspectrums entsprechen.

Aus den Untersuchungen von Bunsen und Kirchhoff schien hervorzugehen, dass wenn man ein Metallsalz in die Flamme bringt, sich stets nur das Spectrum des Metalles zeige, und man könnte geneigt sein, daraus den Schluss zu ziehen, dass das Spectrum eines Elementes sich immer in derselben Weise zeige, mit welchen andern Elementen es auch verbunden sei. Dass dem indess nicht so ist, schliessen die beiden Forscher aus den Absorptionsverhältnissen z. B. des Joddampfes und der Jodwasserstoffsäure. Ersterer zeigt die §. 40 besprochenen charakteristischen Absorptionserscheinungen, letztere zeigt nichts derart. Al. Mitscherlich[2]) ist es dann auch gelungen zu zeigen, dass die Verbindungen der Metalle ihnen eigenthümliche von den Elementen verschiedene Spectra haben. Indem er gleichzeitig in die Flamme ausser dem Salze etwas Chlorwasserstoffsäure brachte, erhielt er z. B. von Chlorkupfer, Chlorcalcium etc. besondere Spectra, so dass die frühere Beobachtung dadurch zu erklären ist, dass in den Flammen die Salze sich sofort zersetzen.

Der der Spectralanalyse zu Grunde liegende Satz, dass jeder Körper ein bestimmtes ihn charakterisirendes Spectrum habe, gilt unmittelbar nur für eine bestimmte Temperatur. Allgemein für alle Temperaturen würde er nur gelten, wenn das Absorptionsvermögen der Körper von der Temperatur unabhängig ist. Dass es innerhalb ziemlich weiter Grenzen von der Temperatur unabhängig ist, folgt aus der Constanz der Spectra der Elemente in den verschiedenen angewandten Flammen, die, wie Kirchhoff und Bunsen zeigen, in ihren Flammen Temperaturen hatten, die zwischen 1820° C. und 8061° lagen.

Ich habe ebenfalls für diese Constanz des Emissionsvermögens von der gewöhnlichen Temperatur an bis zur Temperatur der Wasserstoffflamme in der Luft, deren Temperatur die beiden genannten Forscher auf 3259° C. schätzen, einen interessanten Beweis liefern können[3]), indem ich gezeigt

---

1) *Reich* und *Richter*, Erdmann's Journal für prakt. Chemie. Bd. 89 u. 90.

2) *Al. Mitscherlich*, Poggend. Annal. Bd. CXVI. Die seitdem sehr stark angeschwollene Litteratur über Spectralanalyse, die mehr ein chemisches als ein physikalisches Interesse hat, findet man sehr vollständig in den Jahresberichten über Chemie seit 1860 und in den Fortschritten der Physik dargestellt von der Berliner physikalischen Gesellschaft seit 1860.

3) *Wüllner*, Poggend. Annal. Bd. CXX.

habe, dass das Spectrum des in der Wasserstoffflamme glühenden Joddampfs gerade in den charakteristischen Theilen das umgekehrte des Absorptionsspectrums des Joddampfes ist, das heisst, dass das Spectrum des glühenden Dampfes dort helle Linien zeigt, wo das Absorptionsspectrum dunkle zeigt. Ich bestimmte zu dem Ende an der Skala eines Kirchhoff'schen Spectralapparates zunächst die Lage der dunklen Linien im Absorptionsspectrum und brachte dann vor den Spalt eine Wasserstoffflamme, welche dadurch mit Jod gesättigt war, dass ich den Wasserstoff durch eine erhitzte und mit Jod versehene Röhre hindurchgehen liess. Ist die Flamme stark mit Joddampf gesättigt, und bringt man dann den hellsten Theil der mit röthlich-gelbem Licht leuchtenden Jodflamme vor den Spalt, so genügt ein Blick in das Fernrohr des Spectralapparates, um die überraschende Aehnlichkeit in dem Charakter des Jodspectrums und desjenigen des durch Joddampf hindurchgegangenen Tageslichtes zu erkennen. Die dunklen Linien des Flammenspectrums lagen indess genau dort, wo die hellen Linien des Absorptionsspectrums auf der Skala notirt waren und umgekehrt.

Trotzdem aber scheint man eine allgemeine Unabhängigkeit des Emissionsvermögens von der Temperatur nicht annehmen zu können. Untersuchen wir deshalb zunächst, welches die Erscheinungen sein müssten, wenn dieses Vermögen, das heisst

$$\frac{E}{e} = A,$$

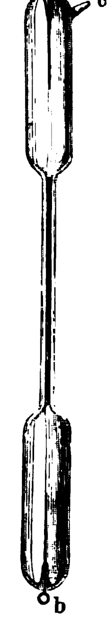
constant wäre. Diese Gleichung sagt aus, dass in dem Falle die Menge des von dem betrachteten Körper ausgesandten Lichtes irgend einer Farbe immer derselbe Bruchtheil des von einem vollkommen schwarzen Körper ausgesandten Lichtes ist. Das von einem vollkommen schwarzen Körper ausgesandte Licht ist nun bei einer bestimmten Temperatur für alle Farben das Maximum, welches überhaupt ausgestrahlt werden kann, und von einer gewissen Temperatur an liefert, wie wir im Anfang dieses Paragraphen bemerkten, ein solcher Körper ein vollständiges und ganz continuirliches Spectrum. Diese Temperatur liegt nach den schon vorhin erwähnten Versuchen Draper's bei etwa 1200°, es ist die Temperatur der Weissglühhitze. Von da ab nimmt der Werth von e für alle Lichtarten mit steigender Temperatur sehr rasch zu [1]), und zwar für alle so, dass das Licht immer rein weiss erscheint, also, da dazu das Licht immer nahezu dieselbe Zusammensetzung haben muss, nahezu in demselben Verhältniss. Wir müssen das wenigstens, da wir einen vollkommen schwarzen Körper nicht kennen, daraus schliessen, dass die festen Körper in der höchsten Temperatur, die wir kennen, jene des elektrischen Lichtbogens, rein weiss erscheinen, und ein ganz continuirliches Spectrum liefern.

---

1) *Draper*, Philosophical Magazine. XXX. 1847. *E. Becquerel*, La lumière. p. 71—97 und p. 122—128. Auf die Intensitätsverhältnisse des ausgestrahlten Lichtes kommen wir in der Wärmelehre noch einmal zurück.

Ein Körper nun, dessen Werth von A für alle Farben denselben Werth hat, würde ein ebensolches Spectrum zeigen, welches von dem des schwarzen Körpers sich nur durch eine geringere Helligkeit unterscheidet. Ist dagegen der Werth von A für die verschiedenen Wellenlängen sehr verschieden, so werden diejenigen Strahlen, für welche A einen grossen Werth hat, hell, diejenigen, für welche A nur klein ist, dunkel erscheinen. Solche Körper liefern also ein Spectrum aus einzelnen hellen Linien auf einem mehr oder weniger dunklen Hintergrund. Würde nun der Werth von A allgemein von der Temperatur unabhängig sein, so würde daraus folgen, dass das Spectrum eines Körpers in allen Temperaturen seine charakteristische Beschaffenheit beibehalten müsste; es könnte nur in sofern sein Aussehen ändern, dass mit steigender Temperatur immer mehr Licht zu dem in niedrigerer Temperatur hinzuträte. Denn da A wohl für keinen Körper für irgend eine Lichtart absolut gleich Null ist, so würde, da e für jede Wellenlänge mit der Temperatur wächst, schliesslich für jede Lichtart auch $A \cdot e$ einen merklichen Werth erhalten. Es müssten aber immer diejenigen Stellen des Spectrums, welche in niedrigerer Temperatur durch besonders helle Linien hervorragen, durch grössere Helligkeit vor den andern ausgezeichnet sein, wenigstens so lange, bis etwa durch zu grosse Intensität des ganzen Spectrums unser Auge die Helligkeitsunterschiede nicht mehr wahrnehmen könnte.

Fig. 84.

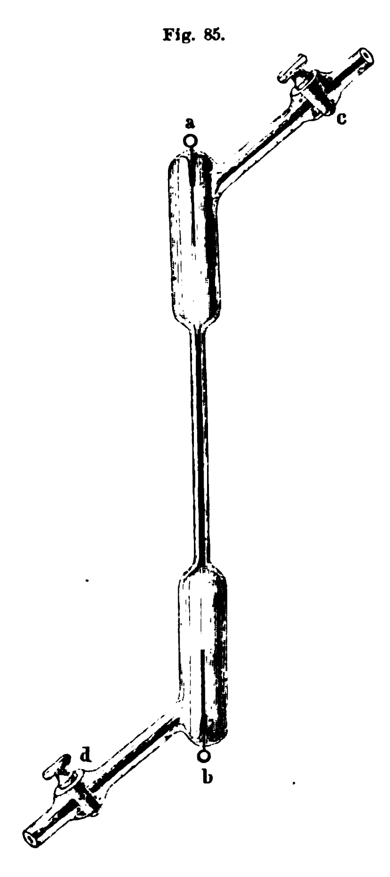


Dass dem nicht so ist, dass wir also die Unveränderlichkeit der Grösse A nicht allgemein annehmen dürfen, das folgt unzweifelhaft aus den Untersuchungen von Plücker, Plücker und Hittorf und mir selbst über die Spectra der glühenden Gase.

Um die Gase glühend zu machen, wendet man den Inductionsstrom des Inductionsapparates an, den man durch mit Gasen gefüllte sogenannte Geissler'sche Röhren hindurchgehen lässt. Diese Geissler'schen Röhren bestehen in ihrer gewöhnlichen Form aus zwei weitern Röhren (Fig. 84), welche durch ein längeres oder kürzeres Stück einer capillaren Röhre mit einander verbunden sind. In die Enden der weitern Röhren bei a und b sind Platindrähte eingeschmolzen. Die Röhren werden mit Gas in sehr verdünntem Zustande gefüllt; zu dem Ende werden sie mit einem Ansatzrohr c an der Geissler'schen Luftpumpe befestigt und möglichst luftleer gepumpt, und dann mit dem durch wasserfreie Phosphorsäure vollkommen ausgetrockneten Gase gefüllt, wieder ausgepumpt und so mehrfach mit dem trocknen Gase ausgespült, bis man sicher sein kann, dass jede Spur Luft und alle Feuchtigkeit aus der Röhre verschwunden ist. Um letzteres zu erreichen, wird bei dem Spülen die Röhre ausserdem stark erhitzt. Schliesslich lässt man dann von dem Gase soviel in der Röhre, dass dasselbe nur mehr eine Spannung von wenigen Millimetern beträgt. Um die Spannung des Gases beliebig variiren zu können, habe ich den Röhren die

Gestalt Fig. 85 gegeben, indem ich sie mit zwei Glashähnen *c* und *d* versah, welche in der vortrefflichen Ausführung, die Geissler in Bonn ihnen gibt, vollkommen luftdicht schliessen. Lässt man nun den Inductionsstrom durch solche Röhren hindurchgehen, so leuchtet das Gas in dem capillaren Theil sehr hell mit einer für jedes Gas charakteristischen Farbe, in den weitern Theilen ist die Farbe eine andere und nicht so scharf charakterisirte. Auf diese Unterschiede können wir erst bei Besprechung der Inductionserscheinungen überhaupt, im vierten Theile, eingehen. Man bringt deshalb den capillaren Theil des Rohres vor den Spalt des Spectralapparates.

Fig. 85.



In seiner ersten Arbeit über die Spectra der Gase hat Plücker[1]) die Spectra einer Anzahl Gase und Dämpfe und ihre charakteristischen Linien bestimmt. Das einfachste Spectrum zeigte der Wasserstoff; dasselbe bestand aus drei scharfen hellen Linien, einer rothen, einer grünblauen und einer blauvioletten, welche Plücker als $H\alpha$, $H\beta$, $H\gamma$ bezeichnete. $H\alpha$ entspricht genau der Fraunhofer'schen Linie *C*, $H\beta$ genau der Linie *F* und $H\gamma$, deren Wellenlänge in zehntausendstel Millimeter 4,341 ist, einer feinen dunklen Fraunhofer'schen Linie eben vor *G*.

Das Spectrum des Sauerstoffs besteht ebenfalls aus einer ziemlich beträchtlichen Anzahl einzelner heller Linien, welche über das ganze Spectrum vertheilt sind, jedoch mehr im Blauen und Violetten auftreten als im Rothen und Gelben. Plücker bestimmte von diesen Linien vier als für den Sauerstoff charakteristisch, denen er die Bezeichnung $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$, $O\delta$ beilegte. Die erste ist eine fleischrothe Linie zwischen *C* und *D*, deren Wellenlänge 6,150, die zweite und dritte sind grüne Linien ganz in der Nähe der Fraunhofer'schen Linie *E*, deren Wellenlängen 5,328 und 5,185 sind, die vierte Linie ist eine violette, deren Wellenlänge 4,367 ist, sie liegt sehr nahe bei $H\gamma$.

Eines der prachtvollsten Spectra ist das des Stickstoffs; dasselbe besteht nicht aus einzelnen hellen Linien, sondern ist ein prachtvoll schattirtes continuirliches Spectrum. Dasselbe ist abgebildet Tafel I Fig. 3. Es be-

---

1) *Plücker*, Poggend. Annal. Bd. CVII.

ginnt im Rothen zwischen B und C und erstreckt sich bis tief in das Violette hinein. Besonders charakteristisch für den Stickstoff sind die eigenthümlichen Schattirungen im blauen und violetten Theile, welche ganz den Eindruck cannelirter Säulen machen, und welche kein Spectrum in ähnlicher Weise darbietet.

Von den übrigen von Plücker beschriebenen Spectren erwähnen wir nur noch das des Jod. Dasselbe bestand, wie das des Sauerstoffs, aus einer grossen Anzahl heller scharfer Linien, welche durch dunkle Zwischenräume von einander getrennt waren. Die hellen Linien treten hauptsächlich im Gelbgrünen und Grünen zwischen D und F auf. Das von Plücker beschriebene Spectrum des Jod hat durchaus keine Aehnlichkeit mit dem von mir beobachteten negativen Absorptionsspectrum des Jod, welches, wie erwähnt, ein schön schattirtes von dunklen Linien durchzogenes continuirliches Spectrum war. Das eine dieser Spectra kann aus dem andern nicht bei Annahme eines constanten A abgeleitet werden; denn da die Temperatur des Gases in der Geissler'schen Röhre unzweifelhaft eine viel höhere ist, als in der Wasserstoffflamme, so müsste das in dieser reichlich vorhandene Roth und Gelb in der Geissler'schen Röhre eine viel grössere Intensität haben. Während aber im Spectrum des Jod in der Wasserstoffflamme roth und orange schön leuchtend und schön schattirt war, finden sich im Jodspectrum der Geissler'schen Röhre an dieser Stelle nur etwa zehn scharfe helle Linien.

Einen noch auffallenderen Beweis für die Veränderlichkeit des Emissionsvermögens liefert aber das von Plücker und Hittorf[1]) entdeckte Verhalten des Stickstoffs. Dieser kann in der Geissler'schen Röhre zwei wesentlich verschiedene Spectra zeigen. Wenn man dem Stickstoff in der Geissler'schen Röhre eine Spannung von 40^{mm} gibt, so erhält man bei Anwendung des einfachen Inductionsapparates das Spectrum Fig. 3 Tafel I, welches Plücker schon früher beschrieben hatte. Schaltet man nun aber gleichzeitig in den Inductionsapparat eine Leydener Flasche ein, wodurch, wie wir später nachweisen werden, der Durchtritt der Elektricität in einzelnen Entladungen grosser Mengen erfolgt, und deshalb die Temperatur des Gases eine viel höhere wird, so zeigt der Stickstoff ein ganz anderes Spectrum, es besteht aus einer grossen Zahl prachtvoll heller Linien, die an Stellen auftreten, welche in dem ersten Spectrum nicht beleuchtet waren, während Stellen, die im ersten Spectrum beleuchtet waren, jetzt dunkel sind. Figur 4 auf Tafel I gibt unmittelbar unter dem ersten Spectrum die Linien des zweiten an. Plücker unterscheidet deshalb Spectra I. Ordnung, schattirt continuirliche, und Spectra II. Ordnung, die aus einzelnen hellen Linien bestehen. Die beiden erwähnten Jodspectra stehen in demselben Verhältniss zu einander.

Dass in der That die beiden Spectra nicht nur dadurch verschieden sind, dass durch rasch wachsende Helligkeit der einzelnen Strahlen dieselben vor

---

1) *Plücker* und *Hittorf*, Philosophical Transactions for 1865.

den übrigen hervortreten, während der übrige Theil langsamer an Helligkeit zunimmt, habe ich dadurch nachgewiesen, dass ich ohne Aenderung der Entladungsart nur durch Aenderung des Gasdrucks in der Geissler'schen Röhre die beiden Spectra hervorrief[1]). Das Spectrum I. Ordnung trat bei meinen Versuchen besonders brillant auf, als ich dem Gas eine Spannung von etwa 10^{mm} gab. Bei gesteigerter Dichte des Gases nahm die Helligkeit des Spectrums beträchtlich ab. Schon bei einer Spannung von 60^{mm} konnte man die erste rothe Partie des Spectrums kaum mehr erkennen, das Gelbe war kaum mehr als schattirt zu sehen, im Grün liessen sich die Schattirungen noch eben wahrnehmen; der blaue und violette Theil war aber, wenn auch lichtschwächer, doch noch vollkommen ausgebildet. In ähnlicher Weise nahm besonders in dem weniger brechbaren Theil des Spectrums die Lichtstärke stetig ab, bis die Spannung des Gases 260^{mm} betrug. Bei diesem Drucke ist das erste Stickstoffspectrum bis zum Blau noch eben sichtbar, die Cannelirungen im Blau und Violett indess bleiben auch jetzt noch scharf zu erkennen, wenn sie auch lichtschwächer und von der brechbaren Seite her schmaler werden. In dem schwach hellen grünen Felde blitzt bei diesem Drucke schon zuweilen eine helle zum zweiten Stickstoffspectrum gehörige Linie auf.

Die Zahl der zum zweiten Stickstoffspectrum gehörigen hellen Linien vermehrt sich, wenn der Druck des Gases bis 400^{mm} zunimmt, ohne dass das erste Spectrum vollständig verschwindet. Bei einem Drucke von 500^{mm} jedoch ändert sich die Erscheinung, das erste Spectrum ist abwechselnd sichtbar, abwechselnd nicht; ist es verschwunden, so erscheint statt dessen das zweite Spectrum. Man kann die Erscheinung füglich als einen Conflict der beiden Stickstoffspectra bezeichnen. Selbst wenn einzelne Cannelirungen sichtbar sind, bleiben an andern Stellen des Spectrums zuweilen die Linien des zweiten Spectrums sichtbar. Ich hebe den Umstand besonders hervor, einmal weil man so deutlich sehen kann, dass die hellen Linien des Stickstoffspectrums II. Ordnung nicht etwa an solchen Stellen auftreten, die schon im ersten Spectrum besonders hell beleuchtet sind, und dann weil derselbe unmittelbar einen Einwurf Ångström's gegen die Annahme zweier Spectra zurückweist, den derselbe daher nimmt, dass Plücker und Hittorf das eine Spectrum durch den einfachen Inductionsstrom, das andere mit Einschaltung der Leydener Flasche erhielten[2]).

Ausser beim Stickstoff erhielten Plücker und Hittorf noch bei einigen andern Substanzen Doppelspectra, so beim Schwefel, und mir gelang es nur durch Anwendung verschiedener Gasdichten für Sauerstoff und Wasserstoff ausser den von Plücker beschriebenen Spectren ein solches erster Ordnung und ein neues Linienspectrum zu erhalten[3]). Auf die Darstellung dieser Spectra wer-

1) *Wüllner*, Poggend. Annal. Bd. CXXXVII.
2) *Ångström*, Spectre solaire. Berlin 1869 bei Dümmler.
3) *Wüllner*, Poggend. Annal. Bd. CXXXV.

den wir noch an einer andern Stelle eingehen, nur sei hier erwähnt, dass beim Wasserstoff das continuirliche Spectrum am besten zu erhalten ist, wenn man dem Wasserstoff eine Spannung von 30mm gibt und dann den Strom eines kleinen Ruhmkorff'schen Inductionsapparates hindurchgehen lässt, während man das neue Linienspectrum mit demselben Inductionsstrom erhält, wenn man den Wasserstoff in der Geissler'schen Röhre soweit verdünnt, als es eben möglich ist. Das neue Linienspectrum besteht aus sechs Gruppen von je zwei oder drei Linien, deren Wellenlängen zwischen 5,6467 und 4,9295 zehntausendstel Millimeter sind. Tafel IV zeigt diese drei verschiedenen Wasserstoffspectra, Fig. 1 das aus den drei Linien $H\alpha$, $H\beta$, $H\gamma$, Fig. 2 das continuirliche, und Fig. 3 das neue Linienspectrum, die Skala gibt die Minimalablenkungen der einzelnen Linien und Streifen in einem Flintglasprisma von Merz von 60° 2′ brechendem Winkel. Die vollständige Verschiedenheit der Spectra tritt bei Betrachtung der Tafel deutlich hervor.

Ich habe die Spectra des Wasserstoffs, Sauerstoffs und Stickstoffs ebenfalls bis zu der höchsten mir erreichbaren Temperatur verfolgt [1]), indem ich den Strom eines grossen Inductionsapparates, mit dem eine Leydener Flasche verbunden war, durch Wasserstoff von zwei Atmosphären Druck, Sauerstoff von 560mm und Stickstoff von 380mm Druck hindurchgehen liess. Bei allen dreien nahm die Helligkeit enorm zu, aber die Spectra verhielten sich sehr verschieden; das Spectrum des Wasserstoffgases wurde innerhalb $H\alpha$ und $H\gamma$ vollkommen continuirlich, wie das eines festen Körpers, beim Sauerstoff wurde es continuirlich im rothen und gelben, während die hellen Linien im brechbarern Theile des Spectrums ganz ungeändert blieben, nur erschienen sie nicht auf dunklem, sondern auf hellem Hintergrund. Beim Stickstoff blieben die sämmtlichen hellen Linien des zweiten Spectrums total ungeändert, nur nahmen sie gewaltig an Helligkeit zu und erschienen auf hellem Hintergrunde.

Alle diese Erscheinungen zeigen, dass wir die Constanz des Emissionsvermögens nicht allgemein annehmen können, dass vielmehr die Spectra eines Körpers sich wesentlich ändern können. Genaueres lässt sich darüber noch nicht aussagen, da man die mit dem Inductionsstrom erreichten Temperaturen noch nicht genau bestimmen kann, und da man bisher noch kein anderes Mittel kennt, um die Gase soweit zu erhitzen.

Nach den letzten Erfahrungen könnte es zweifelhaft sein, ob die von Kirchhoff gezogenen Schlüsse über die Beschaffenheit der Sonnenatmosphäre aus den hellen Linien der Metallspectra ihre volle Sicherheit bewahren, da wir die Temperatur der Sonne nicht kennen. Die Schlüsse bleiben indess vollkommen sicher, denn die Annahme, dass die dunklen Linien durch den Dampf eines bestimmten Metalles erzeugt werden, basirt auf der vollständigen Coincidenz der Fraunhofer'schen mit den bekannten für ein Metall charakteristi-

---

1) *Wüllner,* Poggend. Annal. Bd. CXXXVII.

schen Linien. So hat Kirchhoff auf das Vorhandensein von Eisen durch die Uebereinstimmung von mehr als 60 Linien geschlossen, eine Uebereinstimmung, welche Ångström und Thalén[1]) sogar für 450 Linien nachgewiesen haben. Aehnlich in andern Fällen. Anstatt an der Existenz der betreffenden Metalle in der Sonne zu zweifeln, wird man vielmehr zu der Annahme berechtigt sein, dass in der Sonnenatmosphäre, dort wo die Absorptionen statt finden, die Temperatur herrscht, welche die betreffenden Linien erzeugt.

§. 43.

Fluorescenz des Lichtes. Eine eigenthümliche Lichterscheinung beim Eintritt des Lichtes in eine Anzahl von festen und flüssigen Körpern wurde von Brewster[2]) und Herschel[3]) entdeckt und von ersterm innere, von letzterm epipolische Dispersion genannt.

Wenn man eine Lösung von schwefelsaurem Chinin, welche mit sehr wenig Schwefelsäure angesäuert ist, im durchgelassenen Lichte betrachtet, so zeigt sie, obwohl vollkommen durchsichtig und farblos wie Wasser, an der Oberfläche, durch welche das Licht in die Flüssigkeit tritt, eine sehr schöne himmelblaue Farbe.

Am besten dient zur Betrachtung dieser und der demnächst mitzutheilenden Erscheinungen ein parallelepipedisches Glasgefäss, das man sich selbst aus Glasplatten, die man mit Schellack oder Hausenblase zusammenkittet, herstellt. In einem solchen hat das Licht zu der Flüssigkeit von allen Seiten Zutritt, und will man es etwa von einer oder mehreren Seiten abhalten, so kann man das leicht durch Bedecken der Glaswand mit schwarzem nicht glänzendem Papier.

Der blaue Schein dringt nicht tief in die Flüssigkeit hinein, nach dem Durchgange durch die oberflächliche Schicht hat das Licht, obwohl nicht merklich geschwächt und gefärbt, das Vermögen zur Hervorbringung desselben Effectes verloren.

In einem Versuche, bei dem Sonnenlicht auf die Flüssigkeit fiel, drang der blaue Schein bis etwa ein Centimeter weit in die Flüssigkeit hinein. Wurde das „epipolisch dispergirte Licht“ mittels eines Prisma untersucht, so zeigte es sich zusammengesetzt aus Licht sehr verschiedener Brechbarkeit; das weniger brechbare Ende des Spectrums fehlte indess.

---

1) *Ångström*, Spectre solaire. Berlin 1869 bei Dümmler.

2) *Brewster*, Edinburgh Transactions. vol. XII. p. 542.
Report on the eight Meeting and Transactions of the Sections of the British Association for Advenc. of scienc. 1838. p. 10. On the decomposition and dispersion of light etc. Edinb. Transact. 1846. Poggend. Annal. Bd. LXXIII. p. 531.

3) *Herschel*, On a case of superficial colour etc. Philosoph. Transactions. 1845 p. 143.
On the epipolic dispersion of ligt etc. a. a. O. p. 147.

Bei Brewster's Versuchen wurde Sonnenlicht angewandt, und der mit einer Linse von kurzer Brennweite erzeugte Lichtkegel in die zu untersuchende Flüssigkeit hineingeleitet, so dass der Brennpunkt der Linse sich im Innern der Flüssigkeit befand. Es zeigte sich bei diesen Versuchen, dass bei einer Chininlösung das Licht sich nicht nur an der Oberfläche der Flüssigkeit bemerkbar machte, dort wo der Lichtkegel in dieselbe eintritt; es leuchtet vielmehr der ganze Lichtkegel in diesem eigenthümlichen schwach blauen Lichte, jedoch mit abnehmender Intensität, je tiefer er in die Flüssigkeit eindringt.

Nach Brewster's Versuchen zeigen eine ganze Anzahl von flüssigen und auch festen Körpern ganz ähnliche Erscheinungen. Wenn man von der gereinigten und dann zerkleinerten Rinde der Rosskastanie (Aesculus hippocastanum) einen wässrigen oder alkoholigen Aufguss macht, so zeigt dieser in gleicher Weise durch einen Lichtkegel beleuchtet einen ähnlichen schön blau leuchtenden Kegel. Das Wasser oder der Alkohol extrahirt aus der Rinde das Aesculin, und dieses ist es, was die Färbung des Lichtkegels veranlasst, wie gleiche Behandlung einer Aesculinlösung, welche wie die Chininlösung wasserklar ist, beweist.

Lösungen von Chlorophyll sind frisch bereitet in nicht zu dicken Schichten grün; im Tages- oder Sonnenlicht betrachtet, erscheinen sie jedoch rothbraun, und bringt man nach Brewster's Methode einen Lichtkegel hinein, so ist derselbe blutroth.

Curcumatinktur, im durchgehenden Lichte hellbraun, erscheint an der Oberfläche grün und der Lichtkegel ist ebenfalls grün mit einem Stich ins Gelbe.

Ein Würfel von Flussspath ist im gewöhnlichen Tageslichte ganz klar, wirft man einen Lichtkegel hinein, so erscheint derselbe sanft violettblau.

Uranglas erscheint im durchgehenden Lichte gelb, an der Oberfläche mit grünem Schiller, und mit einem Lichtkegel untersucht, erscheint derselbe hellgrün.

Bei den Herschel'schen Versuchen zeigte nur die Oberfläche jenen blauen Schein, er glaubte daher die Erscheinung so erklären zu können, dass die Flüssigkeit für die blauen Strahlen weniger durchgängig wäre als für die übrigen, und dass daher die blauen Strahlen eine Zerstreuung an der Vorderfläche der Flüssigkeit erführen, während Brewster, der mit dem Sonnenlichte jenen Kegel erhielt, die Erscheinung als einen besondern Fall der Farbenzerstreuung im Innern der Flüssigkeit auffasste.

Durch diesen Widerspruch zwischen den beiden ausgezeichneten Physikern veranlasst, nahm Stokes [1]) die Frage wieder auf und brachte in einer umfangreichen und gründlichen Untersuchung dieselbe zu einem ersten Abschluss,

1) *Stokes*, On the change of refrangibility of light. Philosoph. Transactions for 1852. p. 463. Poggend. Annal. Ergänzungsband IV.

indem er den Nachweis lieferte, dass wir in dieser Erscheinung eine eigenthümliche Wirkung des von den betreffenden Körpern absorbirten Lichtes wahrnehmen. Er schlug für dieselbe den Namen der Fluorescenz des Lichtes vor, da die Erscheinung zuerst im Flussspath (Fluorcalcium) beobachtet ist. Dieser Name ist jetzt allgemein angenommen.

Stokes wurde sofort auf einen merkwürdigen Umstand bei dieser Erscheinung aufmerksam, dass nämlich im gewöhnlichen Tages- und auch Sonnenlicht die bei der Chininlösung blau gefärbte Schicht nur eine sehr geringe Dicke hat, dass also das Licht sehr bald beim Eindringen in die Flüssigkeit die Fähigkeit verliert, den blauen Schein hervorzurufen, während man andererseits den blauen Schein durch eine Flüssigkeitsschicht von mehreren Zollen wahrnehmen kann. Noch auffallender zeigt sich die Erscheinung, wenn man mit einer Linse Sonnenstrahlen, welche bereits durch eine Chininlösung hindurchgegangen sind, und welche sich dem äussern Ansehen nach gar nicht geändert haben, in Form eines Lichtkegels in eine zweite Chininlösung hineinleitet. Es tritt dann weder der blaue Schein an der Oberfläche auf, noch auch zeigt der Lichtkegel jene blaue Färbung. Wenn man aber Sonnenstrahlen direkt in eine Chininlösung leitet, und so den blauen Schein und Lichtkegel erzeugt, und dann die Erscheinung durch eine mehrere Centimeter dicke Schicht von Chininlösung betrachtet, so sieht man den eigenthümlichen Schein und die blaue Färbung des Kegels gerade so, wie beim direkten Anblick.

Bei den sonstigen Licht- und Farbenerscheinungen zeigt sich bei derartiger Beobachtungsweise ein solcher Unterschied nicht; bei der Untersuchung eines Körpers im farbigen Lichte ist es einerlei, ob wir den Körper mit dem farbigen Lichte beleuchten, oder ob wir den beleuchteten Körper durch ein farbiges Mittel betrachten. Denn ein jedes derartiges Zwischenmittel hält nur Strahlen einer bestimmten Wellenlänge auf, und deshalb sehen wir den Körper immer nur mit den nicht von dem Zwischenmittel fortgenommenen Strahlen beleuchtet, ob wir dieselben fortnehmen, ehe das Licht den Körper trifft, oder aus dem von dem Körper wieder ausgesandten Lichte. Da sich nun aber bei der Chininlösung in dieser Beziehung ein Unterschied zeigt, so folgt, dass das bei der Fluorescenz erscheinende Licht verschieden ist von dem, welches die Fluorescenz hervorrief.

Ein ähnlicher Unterschied zeigte sich bei der Betrachtung der Chininlösung und anderer fluorescirender Substanzen, wenn man dieselben durch Licht beleuchtete, welches durch farbige Gläser oder Flüssigkeiten hindurchgegangen war, und wenn man die direkt beleuchteten Substanzen durch solche Gläser oder Flüssigkeiten betrachtete.

So sah Stokes, wenn er in einem dunklen Zimmer, in welches nur durch einen Spalt im Fensterladen Licht eintrat, ein zur Hälfte mit Chininlösung gefülltes Reagenzglas, das bis auf ein kleines Loch rings mit schwarzem Papier umgeben war, so gegen den Spalt hielt, dass das Licht durch die Oeffnung in die Flüssigkeit fiel, nahe der Oeffnung den blassblauen Bogen. Brachte

er nun vor den Spalt ein rauchfarbenes Glas, so dass das Licht, ehe es in die Chininlösung eintrat, das Glas durchsetzen musste, so verschwand der Bogen vollständig.

Betrachtete er aber die Chininlösung durch dieses Glas, so war der Bogen sichtbar, wenn auch in der Farbe etwas modificirt, mehr weisslich.

Ein blassbraunes (flohfarbenes) Glas hatte die entgegengesetzte Wirkung, in der ersten Stellung liess es den Bogen entstehen, in der zweiten jedoch verhinderte es die Wahrnehmung desselben. Ein gelbes Glas und ebenso ein gelblich grünes liess den Bogen in beiden Stellungen sehen, jedoch war die Farbe desselben entschieden anders, wenn das Glas vor dem Loche, als wenn es vor dem Auge war.

Aehnliches fand Stokes, als er nach der Brewster'schen Methode mittels einer Linse einen Lichtkegel in die Flüssigkeit sandte. Derselbe verhielt sich verschieden, je nachdem die farbigen Gläser in der einen oder andern Stellung waren.

Pisko stellt in einer übersichtlichen Tabelle die Wirkungen von Gläsern und Flüssigkeiten auf fluorescirende Substanzen je nachdem sie in der ersten Stellung, vor der Flüssigkeit, oder in der zweiten, vor dem Auge, sich befinden, zusammen [1]). Folgende Angaben sind daher entnommen. Seine Methode war einfach die angegebene, das durch einen Spalt in ein dunkles Zimmer eintretende Sonnenlicht wurde mit einer Linse in die Flüssigkeit geleitet und dann das farbige Mittel entweder vor die Linse oder vor das Auge gehalten. Ersteres ist als erste, letzteres als zweite Stellung bezeichnet.

1) *Pisko*, Die Fluorescenz des Lichtes. Wien 1861.

Fluorescirende Flüssigkeit	Zwischenmittel	I. Stellung	II. Stellung
Schwefels. Chinin wasserklar, fluorescirt blau.	Tiefrothes Glas.	Verschwunden.	Verschwunden.
	Dunkelgelb. Glas.	Verschwunden.	Schwach grün.
	Tiefblaues Glas.	Zartblau wie selbstleuchend.	Tiefblau wie das Glas.
	Einf. chroms. Kali.	Verschwunden.	Grün.
Wässerige Lösung von Aesculin. Lösung wasserklar, fluorescirt blau.	Tiefrothes Glas.	Verschwunden.	Fast verschw.
	Dunkelgelbes Glas.	Verschwunden.	Schwach grüngelb.
	Violettes Glas.	Blau, stärker als ohne Glas.	Veilchenblau.
	Einf. chroms. Kali.	Verschwunden.	Grasgrün.
Chlorophyll in Alkohol. Dunkel od. hellgrün klar, fluorescirt roth	Tiefrothes Glas.	Schwach blutroth.	Stärker blutroth.
	Grünes Glas.	Rothbraun.	Lichtgrün.
	Kupferchlorid.	Schwach roth.	Hellgrün.
	Schwelsaures Kupferoxyd-Ammoniak.	Roth nur wenig geschwächt.	Verschwunden.
Lakmus in Alkohol klar violettgefärbt, fluorescirt hellbraun, Lichtkegel hellgelb.	Tiefrothes Glas.	Schwach braun.	Hellroth.
	Violettes Glas.	Schwach violett.	Rothgelb.
	Einf. chroms. Kali.	Orange.	Lichtgelb.
	Kupferchlorid.	Gelb.	Grün bis gelb.
Curcumatinktur hellbraun u. klar, fluorescirt grün.	Tiefrothes Glas.	Verschwunden.	Roth.
	Tiefblaues Glas.	Grün.	Blaugrün.
	Violettes Glas.	Grün.	Gelb.
	Dopp. chroms. Kali.	Verschwunden.	Grüngelb.
	Schwefelsaures Kupferoxyd-Ammoniak.	Grün.	Verschwunden.
Uranglas durchsichtig gelb, fluorescirt grün.	Tiefrothes Glas.	Verschwunden.	Graugrün.
	Tiefblaues Glas.	Wie ohne Glas.	Olivengrün.
	Doppelt chroms. Kali.	Verschwunden.	Gelbgrün.
	Schwefelsaures Kupferoxyd-Ammoniak.	Wie ohne Glas.	Fast verschwunden.

Durch diese Versuche ist bewiesen, dass das bei der Fluorescenz erscheinende Licht verschieden ist von demjenigen, welches es hervorgerufen hat, und zwar, dass der fluorescirende Körper Licht von geringerer Brechbarkeit aussendet, als er in dem auffallenden Lichte erhält.

Die dritte Columne unserer kleinen Tabelle zeigt, dass fast immer die Farbe des Fluorescenzlichtes verschieden ist von der Farbe der auf die fluorescirenden Körper fallenden Strahlen; ja, dass fast immer, welches auch die Farbe der Zwischenmittel in der ersten Stellung ist, die Fluorescenzerscheinung, wenn sie nicht verschwunden ist, fast dieselbe Farbe besitzt, als wenn das Licht ohne Zwischenmittel die Substanzen trifft. Das Chlorophyll fluorescirt roth sowohl bei direkter Bestrahlung als auch bei Anwendung des rothen und grünen Glases oder des grünen Kupferchlorids oder der tiefblauen Lösung von schwefelsaurem Kupferoxydammoniak. Gleiches gilt von der Curcumatinktur, welche im direkten Sonnenlichte wie nach Zwischensetzung des blauen und violetten Glases sowie der blauen Kupferlösung in grünem Lichte fluorescirt. Ueberall ist zugleich die Farbe des fluorescirenden Lichtes weniger brechbar als diejenige des einfallenden Lichtes.

Durch ein farbiges Mittel angesehen dagegen erscheint das Fluorescenzlicht nahezu in der Farbe des Mittels. Die Curcumatinktur z. B. erscheint roth im rothen, blaugrün im blauen Glase, grüngelb in der gelben Lösung von einfach chromsaurem Kali; das durch eine blaue Lösung von Kupferoxydammoniak gegangene Licht erzeugt grünes Licht, welches aber durch eine solche Lösung nicht hindurchzugehen vermag.

Man kann diese Eigenschaft des fluorescirenden Lichtes nach der Angabe von Stokes[1]) sehr gut benutzen, um sehr schwache Spuren von Fluorescenz sichtbar zu machen. Stellt man vor den Spalt im Fensterladen eines dunklen Zimmers ein tiefblaues Glas oder eine Lösung von schwefelsaurem Kupferoxydammoniak, so dringt in das Zimmer nur dunkelblaues Licht, sieht man dann nach der Oeffnung durch ein gelbes Glas, so erscheint diese sowie das Zimmer fast ganz dunkel, da das blaue Licht durch das gelbe Glas nicht hindurch zu dringen vermag. In diesem blauen Lichte fluoresciren nun die meisten Substanzen, und das Fluorescenzlicht geht meist durch das gelbe Glas hindurch. Bringt man daher hinter das blaue Glas oder die blaue Lösung eine auf ihre Fluorescenz zu untersuchende Substanz und blickt auf dieselbe durch das gelbe Glas, so sieht man in dem sonst fast ganz dunklen Raume auch die schwächsten Spuren des fluorescirenden Lichtes. Meist bedarf es nicht einmal des gelben Glases zur Abhaltung des blauen Lichtes, da auch ohnedem der Raum so dunkel beleuchtet ist, dass man das Fluorescenzlicht wahrnehmen kann.

1) *Stokes,* Poggend. Annal. Bd. XCVI. p. 523.

§. 44.

Prismatische Untersuchung der Fluorescenz. Einen genauern Aufschluss über die Frage, welches Licht die Fluorescenz erzeugt und wie die Brechbarkeit des Lichtes in der Fluorescenz geändert wird, erhielt Stokes, indem er die fluorescirenden Körper mit dem homogenen Licht des Spectrums beleuchtete und das erzeugte Fluorescenzlicht mit dem Prisma untersuchte.

Stokes wandte bei dieser Untersuchung besonders drei Methoden an [1]). Bei der ersten erzeugte er mittels dreier hinter einander gestellter Prismen, die dicht hinter einander standen, ein Spectrum. Unmittelbar hinter dem letzten Prisma stand eine Linse, welche die dispergirten Strahlen auffing.

In dem Brennpunkte der Linse, in dem sich alle Strahlen kreuzen, erscheint dann ein kleines weisses Sonnenbildchen, und von ihm aus divergiren die farbigen Strahlen nach verschiedenen Richtungen als ebenso viele farbige Strahlenkegel, deren Axen in einer horizontalen Ebene liegen, und welche sich im Brennpunkt der Linse schneiden. Die zu untersuchende Flüssigkeit in einem parallelepipedischen Glasgefäss wurde so gehalten, dass der Brennpunkt auf die vordere Fläche der Flüssigkeit fiel.

Bei der zweiten Methode wurde in der §. 23 angegebenen Weise mit Prisma und Linse ein scharfes Spectrum erzeugt, und auf die Vorderfläche der zu untersuchenden Substanz geworfen, so dass diese die Stelle des §. 23 erwähnten Papierschirmes vertrat.

Bei der dritten Methode schliesslich wurde eine kleine Linse von kurzer Brennweite in die einzelnen Theile des Spectrums gehalten, um anstatt des weissen Lichtkegels bei Anwendung des direkten Sonnenlichtes einen homogen einfarbigen Lichtkegel auf die Substanz wirken zu lassen.

Bei der Untersuchung einer Chininlösung nach der ersten Methode sah man in derselben zwei Lichtbündel, die bei ihrem Eintritte in die Flüssigkeit von einander getrennt waren, und weiterhin noch mehr aus einander gingen.

Jedes Bündel bestand aus einer Reihe von Kegeln, deren Axen vom Brennpunkt der Linse aus divergirten. Das erste oder das durch Licht geringerer Brechbarkeit erzeugte Bündel bestand aus den hellern Farben des Spectrums in der natürlichen Ordnung; es hatte ein funkelndes discontinuirliches Ansehen, und rührte offenbar daher, dass das durch die Flüssigkeit dringende Licht von Staubtheilchen, welche in derselben schwebten, zurückgeworfen wurde.

Das zweite Bündel war viel heller, seine Farbe, ein schönes Himmelblau, war überall gleich; allein dicht an dem dem andern Bündel zugewandten Rande, wo es aus den am schwächsten brechbaren Strahlen bestand, die es zu bilden vermochten, war die Farbe weniger rein.

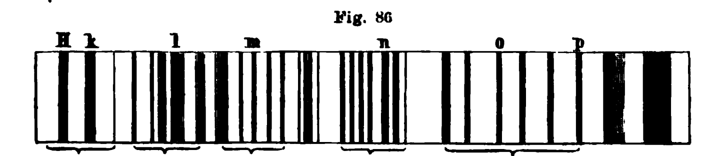
---

1) *Stokes*, Poggend. Annal. Ergänzungsband IV. p. 188—285.

Aehnliches zeigten alle nach dieser Methode untersuchten Substanzen, bei allen trat neben dem nicht durch Fluorescenz erregten Lichtbündel das an der brechbaren Seite des Spectrums liegende fluorescirende Lichtbündel auf. Nur ein Würfel aus Flussspath von Alston Moor liess das erste Bündel gar nicht sehen, sondern nur das fluorescirende, jedoch trat von diesem ganz getrennt im Roth ein schwacher fluorescirender Streifen rothen Lichtes auf. Untersuchte man das Licht einer Kerzenflamme, nachdem es durch einen solchen Würfel hindurchgegangen war, so zeigte es gerade an der Stelle des Spectrums, wo die rothe Fluorescenz auftrat, einen dunklen Absorptionsstreifen.

Dieser Versuch zeigt, dass es hauptsächlich die brechbaren Strahlen des Spectrums sind, welche Fluorescenz erzeugen. Noch deutlicher zeigt sich das bei einer Untersuchung nach der zweiten Methode. Wirft man das Spectrum auf ein ziemlich breites Gefäss, das eine klare Lösung von Chinin enthält, so sieht man, dass die minder brechbaren Farben etwa bis zur Fraunhofer'schen Linie *G* ungehindert durch die Flüssigkeit hindurchgehen und nur hier und da durch Reflexion an schwebenden Staubtheilchen zu sogenannter falscher innerer Dispersion Anlass geben. Bei *G* beginnt die Fluorescenz eben merklich zu werden und die dunkle Linie *G* erscheint in der Flüssigkeit als eine dunkle Ebene, die eine Masse stetigen aber ungemein schwachen Lichtes unterbrach. In der Mitte zwischen *G* und *H* dagegen wurde das Licht heller und mehr gegen die Linie *H* hin nahm es eine blass himmelblaue Farbe an. Das Licht begrenzt sich jedoch nicht auf den sichtbaren Theil des Spectrums, sondern geht noch weit über das violette Ende des Spectrums hinaus. In diesem Theile lassen sich eine ganze Reihe von Fraunhofer'schen Linien erkennen, die das in blaugrauem Lichte leuchtende verlängerte Spectrum durchsetzen. Stokes liefert von dem Spectrum beistehende Zeichnung (Fig. 86), in

Fig. 86



der die Linie *H* mit der Fraunhofer'schen im Violetten (Fig. 61) identisch ist. Stokes theilte die Linien in Gruppen, die er mit den kleinen Buchstaben *l*, *m*, *n*, *o*, *p* bezeichnete. Die deutlichsten Linien dieser Gruppen fallen mit den schon anderweitig durch die chemische Action der Strahlen bekannten und mit den grossen Buchstaben *L*, *M*, *N*, *O*, *P* bezeichneten Linien im sogenannten ultravioletten Lichte zusammen.

Aus diesem Versuche geht demnach einmal hervor, dass in dem Sonnenlicht noch eine ganze Reihe von Strahlen grösserer Brechbarkeit als die sichtbaren violetten Strahlen enthalten sind, und dass es gerade diese ultravioletten Strahlen sind, welche hauptsächlich fluorescirend wirken.

Aesculinlösung, Flussspath von Alston Moor etc. verhielten sich gerade wie Chininlösung.

Die dritte Methode diente nun weiter dazu, noch genauer die Wirkung der einzelnen Theile des Spectrums zu untersuchen, indem die Strahlen concentrirter in die Flüssigkeit hineingeleitet und zugleich die übrigen Strahlen abgehalten wurden.

So zeigte sich mit dieser Methode beim schwefelsauren Chinin die Fluorescenz schon im Blau und das fluorescirende Licht gab sich als eine kleine Menge Roth zu erkennen; beim Flussspath von Alston Moor zeigte sich die Fluorescenz hauptsächlich im brechbaren Theile des Spectrums, nur an einer bestimmten Stelle des Rothen trat ein schwacher rother fluorescirender Schein auf.

Ein sehr eigenthümliches Verhalten bot die frisch bereitete Lösung von Chlorophyll dar. Nach der zweiten Methode untersucht, erschienen die Fraunhofer'schen Linien in dem ganzen brechbaren Theile des Spectrums als Unterbrechungen eines hellrothen ins Karmoisin fallenden Grundes; bei *H* etwa begann die Farbe ins Braune zu neigen, und die festen Linien *l*, *m*, *n*, erschienen auf bräunlich rothem Grunde.

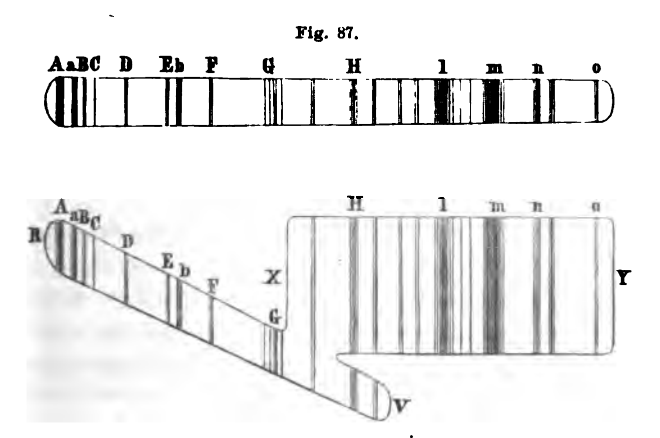
Bei der Untersuchung nach der dritten Methode trat die Fluorescenz zuerst auf in dem brechbarsten Theile des äussersten rothen Streifens, den die Flüssigkeit bei mässiger Dicke hindurchlässt, daneben kam ein heller rother, nur auf die Oberfläche der Flüssigkeit beschränkter Streifen. Wenn auch hier das erzeugende wie das Fluorescenzlicht roth war, so zeigte sich doch deutlich, dass das Fluorescenzlicht dem rothen Ende des Spectrums näher lag. In den orange gefärbten und gelben Theilen des Spectrums wurde die Fluorescenz schwach und erst weiterhin im Grün wurde sie stark und blieb stark über das violette Ende des Spectrums hinaus.

Es würde zu weit führen, hier alle von Stokes untersuchten Substanzen einzeln zu betrachten; es genüge, das allgemeine Resultat anzuführen, zu dem er gelangte und welches er in dem Satz ausspricht: „Stets ist im Fluorescenzlicht die Brechbarkeit kleiner als in dem die Fluorescenz erzeugenden Lichte".

Eine prismatische Untersuchung des Fluorescenzlichtes zeigt dasselbe und zugleich, dass, wenn auch das erregende Licht homogen war, das erregte doch stets zusammengesetzt ist. Wenn man bei der zweiten der erwähnten Untersuchungsmethoden anstatt einer Lösung von Chinin oder Aesculin ein stark mit der Lösung getränktes Papier nimmt, so erscheint auf demselben das ganze Spectrum, also auch der durch die Lösung hindurchgehende sichtbare Theil desselben. Wenn man nun den Spalt sehr kurz nimmt und das Spectrum durch ein Prisma mit verticaler brechender Kante erzeugt, so erhält man ein sehr schmales Spectrum. Wenn man dann das so erzeugte Spectrum *AC* (Fig. 87) durch ein Prisma mit horizontaler brechender Kante betrachtet, so wird das Spectrum in zwei Theile zerlegt (Fig. 87).

Zunächst sieht man das abgelenkte Spectrum, welches herrührt von dem in gewöhnlicher Weise von dem Papier zerstreuten Lichte, in der §. 17 (Fig. 51) angegebenen Weise; ausserdem sieht man aber noch ein zweites

Fig. 87.



Spectrum xy, als Spectrum des fluorescirenden Lichtes. In diesem laufen die einzelnen Farben horizontal, und zwar in der Reihenfolge des gewöhnlichen Spectrums, oben roth, darunter gelb u. s. w., so dass die einzelnen Fraunhofer'schen Linien die sämmtlichen Farben durchsetzen. Das Spectrum der fluorescirenden Strahlen, von Stokes als derivirtes bezeichnet, liegt stets an der obern Seite des abgelenkten und ist somit weniger gebrochen, die rothen, gelben u. s. w. Strahlen liegen in gleicher Höhe mit den Farben im abgelenkten Spectrum.

Es folgt also daraus auf das überzeugendste, dass durch Fluorescenz die Brechbarkeit der Strahlen vermindert, und dass durch homogenes die fluorescirende Substanz treffendes Licht zusammengesetztes Licht von kleinerer Brechbarkeit erzeugt wird.

An welcher der Fraunhofer'schen Linien das derivirte Spectrum seinen Anfang nimmt, hängt von der fluorescirenden Substanz ab, welche man wählt. Beim Chlorophyll fängt es schon beim Roth an, beim Curcumapapier bei der Linie F, beim Chinin und Aesculinpapier erst bei G, beim Uranglas schon bei der Linie E. Ebenso hängt davon ab, welche Farbe im derivirten Spectrum vorherrscht; beim Chlorophyll roth, beim Chinin blau, beim Uranglas grün. Das violette Ende fehlt jedoch immer, deshalb reicht das abgelenkte Spectrum stets tiefer hinab.

Wendet man anstatt der Papiere eine Lösung an, welche nur wenig zerstreutes Licht zurückwirft, so verschwindet das abgelenkte Spectrum fast ganz und man sieht nur das derivirte Spectrum.

Die Untersuchung nach der zweiten Methode macht noch auf einen wichtigen, vorhin schon erwähnten Umstand aufmerksam, der für die Theorie der Erscheinung von hoher Bedeutung ist.

Die Fluorescenz wird dort meist nur von den brechbarsten Strahlen erzeugt; untersucht man nun ein Lichtbündel prismatisch, nachdem es durch eine fluorescirende Flüssigkeit hindurchgegangen ist, so findet man, dass die brechbarsten Strahlen von dieser ganz absorbirt sind, eine Erscheinung, die den engen Zusammenhang zwischen Absorption und Fluorescenz zeigt, die beweist, dass es das absorbirte Licht ist, welches die Fluorescenz hervorruft. Sehr auffallend ist dieser Satz bewiesen durch die Fluorescenzerscheinungen im Flussspath von Alston Moor, in den Lösungen von Chlorophyll und im Uranglas. Nach der dritten Methode untersucht erscheinen helle Fluorescenzstreifen in den beiden ersten Substanzen an gewissen Stellen des Spectrums geringerer Brechbarkeit; beim Flussspath im Roth, beim Chlorophyll im Roth und Grün; das durchgelassene Licht mit dem Prisma untersucht zeigt an denselben Stellen des Spectrums dunkle Absorptionsstreifen. Es ist somit der Satz gerechtfertigt, dass überall dort, wo im Spectrum eine helle Fluorescenz sich zeigt, im durchgelassenen Licht ein Absorptionsstreifen auftritt.

§. 45.

Phosphorescenz. Mit der Fluorescenz sehr nahe verwandt ist eine andere Wirkung des Lichtes auf eine grosse Anzahl von Körpern, welche mit dem Namen der Phosphorescenz bezeichnet wird. Unter dem Einfluss des Lichtes der Sonne oder irdischer Lichtquellen beginnen eine grosse Zahl von Körpern, wie es die fluorescirenden thun, ein sanftes Licht auszustrahlen, ohne dass sich in den Körpern die geringste chemische Aenderung zeigt. Die phosphorescirenden Körper senden aber das Licht auch noch nach der Bestrahlung aus, während die fluorescirenden sehr bald oder gar unmittelbar nach der Bestrahlung erlöschen.

Es gibt eine ziemliche Anzahl natürlicher und künstlicher Minerale, die diese Eigenschaft der Phosphorescenz in ganz ausgezeichnetem Maasse besitzen und welche daher den Namen Leuchtsteine oder Lichtsauger erhalten haben. Zu den natürlichen Phosphoren gehören besonders der Diamant, der Kalkspath, gewisse Varietäten von Flussspath, unter diesen besonders der mit dem Namen Chlorophan bezeichnete Flussspath von Nertschinsk[1]). Unter den künstlichen Phosphoren sind besonders hervorzuheben die Schwefelverbindungen der alkalischen Erden, welche man durch Glühen von Schwefel mit Kalk, Baryt oder Strontian oder auch mit deren Carbonaten oder schliesslich durch Reduction der Sulfate dieser alkalischen Erden mit Kohle erhält[2]).

Um die Phosphorescenzerscheinung bei diesen Körpern hervorzurufen, genügt es, dieselben eine kurze Zeit dem Lichte der Sonne oder auch nur dem

---

1) *E. Becquerel* zählt Ann. de chim. et de phys. III. Sér. T. LV und noch vollständiger in: La lumière, sa cause et ses effets. Paris. 1867, dessen 1. Bd. zur Hälfte von der Phosphorescenz handelt, alle phosphorescirenden Substanzen auf.

2) *E. Becquerel* a. a. O. und La lumière etc. p. 207 ff. *Forster*, Poggend. Ann. Bd. CXXXIII.

diffusen Tageslichte auszusetzen und dann in einen dunklen Raum zu bringen, in welchem der Beobachter sich bereits eine Zeitlang vorher aufgehalten hat, um sein Auge auch für ganz schwache Lichtwirkungen empfindlich zu machen. Ein anderes Mittel, um die Phosphorescenz sichtbar zu machen, ist die Beleuchtung der Phosphore mit elektrischem Lichte. Zu dem Ende werden die Phosphore am besten in gepulverter Form in eine weite Röhre gebracht, in deren Enden ähnlich wie bei den Geissler'schen Röhren Drähte eingeschmolzen sind, und dann die Luft in der Röhre sehr stark verdünnt. Man verbindet dann die Drähte der Röhre mit den Polen des Inductionsapparates und lässt eine Zeitlang den elektrischen Strom durch die Röhren hindurchgehen.

Erregt man die Phosphorescenz auf die eine oder andere Weise, so sieht man die Phosphore im Dunkeln jeden mit einer bestimmten ihm eigenthümlichen Farbe leuchten, welche nicht nur von der Zusammensetzung des Phosphors, sondern auch wesentlich von seiner physikalischen Beschaffenheit abhängt. Dabei ist zunächst die Temperatur, bis zu welcher der Phosphor bei der Darstellung erwärmt wurde, von wesentlichem Einfluss. So gab bei den Versuchen Becquerel's [1]) ein Phosphor, der aus Glühen von Arragonit und nachherigem Zusammenbringen des so erhaltenen Kalkes mit Schwefel erhalten war, ein bläuliches Licht, als seine Temperatur nicht über 500^0 gesteigert war, dagegen ein sehr lebhaftes grünes Licht, als er während 30 Minuten einer Temperatur von etwa 900^0 ausgesetzt war.

Einen ganz merkwürdigen Unterschied zeigte das Schwefelcalcium in Bezug auf die Farbe des Phosphorescenzlichtes je nach der Form, in welcher der Kalk mit dem Schwefel zusammen erhitzt wurde. Die Farbe des Phosphorescenzlichtes wurde, als mit Schwefel zusammen geglüht war

Reiner isländischer Doppelspath . . .	orangegelb
Kalk aus Doppelspath	desgl. weniger hell
Weisser Marmor	gelb, sehr schwach
Kalk aus Marmor	desgl. desgl.
Kalk aus Austernschalen	gelb
Kalk aus Kalkstein	gelb, sehr schwach
Kalk aus Kreide oder Kreide	gelb, kaum sichtbar
Arragonit von Vertaison	grün, ziemlich hell
Kalk aus Arragonit	grün, schwach
Faseriger Arragonit	violett
Kalk aus faserigem Arragonit	grün, sehr hell.

Wurden die Kalksalze vorher in Säure, Salpetersäure oder Salzsäure aufgelöst, dann mit kohlensaurem Ammoniak gefällt, und der so erhaltene kohlensaure Kalk mit Schwefel geglüht, so wurden die Farben wieder andere. Ein so aus weissem Marmor dargestellter Phosphor leuchtete violett, ein aus

1) *E. Becquerel,* La lumière etc. p. 218.

Austernschalen erhaltener grün[1]). Aehnlich verhielten sich die andern phosphorescirenden Substanzen.

Auf die Farbe des Phosphorescenzlichtes ist ebenfalls von Einfluss die Temperatur, bei welcher der Körper der Wirkung der Lichtstrahlen ausgesetzt wird. Für ein Schwefelstrontium gibt Becquerel folgende Farben an:

Temper.	Farbe	Temper.	Farbe
— 20°	Violett, sehr hell	+ 90	Gelbgrünlich
+ 20	Blauviolett	100	Gelb
40	Hellblau	200 ungef.	Orange
70	Grünlich		

Für verschiedene Schwefelcalcium ist die Farbenfolge umgekehrt, mit steigender Temperatur nähert sich die Farbe mehr dem brechbaren Ende des Spectrums[2]).

Die Dauer des Phosphorescenzlichtes nach der Insolation ist für die verschiedenen Körper eine sehr verschiedene[3]). Die Mehrzahl der Mineralien und Salze besitzt die Fähigkeit zu leuchten nur wenige Sekunden oder höchstens einige Minuten, und vielfach bedurfte es eines längern Verweilens im dunkeln Zimmer, um nach ganz kurzer Zeit überhaupt noch ein Leuchten wahrzunehmen.

Zwischen der Intensität des Phosphorescenzlichtes und der Dauer des Leuchtens existirt keine Beziehung; gewisse Mineralien, wie der Arragonit, leuchten ziemlich hell, aber nur etwa 20 Sekunden nach der Insolation, der Chlorophan dagegen und gewisse Diamanten, welche nach der Belichtung viel weniger hell leuchten, erlöschen erst nach mehr als einer Stunde. Dasselbe zeigt sich bei den Schwefelverbindungen der Erden, deren mehrere länger als 30 Stunden leuchten.

Nachdem Becquerel erkannt hatte, dass die Dauer der Phosphorescenz eine sehr verschiedene sein konnte, vermuthete er, dass das Phänomen ein sehr viel allgemeineres sei, als man bisher angenommen, und dass man nur deshalb in vielen Fällen die Phosphorescenz nicht wahrgenommen, weil sie zu rasch nach der Belichtung verlischt. Er construirte deshalb einen eigenen Apparat, das Phosphoroskop, mit welchem er die Körper wenige tausendstel Sekunden nach der Belichtung beobachten konnte[4]). Das Phosphoroskop in der von Becquerel angewandten Form zeigt Fig. 88, die innere Einrichtung Fig. 89.

---

1) *E. Becquerel* a. a. O. p. 219 ff.

2) *E. Becquerel* a. a. O. p. 386 ff.

3) *E. Becquerel* a. a. O. p. 244 ff.

4) *E. Becquerel*, Annales de chim. et de phys. III. Sér. T. LV. La lumière p. 249. Etwas einfachere Formen des Apparates fertigt *Duboscq* in Paris (Rue de l'Odéon) an.

In einer innen geschwärzten Blechbüchse M, welche in ihrer vordern und hintern Wand zwei genau entsprechend liegende sectorenförmige Einschnitte

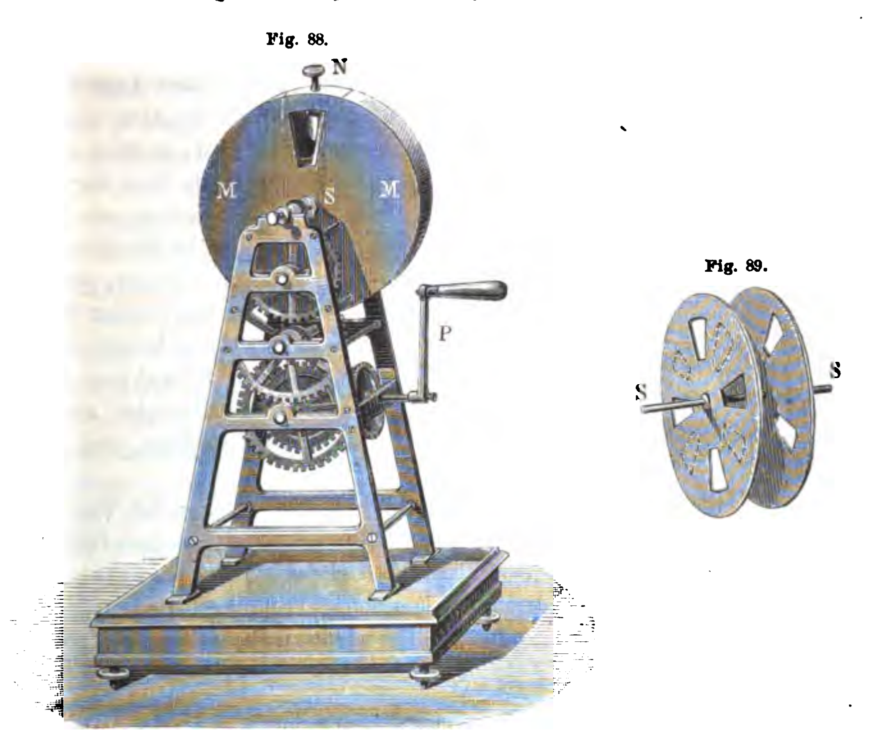


Fig. 88. Fig. 89.

hat, sind auf einer Axe S zwei Scheiben angebracht, deren Einrichtung Fig. 89 zeigt.

Auf jeder der Scheiben sind sectorenartige Einschnitte, in der Zeichnung vier, deren Breite etwa $^1/_3$ des Zwischenraumes zwischen je zwei Oeffnungen beträgt, so angebracht, dass die in der einen Scheibe befindlichen Oeffnungen sich gerade vor der Mitte des undurchsichtigen Theiles der andern Scheibe befinden. Die Scheiben selbst befinden sich möglichst nahe an dem vordern und hintern Boden der Büchse. Auf der Axe der Scheiben, ausserhalb der Büchse ist ein Trieb eingeschnitten, in welchen die Zähne des letzten zu dem Räderwerk gehörigen Zahnrades eingreifen. Das Räderwerk wird durch die Kurbel P gedreht, und damit das Scheibenpaar je nach der Schnelligkeit, mit der man dreht, in eine mehr oder weniger rasche Rotation versetzt. Das Phosphoroskop wird nun so aufgestellt, dass die von einem Heliostaten reflectirten Sonnenstrahlen auf die Oeffnung des vordern Bodens über S fallen, während das Auge des Beobachters sich auf der entgegengesetzten Seite der Büchse vor der dort befindlichen Oeffnung befindet. Der Körper, dessen Phosphorescenz untersucht werden soll, wird, wie es die Figur zeigt, mit Hülfe eines an dem Knopfe N befindlichen Rähmchens zwischen die beiden

rotirenden Scheiben gehängt. Werden nun die Scheiben in Rotation versetzt, so erhält der Körper jedesmal dann Licht, wenn eine der Oeffnungen der vordern Scheibe vor der Oeffnung des vordern Bodens ist; da aber dann die Oeffnung des hintern Bodens durch den undurchsichtigen Theil der hintern Scheibe bedeckt ist, so kann jetzt keine Spur von Licht zu dem Auge des Beobachters gelangen. Wenn dann aber bei der Drehung der Scheiben eine Oeffnung der hintern Scheibe vor die Beobachtungsöffnung tritt, so wird nur das von dem Körper ausgesandte Phosphorescenzlicht sichtbar, da dann die andere Oeffnung des Apparates verdeckt ist. Dreht sich das Scheibenpaar in der Sekunde einmal, so wird bei der angenommenen Theilung der Scheiben, vier Oeffnungen auf jeder, deren jede $^1/_{16}$ des Kreisumfanges umfasst, und von denen die zugewandten Seiten der Oeffnungen der vordern und hintern Scheibe $^1/_{16}$ Kreisumfang von einander entfernt sind, die Zeit zwischen Belichtung und Beobachtung $^1/_{16}$ Sekunde. Wird das Scheibenpaar etwa 100mal gedreht, so beobachtet man den phosphorescirenden Körper 0,0006 Sekunden nach der Belichtung. Ebenso lange ist dann der Körper jedesmal sichtbar, und ebenso lange dauert die Belichtung.

Mit Hülfe des Phosphoroskopes fand nun E. Becquerel in der That, dass die Phosphorescenz eine viel allgemeinere Eigenschaft sei, als man früher geglaubt hatte. Die Alkalien, die alkalischen Erden und Erden, sowie deren sämmtliche Salze, insbesondere die Aluminiumverbindungen zeigten bei hinreichend rascher Drehung lebhaftes Phosphorescenzlicht; so ebenfalls fast alle organischen Substanzen.

Nur die Verbindungen der Schwermetalle zeigten im Allgemeinen keine Phosphorescenz, jedoch auch hier lieferten einige ein helles Licht, aber von kurzer Dauer. Es sind das gerade jene Metallverbindungen, welche nach Stokes vorzüglich fluoresciren, wie die Uransalze und einige Platinsalze. Ueberhaupt gelang es Becquerel den Nachweis zu liefern, dass alle festen fluorescirenden Körper auch Phosphorescenzlicht geben, wenn dieses Licht auch nur sehr kurze Zeit dauert. Nur für die fluorescirenden Flüssigkeiten liess sich auch bei der schnellsten Bewegung des Phosphoroskopes keine Phosphorescenz erkennen. Nichts destoweniger glaubt Becquerel, dass man nicht zu der Annahme berechtigt sei, dass diese Körper überhaupt keine Phosphorescenz zeigen, und nimmt dann weiter an, dass Fluorescenz und Phosphorescenz ihrem Wesen nach nicht verschieden seien, dass die Fluorescenz nur eine Phosphorescenz von sehr kurzer Dauer sei [1]).

Darnach würde also die Phosphorescenz ebenfalls nur die Wiederausgabe einer gewissen Quantität von bei der Belichtung absorbirtem Lichte sein, eine Folgerung, welche Becquerel durch eine Reihe von Versuchen bestätigte. Zunächst folgt aus dieser Annahme, dass bei den Versuchen mit dem Phosphoroskop die Intensität des ausgestrahlten Phosphorescenzlichtes abhängig

1) *E. Becquerel,* La lumière etc. p. 316 ff.

sein kann von der Geschwindigkeit der Rotation, wenigstens dann, wenn die Phosphorescenz nicht von zu kurzer Dauer ist. Dieses Maximum wird dann erreicht sein, wenn während der jedesmaligen Belichtung der Verlust an Licht innerhalb des zwischen je zwei Belichtungen verstrichenen Zeitraums wieder ersetzt wird. Die von dem Körper ausgegebene Lichtmenge ist aber um so grösser, je länger, um so kleiner, je kürzer der Zwischenraum zwischen je zwei Belichtungen ist, und ist der Zeitraum kurz genug, so kann durch die folgende Belichtung der ganze Verlust wieder ersetzt werden. In der That fand Becquerel für eine Reihe von Substanzen, dass die Helligkeit zunahm, bis die Geschwindigkeit der Rotation eine gewisse Grösse erreichte, so bei gewöhnlichem Glase, bis die Zwischenzeit zwischen Belichtung und Beobachtung 0″,0033 betrug [1]).

Ferner wies Becquerel nach, dass die Intensität des Phosphorescenzlichts jener des einfallenden Lichtes proportional war [2]). Zur Führung dieses Nachweises wurde die Oeffnung in der dem Lichte zugewandten Seit des Phosphoroskopes dadurch veränderlich gemacht, dass ein Schieber mit einer Mikrometerschraube vor derselben verschoben und so die Breite der Oeffnung zwischen $0^{mm},5$ und 24^{mm} variirt werden konnte. Indem die Geschwindigkeit der Rotation constant erhalten wurde, wurde dann mit einem später zu beschreibenden Photometer die Intensität des Phosphorescenzlichtes gemessen. Es ergab sich, dass die Intensität desselben der Grösse der vordern Oeffnung, somit der Menge des den phosphorescirenden Körper treffenden Lichtes proportional war. So erhielt Becquerel z. B. für die Intensität des Phosphorescenzlichtes bei einem kohlensauren Kalk folgende Werthe

Breite der vordern Oeffnung $= B$	Intensität des Phosphoresc. $= J$	$\frac{J}{B}$
1^{mm}	0,0020316	0,0020316
2^{mm}	0,0035519	0,0017759
4^{mm}	0,0075962	0,0018990
8^{mm}	0,0155640	0,0019455
16^{mm}	0,0337330	0,0021083
24^{mm}	0,0506030	0,0021083

Die letzte Columne lässt erkennen, dass die Intensität des Phosphorescenzlichtes in der That der Grösse der Oeffnung proportional gesetzt werden kann, da die Abweichungen der Zahlen von einander innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler fällt.

Für die Anschauung Becquerel's, dass wir in dem Phosphorescenzlicht die Wiederausgabe einer gewissen Quantität des absorbirten Lichtes vor uns haben, spricht ebenfalls das Gesetz, nach welchem die Intensität des Phosphorescenzlichtes abnimmt, wenn es während des allmählichen Verlöschens

1) *E. Becquerel* a. a. O. p. 260 ff.
2) *E. Becquerel* a. a. O. p. 265.

immer dieselbe Farbe beibehält. Unter der Voraussetzung, dass durch das Ausstrahlen ein Verlust von Licht eintritt, und dass dieser Verlust der in jedem Moment vorhandenen Intensität proportional ist, ergibt sich für die Abnahme der Intensität folgendes Gesetz. Ist die Intensität im Momente, in welchem die Bestrahlung aufgehört, gleich i_0, so wird in dem ersten Momente dt, den wir als verschwindend klein voraussetzen, der Verlust gleich $a \cdot i_0 \cdot dt$. Nach dem ersten Moment ist dann die Intensität noch

$$i_0 - a\, i_0\, dt = i_0\, (1 - a \cdot dt).$$

Der in dem zweiten Momente stattfindende Verlust ist dann

$$a\, i_0\, (1 - a\, dt)\, dt$$

und die nach diesem zweiten Momente vorhandene Intensität ist

$$i_0\, (1 - a\, dt) - a\, i_0\, (1 - a dt)\, dt = i_0\, (1 - a dt)^2,$$

und in derselben Weise erhalten wir, dass die nach $n\, dt$ Momenten oder nach der Zeit t noch vorhandene Intensität ist

$$i = i_0\, (1 - a\, dt)^n,$$

worin, wenn t eine messbare Zeit ist, n unendlich gross sein muss, da dt verschwindend klein ist. Wir können diese Gleichung schreiben

$$\log \frac{i}{i_0} = n \cdot \log\, (1 - a \cdot dt),$$

und entwickeln wir den Logarithmus auf der rechten Seite in schon mehrfach früher angewandter Weise in eine Reihe, so wird

$$n \log\, (1 - a\, dt) = -\, n \left\{ a\, dt + a^2 \left(\frac{dt}{2}\right)^2 + a^3 \left(\frac{dt}{3}\right)^3 + \cdots \right\}$$

und weiter, da $n\, dt = t$ ist,

$$\log \frac{i}{i_0} = -\, at - a^2\, t \cdot \frac{dt}{2} - \cdots$$

Auf der rechten Seite verschwinden, da dt verschwindend klein ist, alle Glieder ausser dem ersten, da alle mit positiven Potenzen von dt multiplicirt sind. Damit wird

$$\log \frac{i}{i_0} = -\, a\, t$$

oder

$$i = i_0 \cdot e^{-at},$$

wenn e, wie immer, die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystemes ist. Die Intensität muss somit nach einer geometrischen Reihe abnehmen, wenn die Zeit nach einer geometrischen wächst.

Um das Gesetz zu prüfen bestimmte Becquerel unter andern die Intensität eines grün leuchtenden Uranglases[1]) bei sehr verschiedener Geschwindigkeit der Scheiben des Phosphoroskops, also zu sehr verschiedenen Zeiten nach der

1) *E. Becquerel*, La lumière etc. p. 278.

Insolation. Ist die Intensität nach der Zeit t_1 dann i_1, nach der Zeit t_2 dann i_2, so gibt obiges Gesetz

$$\log i_1 - \log i_0 = - a\, t_1;\ \log i_2 - \log i_0 = - a\, t_2$$
$$a = \frac{\log i_1 - \log i_2}{t_2 - t_1}.$$

Wenn nun das Gesetz richtig ist, so muss, welche je zwei beobachteten Werthe man auch combinirt, der Werth von a immer derselbe sein.

Für das Uranglas erhielt Becquerel so, wenn die Zeit t in tausendstel Sekunden ausgedrückt wurde, als Werth von $a = 0{,}5546$ als Mittel aus vielen wenig abweichenden Bestimmungen.

Wir haben vorhin bei Angabe dieses Gesetzes die Beschränkung gemacht, dass das Licht des phosphorescirenden Körpers einfarbig sei, oder doch seine Farbe nicht ändere. Aendert das Licht seine Farbe, so kann dieses Gesetz nicht in der einfachen Form bestehen, da dann die Werthe von a für die verschiedenen Farben verschieden sind.

Das Gesetz ist überhaupt nur ein angenähertes, es gilt nach den Versuchen Becquerel's nicht mehr, wenn die Phosphorescenz eine beträchtliche Dauer hat. Etwas ganz ähnliches werden wir im dritten Theil in Betreff der Abkühlung der Körper finden, wo ganz dasselbe Gesetz gilt, wenn ein Körper nur wenig wärmer ist als seine Umgebung, und wo das Gesetz der Abkühlung ebenfalls complicirter ist, wenn der Körper eine beträchtlich höhere Temperatur hat als seine Umgebung.

Einen weitern Beleg für die Auffassung von Becquerel liefert der Einfluss der Wärme auf die Phosphorescenzerscheinungen. Es ist schon eine alte Erfahrung, dass gewisse Körper, wie Flussspath, Diamant u. a. durch Erwärmen zum Phosphoresciren kommen [1]), diese Phosphorescenz ist aber, wenn der Körper constant auf höherer Temperatur erhalten wird, nur vorübergehend; der Körper kann aber wieder phosphorescirend gemacht werden, wenn man ihn vor einer zweiten Erwärmung dem Licht aussetzt. Die in der Wärme phosphorescirenden Körper würden also ebenfalls nur das früher aufgenommene Licht wieder ausstrahlen. Für diese letztere Anschauung spricht ebenfalls der Umstand, dass ein schon ohne Erwärmung phosphorescirender Körper durch Erwärmung zu einem lebhaftern Leuchten gebracht wird, dass er dann aber viel rascher die Fähigkeit zu leuchten verliert. Alles das spricht dafür, dass durch die Phosphorescenz eine gewisse Quantität von dem phosphorescirenden Körper vorher aufgenommenen Lichtes wieder ausgegeben wird.

Bei der Phosphorescenz sind es wie bei der Fluorescenz vorwiegend die brechbarern Strahlen, die blauen, violetten und ultravioletten, welche das Leuchten hervorrufen. Bei den vorzüglichsten Phosphoren, den Sulfuren des Bariums, Strontium und Calcium erstreckte sich nach den Versuchen von

---

1) Man sehe die ältere Litteratur: *E. Becquerel,* La lumière etc. livre I. p. 9—34. *E. Becquerel's* Versuche a. a. O. livre III. chapitre I.

Becquerel die erregende Wirkung nach der Seite der weniger brechbaren Strahlen nicht über F hinaus [1]). Ja es hat sogar den Anschein, als wenn die weniger brechbaren Strahlen die von den brechbarern erregte Phosphorescenz auslöschen. Das scheinbare Auslöschen hat aber seinen Grund darin, dass die weniger brechbaren Strahlen auf die phosphorescirenden Körper denselben Einfluss haben wie die Wärme, sie bewirken ein lebhafteres und deshalb kürzer dauerndes Phosphoresciren. Erregt man nämlich durch weisses oder blaues Licht die Phosphorescenz und lässt dann nur ganz kurze Zeit rothes oder gelbes Licht auf die phosphorescirenden Körper wirken, so leuchten dieselben beträchtlich lebhafter, als wenn man die Strahlen nicht hat wirken lassen. Wenn deshalb diese Strahlen längere Zeit wirken, so ist während ihrer Wirkung der grösste Theil oder das gesammte Licht ausgegeben und deshalb erscheinen die Körper dann nach der Wirkung des Lichtes dunkel [2]).

Die Strahlen des Phosphorescenzlichtes sind stets weniger brechbar als jene des erregenden, und im Allgemeinen liefern dieselben ein continuirliches bis in das Blaue reichendes Spectrum. In einzelnen Fällen treten indess in dem Phosphorescenzspectrum einzelne helle Linien auf. Besonders interessant ist dabei das salpetersaure Uranoxyd, dessen Phosphorescenzspectrum aus acht hellen Linien zwischen B und F besteht, welche nach Angabe Jamin's [3]) genau den Absorptionsstreifen entsprechen, welche Sonnenlicht zeigt, nachdem es das Salz durchdrungen hat, so dass sich also auch hier der Kirchhoff'sche Satz bestätigt fände, dass ein Körper gerade das Licht aussendet, welches er absorbirt.

Nach alledem scheint somit die Phosphorescenz als eine auch nach der Beleuchtung fortdauernde Fluorescenz betrachtet werden zu können; indess lässt sich nicht leugnen, dass diese Anschauung immerhin noch einigen Schwierigkeiten begegnet, zu denen besonders die Phosphorescenzerscheinungen bei Krystallisation gehören, wie sie H. Rose [4]) bei der Krystallisation der arsenigen Säure aus einer sehr langsam sich abkühlenden Lösung, oder auch bei der Krystallisation eines vorher geschmolzenen und dann gelösten Gemenges von schwefelsaurem Kali und Natron beobachtet hat. Jeder sich absetzende Krystall gibt zu einem kurzdauernden Leuchten Anlass. Es ist schwer, hier anzunehmen, dass dieses Leuchten Wiedergabe des im gelösten Zustande absorbirten Lichtes sei.

§. 46.

Chemische Wirkung des Lichtes. Bei den in den vorigen Paragraphen betrachteten Wechselwirkungen zwischen dem Licht und den Körpern, auf welche es bei der gestörten Ausbreitung trifft, und in welche es eindringt,

1) *E. Becquerel* a. a. O. p. 298 ff.
2) *E. Becquerel* a. a. O. p. 301.
3) *Jamin*, Cours de physique. T. III. p. 491.
4) *H. Rose*, Poggend. Annal. Bd. XXXV.

wird die Beschaffenheit der Körper nicht bleibend geändert; es gibt jedoch eine Reihe von Körpern, welche durch die Einwirkung des Lichts eine bleibende Aenderung erfahren, deren chemische Zusammensetzung dadurch geändert wird. Wir müssen uns hier damit begnügen, eine kurze Uebersicht über die hierher gehörigen Wirkungen zu geben und wegen des Genauern auf die Lehrbücher der Chemie [1]) und der Pflanzenphysiologie [2]) zu verweisen.

Die ausgedehnteste und grossartigste chemische Wirkung des Lichtes ist die Einwirkung desselben auf die Vegetation; nur unter dem Einflusse des Lichtes können die Pflanzen gedeihen. Durch die Blätter absorbiren die Pflanzen aus der Atmosphäre Kohlensäure, durch die Einwirkung des Lichtes wird diese zersetzt und der Sauerstoff von den Pflanzen ausgehaucht, während der Kohlenstoff fähig zu neuen andern Verbindungen in der Pflanze angesammelt bleibt.

Dass es das Licht ist, welches in der Pflanze diese Zersetzung erzeugt, geht unmittelbar daraus hervor, dass bei Nacht, oder auch bei Tage in dunklen Räumen, der chemische Process bei den Pflanzen gerade umgekehrt ist, die aus der Luft absorbirte Kohlensäure wird dann nicht zersetzt, sondern durch den absorbirten Sauerstoff wird in der Pflanze Kohlenstoff verbrannt und Kohlensäure ausgehaucht.

Ausserdem hat aber die Chemie eine ganze Reihe von chemischen Wirkungen des Lichtes kennen gelehrt, indem sie gezeigt hat, dass unter Einwirkung des Lichtes theils chemische Verbindungen, theils Zersetzungen stattfinden können.

Eines der ausgezeichnetsten Beispiele der durch Licht bewirkten Verbindung zweier Elemente ist die Bildung von Salzsäure aus einem Gemische von gleichen Volumen Chlor und Wasserstoff. Bringt man ein solches Gemisch im Dunkeln zusammen, so verändert sich dasselbe nicht; wenn man dagegen auf dasselbe Licht wirken lässt, so tritt sofort die Bildung von Salzsäure ein, bei Anwendung direkten Sonnenlichtes mit einer solchen Heftigkeit, dass das Gemisch explodirt gerade wie Knallgas, wenn man den elektrischen Funken durch dasselbe hindurchschlagen lässt. Das Chlor hat bei Einwirkung des Lichtes ein solches Bestreben sich mit dem Wasserstoff zu verbinden, dass es denselben sogar aus andern Verbindungen ausscheidet. So hält sich Chlorwasser im Dunkeln unter Abschluss der Luft aufbewahrt vollständig ungeändert, dagegen unter Einfluss des Lichtes wird das Wasser zersetzt, es bildet sich Chlorwasserstoffsäure, während Sauerstoff abgeschieden wird. Ebenso wie sich das Chlor mit dem Wasserstoff verbindet, kann es in einer Reihe von andern Körpern unter Einwirkung des Lichtes Chlorsubstitutionsprodukte bilden; indem für eine bestimmte Anzahl Wasserstoffatome, welche austreten

---

1) *Gmelin,* Handbuch der Chemie. Th. I. *E. Becquerel,* La lumière, sa cause et ses effets. T. II.

2) *J. Sachs,* Handbuch der Pflanzenphysiologie. Leipzig, Engelmann. 1865.

und Chlorwasserstoff liefern, ebenso viele Atome Chlor eintreten. So tritt es unter Einwirkung des Lichtes in verschiedene Kohlenwasserstoffe, indem es einen Theil des Wasserstoffs deplacirt. Mit Sumpfgas CH_4 zusammengebracht, bleibt es im Dunkeln ungeändert, unter Wirkung des diffusen Lichtes entwickeln sich nach und nach die Körper CH_3Cl, CH_2Cl_2, $CHCl_3$, das Chloroform und schliesslich der Chlorkohlenstoff CCl_4. Mit Essigsäure bildet es unter Einwirkung des Sonnenlichtes Trichloressigsäure.

Ein weiteres Beispiel von Verbindung durch den Einfluss des Lichtes ist das Chlorkohlenoxyd, welches durch direkte Verbindung des Chlors mit dem Kohlenoxyd im Lichte entsteht, während im Dunkeln die beiden Gase sich nicht verbinden.

Aehnlich wie das Chlor verhalten sich Brom und Jod gegen Wasserstoff unter Einwirkung des Lichtes. Auch der Sauerstoff tritt unter Wirkung des Lichtes in vielen Fällen activer auf als ohne dasselbe, so besonders bei der Oxydation organischer Körper.

Während so einerseits das Licht die Verbindung verschiedener Elemente erleichtert, wirkt es andererseits direkt zersetzend auf chemische Verbindungen ein, letzteres ganz besonders auf die Verbindungen der edlen Metalle. So werden fast alle Silberverbindungen unter Wirkung des Lichtes mehr oder weniger zerlegt und geschwärzt. So werden Chlorsilber, Jodsilber etc. am Lichte sehr bald gefärbt, erst violett, dann schwarz. Aehnlich verhält es sich mit den Verbindungen von Gold, Platin und Quecksilber.

Die zersetzende Wirkung des Lichtes auf Metallverbindungen wird in vielen Fällen durch die Gegenwart organischer Körper befördert; so geschieht selbst die Zersetzung der Silbersalze viel rascher, wenn sie mit organischen Körpern, wie mit Papier in Berührung sind. Andere Körper, wie Eisensalze, Uransalze, chromsaure Salze zersetzen sich nur bei Gegenwart organischer Körper, welche die bei diesen Zersetzungen frei werdenden Salzbildner oder den Sauerstoff absorbiren. Dieser Einfluss der organischen Substanzen ist nach dem Vorigen leicht verständlich, denn es wirken hier beide Arten von Einflüssen des Lichts zusammen. Unter Einfluss des Lichtes verbindet sich Chlor oder Sauerstoff mit dem Wasserstoff der organischen Körper, es wirkt deshalb die Gegenwart eines solchen Körpers bei Chloriden oder Oxyden anziehend auf Chlor und Sauerstoff und unterstützt deshalb die zerlegende Wirkung des Lichtes. Aehnlich wie die organischen Körper wirken alle Reductionsmittel oder solche Substanzen, welche den vom Metall abgeschiedenen Sauerstoff oder Salzbildner aufzunehmen im Stande sind.

Ja es ist im Allgemeinen nicht einmal erforderlich, die im Licht zersetzbaren Salze gleichzeitig mit diesen Mitteln, den sogenannten Sensibilatoren, der Wirkung des Lichtes auszusetzen, sondern es genügt, die zersetzbaren Salze allein dem Lichte auszusetzen und dann mit den Reductionsmitteln zusammenzubringen, um die Zersetzung hervorzurufen. Ganz besonders gilt das von den zersetzbaren Silbersalzen. Lässt man dieselben der Wirkung des

Lichtes nur kurze Zeit ausgesetzt, so werden sie vom Lichte noch nicht zersetzt, bringt man aber ein insolirtes Silbersalz dann mit einem Reductionsmittel in Berührung, so tritt die Zersetzung nachträglich ein.

Letztere Erscheinung hat in neuester Zeit die ausgedehnteste Anwendung gefunden in der Herstellung von Lichtbildern. Man überzieht ein Papier oder eine Glasplatte mit einer Schicht eines empfindlichen Silberpräparates, indem man das Papier mit einer Lösung von Kochsalz oder Jodkalium imprägnirt und es dann auf einer Lösung von salpetersaurem Silberoxyd schwimmen lässt, oder die Glasplatte mit einer Collodiumschicht überzieht, welche etwas Jodkalium enthält und dann in eine ebensolche Lösung von salpetersaurem Silberoxyd eintaucht. Durch doppelte Zersetzung bildet sich dann an der Oberfläche dieser Präparate Jod- oder Chlorsilber, und salpetersaures Kali oder Natron. Letztere Salze werden dann in der Flüssigkeit gelöst, während die unlöslichen Silbersalze in dem Papier oder der Platte zurückbleiben.

Unter Abschluss des Lichtes bringt man dann eine so präparirte Fläche in einer Camera obscura in die Brennebene einer achromatischen Sammellinse und lässt das dort befindliche reelle Bild des abzubildenden Gegenstandes kurze Zeit auf die präparirte Fläche wirken. Ehe die Wirkung sichtbar ist, nimmt man dieselbe wieder heraus und übergiesst sie unter Abschluss des Lichtes mit einer reducirenden Flüssigkeit, etwa mit einer concentrirten Lösung von Gallussäure. An den Stellen, wo das Licht gewirkt hat, am meisten dort, wo es am hellsten war und immer weniger, je weniger hell das Licht war, wird dann das Silber reducirt; während dort, wo das Licht gar nicht wirkte, das Chlor- oder Jodsilber ungeändert zurückbleibt. Um das Bild der weitern Einwirkung des Lichtes zu entziehen, wird dann die zurückgebliebene empfindliche Schicht des Silbersalzes durch ein Lösungsmittel, eine Lösung von Cyankalium etwa, oder von unterschwefligsaurem Natron fortgenommen. Das auf diese Weise erzeugte Bild ist ein sogenanntes negatives, das heisst, die Lichter sind dunkel und die Schatten hell. Von diesem werden daher positive Copieen genommen, indem man mit dem negativen Bilde ein präparirtes Papier bedeckt und nun durch das Bild hindurch Licht auf das Papier wirken lässt. Die Stellen, wo das Silber reducirt war, sind auf den negativen Bildern undurchsichtig, die übrigen sind durchscheinend. Auf dem empfindlichen Papier werden daher die mit den Partieen, wo das Licht gewirkt hat, bedeckten Stellen der Wirkung des Lichtes entzogen, und nicht oder nur wenig gefärbt, während die andern Theile geschwärzt werden. Man löst dann wieder das nicht zersetzte Silbersalz auf, und erhält dann ein positives Bild, indem die im abzubildenden Gegenstande hellen Stellen, in der weissen Farbe des Papieres hell auf dem dunklen, durch das Silbersalz gefärbten Grunde erscheinen [1]).

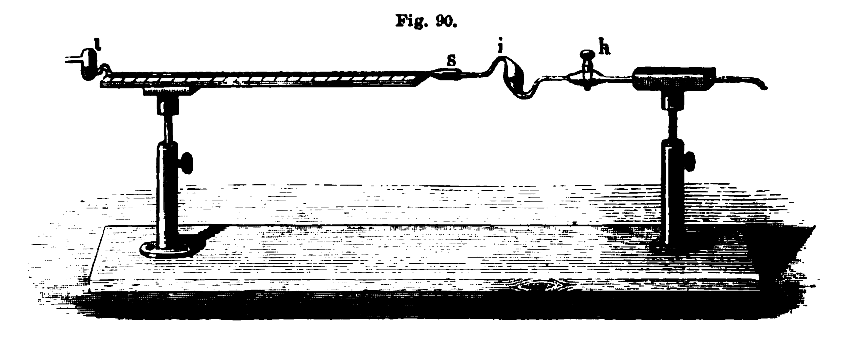
---

1) Ueber Photographie sind in neuester Zeit eine Anzahl von Handbüchern erschienen. Eine kurze Darstellung des Verfahrens nebst Litteratur bis 1849 siehe Handwörterbuch der Chemie von *Liebig, Poggendorff* und *Wöhler*, Artikel Licht-

Etwas anders ist die Benutzung der Lichtwirkung zur Herstellung von Bildern bei dem von Daguerre zuerst entdeckten und anfangs allgemein angewandten Verfahren. Man benutzt dort den im ersten Theil besprochenen Einfluss der Oberflächenbeschaffenheit auf die Condensation der Dämpfe. Eine mit Silber plattirte Kupferplatte wird durch Einwirkung von Joddämpfen mit einer empfindlichen Schicht bedeckt und diese Platte der Einwirkung des Lichtes in der Camera obscura ausgesetzt. Hält man dann die Platte, ehe man die Einwirkung des Lichtes auf derselben sieht, über schwach erwärmtes Quecksilber, so schlagen sich die Dämpfe an den Stellen nieder und amalgamiren das Silber, wo das Licht gewirkt hat, und zwar um so mehr, je stärker die Einwirkung des Lichtes war. Uebergiesst man dann die Platte mit einer das Jodsilber auflösenden Flüssigkeit, so bleiben die amalgamirten Stellen wie mit einem weissen Ueberzug bedeckt auf der glänzenden und deshalb im diffusen Licht dunklern Silberplatte zurück. Man erhält so ein positives Bild, welches gegen das Licht nicht weiter empfindlich ist, da die empfindliche Schicht fortgenommen ist.

Die Gesetze der chemischen Lichtwirkung sind am ausführlichsten untersucht worden von Bunsen und Roscoe[1]) an der Einwirkung des Lichtes auf das Gemisch aus Chlor und Wasserstoff, mittels dessen es diesen Experimentatoren gelang, einen photochemischen Messapparat herzustellen, an welchem die in gegebener Zeit durch die Einwirkung des Lichtes erzeugte Menge von Salzsäure gemessen werden konnte. Die Einrichtung des Apparates zeigt Fig. 90.

Fig. 90.



An eine mit einem Glashahne *h* versehene Glasröhre ist das Gefäss *i* angeblasen, welches als Insolationsgefäss dient; dasselbe wird vor der Lampe so geblasen,

---

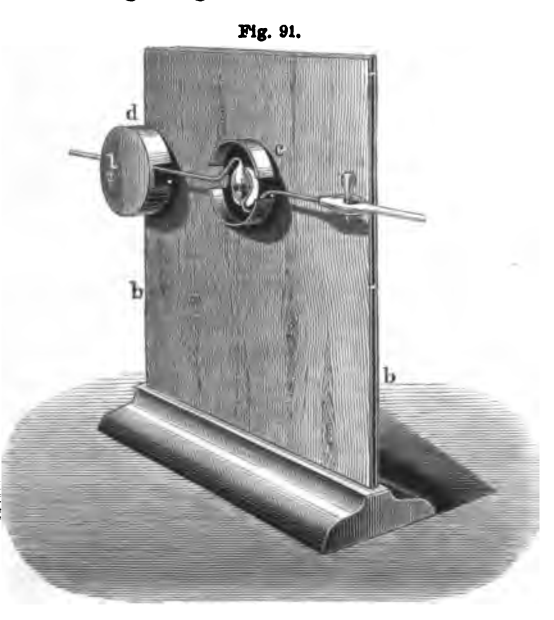
bilder, spätere Litteratur in den Fortschritten der Physik von der Berliner physik. Gesellschaft. Das ausführlichste neuere Werk ist wohl das Lehrbuch der Photographie von Dr. *H. Vogel*. Berlin 1867—1868. Dasselbe gibt auch eine ziemlich vollständige Uebersicht aller chemischen Lichtwirkungen. Die Photographie ist ebenfalls ausführlich behandelt in dem schon erwähnten Werk von *E. Becquerel*, La lumière etc. T. II.

1) *Bunsen* u. *Roscoe*, Photochemische Untersuchungen. Poggend. Annal. Bd C. CI, CVIII.

dass eine zu der richtigen Grösse ausgeblasene Kugel zwischen nassen Brettern zu einem Gefäss von wenigen Millimetern Dicke zusammengedrückt wird. Das an der andern Seite des Gefässes befindliche erst aufwärts, dann abwärts und schliesslich horizontal weiter geführte Rohr ist in das bei *s* erweiterte auf einer Skala liegende capillare Rohr luftdicht eingeschliffen. Das capillare Rohr ist andrerseits an das ziemlich weite Gefäss *l* angeschmolzen, welches ebenso wie das Insolationsgefäss ungefähr zur Hälfte mit Wasser gefüllt ist. Vor dem Gefässe *l* geht ein zweites Rohr in ein mit Holzkohle und zwischengestreutem Kalihydrat gefülltes Condensationsgefäss.

Um das Insolationsgefäss und den ganzen Apparat mit dem Gemische aus gleichen Volumen Chlor und Wasserstoff, dem von Bunsen sogenannten Chlorknallgas zu füllen, ist das mit dem Hahne *h* versehene Rohr durch eine luftdichte Röhrenverbindung mit einem Gefässe in Verbindung, in welchem durch einen galvanischen Strom Salzsäure von dem specifischen Gewichte 1,148 zersetzt wird. Bei dieser Zersetzung bildet sich, wie Bunsen durch eigene Versuche nachwies, immer das Gemische aus genau gleichen Volumtheilen Chlor und Wasserstoffgas. Damit aber der ganze Apparat mit diesem Gemische gefüllt sei, ist es nöthig, 6—8 Tage unausgesetzt dasselbe durch den ganzen Apparat strömen zu lassen, da nicht eher alle Luft vertrieben und das in den Gefässen *i* und *l* vorhandene Wasser mit diesen Gasen ihren Absorptionscoefficienten entsprechend gesättigt ist. Nur wenn das ganz reine Chlorknallgas in dem Apparate ist, bekommt man constante und unzweifelhafte Resultate. Bei der Abhängigkeit der Absorption von Druck und Temperatur ist es deshalb wesentlich, dass Druck und Temperatur stets ganz constant erhalten werden.

Fig. 91.



Das Insolationsgefäss befindet sich, im Uebrigen durch eine Kapsel vor allem übrigen Licht geschützt, vor der Oeffnung eines Schirmes aufgestellt, wie Fig. 91 zeigt, durch welche das Licht auf das Chlorknallgas wirkt. Durch dieses Licht wird das Chlorknallgas in Salzsäure verwandelt und diese wird sofort von dem Wasser des Gefässes *i* absorbirt, da das Wasser über 500 Volumen Salzsäure absorbirt. In Folge der Absorption vermindert sich, wenn

der Hahn h geschlossen gehalten wird, der Druck in i, und in Folge dessen rückt das Wasser in dem auf der Skala liegenden engen Rohre vor, bis der Druck wieder der frühere geworden ist. Da das Gefäss l sehr weit ist, wird durch das Vorrücken des Wassers das Niveau in l und somit auch der Druck, unter welchem das Gas steht, nicht geändert. Das Volumen, um welches das Wasser in dem Rohre vordringt, ist deshalb gleich dem Volumen der gebildeten und absorbirten Salzsäure. Ist das Rohr kalibrirt, so kann man somit an der Skala das Volumen der gebildeten Salzsäure und damit die chemische Wirkung des Lichtes direkt messen.

In Bezug auf den Zweck, diesen Apparat zu Messungen zu benutzen, ist jedoch ein Umstand zu beachten, der Bunsen und Roscoe sofort auf eine Eigenthümlichkeit der chemischen Action des Lichtes aufmerksam machte. Lässt man nämlich eine bestimmte Lichtquelle, etwa eine constant brennende Flamme, auf das Insolationsgefäss wirken, so ist die Menge der gebildeten Salzsäure nicht sofort in gleichen Zeiten dieselbe, sondern sie nimmt eine Zeit lang zu bis zu einem Maximum, welches dann gleich bleibt, solange dieselbe Lichtquelle auf das Insolationsgefäss einwirkt. Eine genauere Untersuchung dieses Verhaltens zeigte, dass dasselbe in einer Eigenthümlichkeit der Lichtwirkung begründet ist, welche Bunsen mit dem Namen der photochemischen Induction bezeichnete. Dieselbe besteht darin, dass die Wirkung des Lichtes auf vorher im Dunklen gehaltenes Chlorknallgas bei Beginn der Belichtung nicht mit seiner ganzen Stärke auftritt, sondern allmählich bis zu einem Maximum wächst; ja häufig tritt in der ersten Minute der Belichtung überhaupt keine Bildung von Salzsäure ein, sondern erst nach einiger Zeit, welche abhängig ist von der Masse des belichteten Gases und von der Intensität des wirksamen Lichtes. Je grösser die Masse des insolirten Gases ist, um so länger dauert es, ehe die Maximumwirkung erreicht wird, und um so kleiner ist die Maximumwirkung überhaupt, eine Erscheinung, die in der Absorption des Lichtes ihre Erklärung findet. Mit steigender Lichtstärke nimmt die Zeit, bis zu welcher die erste merkbare Wirkung oder das Maximum der Wirkung eintritt, sehr rasch ab.

Diese Zunahme der Wirkung zeigt sich nicht nur bei der ersten Belichtung des Chlorknallgases, sondern auch dann, wenn belichtetes Gas wieder verdunkelt wird, ja eine Verdunkelung von einer halben Stunde genügt, um die Zeitdauer der Induction gleich derjenigen des nicht belichteten Gases zu machen. Diese Induction tritt überdies nur ein, wenn das Licht direkt auf das Gasgemisch wirkt, denn wenn man die einzelnen Gase für sich insolirt und dann zusammenbringt, so dauert es gerade so lange bis die Maximumwirkung eintritt, als wenn die Gase nicht belichtet waren.

Bunsen und Roscoe nehmen an, dass diese Erscheinung ihren Grund in einem gewissen Widerstande der getrennten Gase gegen die Verbindung ihren Grund habe, der durch die Einwirkung des Lichtes erst überwunden sein müsse, ehe die Verbindung stattfinden könne; ist das der Fall, ist das Ge-

mische inducirt, so bewirkt das Licht die Verbindung selbst und bei constanter Lichtstärke ist die Menge der gebildeten Salzsäure einfach der Dauer der Wirkung proportional. Für Messungen muss man daher stets die Zeit des erreichten Maximums abwarten [1]).

Mit Hülfe dieser Messungen wurde nun zunächst der Nachweis geliefert, dass die chemische Lichtwirkung der Intensität des wirkenden Lichtes bei gleicher Zusammensetzung desselben proportional ist. Es wurde zu dem Ende eine constant brennende Gasflamme in verschiedenen Entfernungen von dem Insolationsgefäss aufgestellt. Ist das angegebene Gesetz richtig, so muss die Menge der in der Zeit einer Minute nach jedesmal erreichtem Maximum, dem Quadrate des Flammenabstandes umgekehrt proportional sein. Wie genau das der Fall ist, zeigt folgende Beobachtungsreihe, bei welcher nur das mittelste helle Stück einer in einem Kasten brennenden Flamme auf das Insolationsgefäss einwirkte. Bezeichnen wir die Wirkung im Abstande 1 mit *m. J*, die in der Entfernung *r* mit *m. w*, so ist

$$\frac{J}{r^2} = w\,, \quad J = w\,.\,r^2,$$

I. Reihe.			II. Reihe.		
r	w	J	r	w	J
0,m3900	4,43	0,673	0,m3900	3,98	0,605
0,m3315	6,07	0,666	0,m3310	5,56	0,609
0,m2150	14,07	0,650	0,m2495	10,33	0,643

Die den Werthen von *w* zu Grunde liegenden Einheiten sind die der willkürlich gewählten Skala. Die Zahlen für *J* weichen in jeder Reihe so wenig von einander ab, dass die Unterschiede vollständig innerhalb der Grenzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler fallen [2]).

Bei verschiedenen Flammen oder Lichtquellen ist die chemische Wirkung der optisch gemessenen Intensität indess nicht proportional, da die chemische Wirkung ebenso sehr von der Wellenlänge der Strahlen wie von der Intensität derselben bedingt ist.

Um die Abhängigkeit der chemischen Wirkung des Lichts von seiner Farbe zu untersuchen, erzeugten Bunsen und Roscoe [3]) an einem wolkenlosen Tage mit Hülfe von Quarzlinsen und Quarzprismen, welche die Eigenschaft haben, die brechbarsten Strahlen des Spectrums in vorzüglichem Maasse durchzulassen, auf einem Schirme ein Spectrum. Der Schirm war mit einer Lösung von schwefelsaurem Chinin bestrichen, um so auch den ultravioletten Theil des Spectrums mit seinen Fraunhofer'schen Linien sichtbar zu machen; derselbe war ferner mit einer Millimeterskala versehen, um an derselben die

1) *Bunsen* u. *Roscoe*, Photochem. Unters. III. Abhandl. Poggend. Annal. Bd. C.
2) *Bunsen* u. *Roscoe*, Photochem. Unters. II. Abhandl. Poggend. Annal. Bd. C.
3) *Bunsen* und *Roscoe*, Photochem. Unters. V. Abhandl. Poggend. Annal. Bd. CVIII.

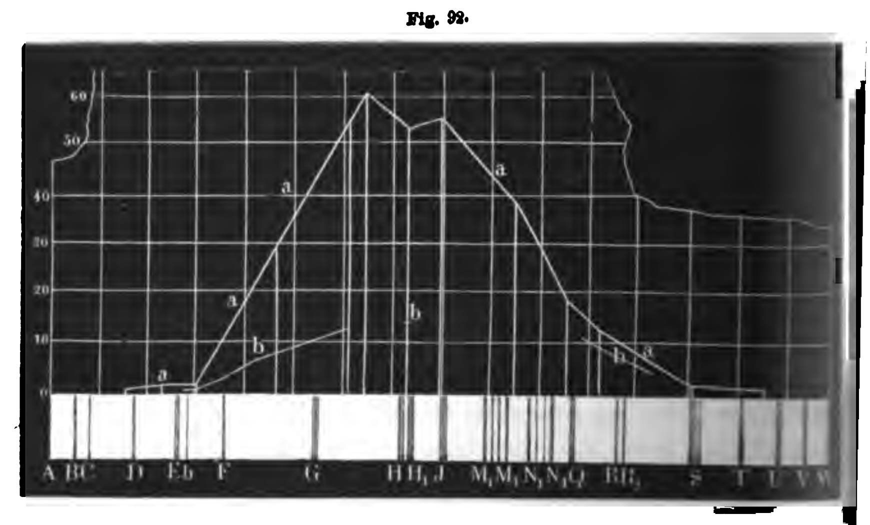
einzelnen Theile des Spectrums in ihrer Lage zu den Fraunhofer'schen Linien zu orientiren. Durch einen im Schirme vorhandenen Spalt, an welchem das Spectrum vorüber geführt werden konnte, liess man dann die Strahlen einer bestimmten Farbe auf das etwa 1,5 Meter hinter dem Schirme aufgestellte Insolationsgefäss fallen. Der Spalt hatte eine solche Breite, dass jedesmal etwa 0,08 des ganzen Spectrums das Insolationsgefäss bestrahlte. Die beobachtete Wirkung wurde dann als die der mittlern dieses Bündels betrachtet.

Die Beobachtungen wurden von etwa 11 Uhr Vormittags bis $^1/_2$ nach Mittag angestellt, also während einer Zeit, während der die Höhe der Sonne sich nur sehr wenig änderte. Folgende kleine Tabelle gibt die beobachtete Wirkung der Strahlen an. Zum Verständniss derselben bemerken wir, dass das ganze beobachtete Spectrum in 160 gleiche Theile getheilt wurde, wie es Fig. 92 zeigt, und dass die Breite der Büschel auf der Skala bestimmt wurde. So bedeutet C bis $^1/_2\,DE$, dass ein Büschel durch den Spalt ging, welches von C bis in die Mitte von D und E reichte, $^1/_5\,DE - E$, dass das Bündel von $^1/_5$ des Abstandes DE hinter D bis E reichte u. s. f.

C bis $^1/_2\,DE$		0,5
$^1/_5\,DE$ —	E	1,3
$^3/_4\,DE$ —	F	1,4
$^1/_5\,FG$ —	G	28,4
G — $^1/_5\,GH$		54,5
$^1/_5\,GH$ —	H	60,5
$^3/_5\,GH$ —	J	52,7
H_1 — $^3/_4\,JM_1$		55,1
$^4/_5\,JM_1$ —	N_4	38,6
N_1 — $^3/_4\,QR$		18,9
$^1/_2\,N_4Q$ — $^1/_3\,RS$		12,5
$^1/_2\,RS$ — $^2/_3\,ST$		2,1
$^3/_4\,ST$ — $^2/_3\,UV$		1,2

Fig. 92 gibt diese Vertheilung der Lichtwirkung im Spectrum graphisch

Fig. 92.



wieder, indem die in das Coordinatennetz eingetragenen zur Längsausdehnung des Spectrums senkrechten Linien der an jeder Stelle, der jedesmaligen Mitte

der oben angegebenen Theile des Spectrums proportional aufgetragen, und dann deren Enden durch die Linie *aaaa* verbunden sind. Man sieht, wie in den rothen und gelben Theilen des Spectrums bis zum Grün hin die Wirkung sehr schwach ist, wie sie im Blau sehr rasch bis zu einem ersten Maximum zwischen *G* und *H* ansteigt, dann wieder bis zu einem Minimum bei *H* abnimmt, zu einem zweiten aber kleinern Maximum im Ultravioletten, bei *J* ansteigt und dann gegen die brechbarere Seite des Spectrums hin rasch abfällt, bis sie zwischen *T* und *U* unmerkbar wird.

Ganz ebenso wie bei der Wirkung auf Chlorknallgas zeigt sich die Verschiedenheit der chemischen Action der verschieden gefärbten Strahlen bei der Wirkung auf die empfindlichen Silberpräparate. Man kann das am bequemsten nachweisen, indem man direkt das Sonnenspectrum photographirt, dabei aber, um nach der ultravioletten Seite die Strahlen möglichst wirksam zu erhalten, Quarzlinsen und Quarzprismen anwendet. Schon nach wenigen Sekunden erhielt Müller in Freiburg[1]) dann ein Spectrum, welches etwa bei *G* beginnt und bis in den Raum zwischen *R* und *S* hineinreichte, während die Partieen zwischen *B* und *F* selbst nach zweistündiger Einwirkung kaum merklich geschwärzt waren. Die Dauer der Schwärzung ist aber auch in den wirksamen Theilen verschieden, so dass man zur Herstellung schöner Photographien des Spectrums dasselbe stückweise photographiren muss. Thut man das, so zeigt das so photographirte Spectrum genau dieselben dunklen Linien, welche das Fluorescenzspectrum zeigt.

Mascart[2]) hat deshalb die Photographie benutzt, um die Brechungsexponenten der hauptsächlichsten dunklen Linien im Ultravioletten zu bestimmen und zugleich ein möglichst vollständiges Bild dieses Theiles des Spectrums zu entwerfen. Mascart verfuhr zu dem Ende so, dass er in einem Spectrometer, dessen Linsen aus Quarz hergestellt waren, das Fadenkreuz des Beobachtungsfernrohrs durch eine kleine photographische Platte ersetzte, und so das Spectrum Stück für Stück photographirte, welches durch ein Quarz- oder Kalkspathprisma erzeugt war. Um für die Hauptlinien jedesmal das Minimum der Ablenkung zu erhalten, wurde zunächst mit dem Auge für die sichtbare Linie *H* das Minimum hergestellt, und von hier aus dann das Ocularrohr um einen bestimmten Winkel φ und gleichzeitig das Prisma in demselben Sinne um den Winkel $^1/_2\ \varphi$ gedreht. War dann der Einfallswinkel für $h = i$, so war er jetzt gleich $i + {^1/_2}\ \varphi$; um ebendenselben Winkel $^1/_2\ \varphi$ hatte aber auch der Austrittswinkel zugenommen, oder Eintritts- und Austrittswinkel waren wieder gleich, somit die Bedingung des Minimums wieder erfüllt.

Folgende Tabelle enthält die von Mascart beobachteten Brechungsexponenten der ordentlichen Strahlen im Kalkspath und Quarz, ferner die von Mascart nach später zu besprechender Methode bestimmten Wellenlängen,

1) *Müller*, Lehrbuch der Physik. Bd. I. p. 664.
2) *Mascart*, Comptes Rendus, LVII p. 789, LVIII p. 1111.

und für den Kalkspath gleichzeitig die von Christoffel nach seiner Formel berechneten Brechungsexponenten [1]). Die Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung zeigt sich auch hier wieder bis auf drei Einheiten der 4. Decimale.

Bezeichnung der Linien	Wellenlängen	Brechungsexponenten		
		Kalkspath		Quarz
		beobachtet	berechnet	
A		1,65013		1,53902
B	6,8667	1,65296	1,65331	1,54099
C	6,5607	1,65446	1,65466	1,54188
D	5,888	1,65846	1,65843	1,54423
E	5,2678	1,66354	1,66336	1,54718
b	5,1655	1,66446	1,66436	1,54966
F	4,8596	1,66793	1,66776	1,55429
G	4,3075	1,67620	1,67605	1,55816
H	3,9672	1,68330	1,68321	1,56019
L	3,8190	1,68706	1,68702	1,56150
M	3,7288	1,68966	1,68961	1,56400
N	3,5802	1,69441	1,69438	1,56668
O	3,4401	1,69955	1,69956	1,56842
P	3,3602	1,70276	1,70287	—
Q	3,2856	1,70613	1,70623	—
R	3,1775	1,71155	1,71162	—
S	—	1,71580	—	—
T	—	1,71939	—	—

Die Bezeichnung der Strahlen stimmt mit der von Stokes und Bunsen überein, nur hat Bunsen die Gruppe *L* mit *J* bezeichnet, und die Gruppen *M* und *N* in je vier Linien resp. Gruppen aufgelöst.

Fig. 2 auf Tafel I gibt zur Orientirung die von Mascart entworfene Zeichnung, wie sie Jamin im 3. Bande seiner Cours de physique mittheilt.

Wenn nach den Versuchen Bunsen's auch die chemischen Wirkungen der rothen, gelben und grünen Strahlen nur sehr gering sind, so können sie unter Umständen doch sehr merklich sein. So fand Becquerel [2]), dass wenn man eine Daguerre'sche Platte nur kurze Zeit belichtet, und dann auf dieselbe ein Spectrum wirft, dass dann nicht nur die blauen und ultravioletten Partieen, sondern auch die rothen und gelben deutlich abgebildet werden. Becquerel

1) *Christoffel,* Poggend. Annal. Bd. CXXIV.
2) *E. Becquerel,* La lumière etc. T. II. p. 75 ff., p. 90.

nimmt deshalb an, dass diese Strahlen zwar nicht direkt chemische Wirkung ausüben können, dass sie aber im Stande seien, eine angefangene chemische Action fortzuführen, er nennt deshalb diese Strahlen rayons continuateurs. Bunsen ist zwar geneigt, hierin einen Fall der photochemischen Induction zu sehen, indess unterscheidet sich diese von der von Bunsen beobachteten darin, dass das Silberpräparat von wirksamen Strahlen inducirt werden muss, wenn die rothen und gelben Strahlen wirken sollen, dass die letztern Strahlen selbst das Silberpräparat nicht induciren können.

In einem Falle muss man indess den rothen und gelben Strahlen direkt chemische Wirkung zuschreiben, nämlich bei den Pflanzen. Es ist von Sachs[1]) und andern der Nachweis geliefert worden, dass das Ergrünen des Chlorophylls ganz ebenso stark unter Wirkung des rothen und gelben Lichtes erfolgt, als unter derjenigen des blauen, und dass die von den Pflanzen absorbirte Kohlensäure vorzugsweise unter Wirkung der Strahlen grösserer, kaum unter derjenigen kleinerer Brechbarkeit erfolgt.

Die chemische Wirkung ebenso wie die Fluorescenz und Phosphorescenz kommt durch eine gewisse Menge absorbirten Lichtes zu Stande, wie Bunsen und Roscoe durch direkte Versuche nachgewiesen haben[2]). Zu dem Ende wurde zunächst die Absorption in trocknem Chlorgase untersucht. Nach dem §. 39 angeführten Absorptionsgesetze ist für ein gegebenes Medium die Absorption des Lichtes der Intensität desselben proportional. Wie wir dort erwähnten, haben Bunsen und Roscoe dieses Gesetz neuerdings geprüft. Es wurde das Licht einer Lampenflamme aus verschiedener Entfernung auf das Insolationsgefäss geleitet und dessen Intensität J_0 gemessen. Dann wurde vor das Insolationsgefäss ein mit Chlor gefüllter Cylinder gehalten und die Intensität J des Lichtes gemessen, nachdem es denselben durchstrahlt hatte. Folgende Zahlen beweisen, wie genau das Gesetz erfüllt ist:

Nr. der Versuche	1	2	3	4	5	6	7	8
J_0	13,52	13,20	12,85	13,51	7,21	8,34	12,39	12,84
J	3,63	3,63	3,79	3,79	2,11	2,44	3,69	3,69
$\frac{J}{J_0}$	0,267	0,275	0,295	0,281	0,293	0,293	0,298	0,287
	Mittel 0,286.							

Die Lichtstärken liegen zwischen 1 und 1,9, und die Verhältnisse $\frac{J}{J_0}$ weichen so wenig vom Mittel derselben ab, dass die Zahlen das oben aufgestellte Gesetz auf das schönste bestätigen.

Bezeichnen wir nun den Schwächungscoefficienten des Lichts in der §. 39 gegebenen Bedeutung, für Chlorgas unter dem Drucke einer Atmosphäre mit

1) *Sachs*, Lehrbuch der Pflanzenphysiologie. Leipzig 1865.

2) *Bunsen* und *Roscoe*, Photochem. Unters. Vierte Abhandl. Poggend. Annal. Bd. CI.

a, so wird die Intensität J nach Durchstrahlung einer Schicht von h^{mm} gegeben durch

$$J = J_0 \,.\, a^h.$$

Nennen wir die Dicke der Schicht, in welcher das Licht auf 0,1 geschwächt wird, $\frac{1}{\alpha}$, so ist weiter

$$0{,}1 J_0 = J_0 a^{\frac{1}{\alpha}}; \quad 10^{-1} = a^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$10^{-\alpha} = a$$

oder

$$J = J_0 \, 10^{-\alpha h}.$$

Den Coefficienten α bezeichnet Bunsen als den Exstinctionscoefficienten des betreffenden Mittels. Zur Bestimmung desselben hat man nur Licht von der Intensität J_0 durch eine Schicht von der Dicke h_1 des Mediums gehen zu lassen und die Intensität J_1 zu bestimmen, man erhält dann

$$\frac{1}{h_1} \cdot \log \frac{J_0}{J_1} = \alpha.$$

Für trocknes Chlorgas unter einem Drucke von 760^{mm} erhielten Bunsen und Roscoe als Mittel aus vielen Versuchen

$$\alpha = 0{,}00577 \quad \frac{1}{\alpha} = 173{,}3\,,$$

oder in einer Schicht von $173{,}3^{mm}$ wird die Intensität der chemischen Strahlen der benutzten Lampenflamme auf ein Zehntel geschwächt. Durch weitere Versuche wurde dann constatirt, dass der Werth von α der Dichtigkeit des Chlorgases direkt proportional ist, oder dass für Chlorgas, dessen Dichte nur die Hälfte ist, oder welches mit einem gleichen Volumen Luft gemischt ist, deren Exstinctionscoefficient bei den in diesen Versuchen vorkommenden Schichten gleich 0 ist, die Hälfte des obigen, oder

$$\alpha = \frac{1}{346{,}6}$$

ist. Lässt man nun Licht durch Chlorknallgas strahlen, das aus gleichen Volumen Chlor und Wasserstoff besteht, so muss, wenn keine Absorption für die chemische Action stattfindet, der Werth von α diesem letztern gleich sein, findet aber eine der chemischen Wirkung entsprechende Absorption statt, so muss α grösser sein.

Die Messung des Exstinctionscoefficienten α_1 in dem Chlorknallgasgemisch wurde nun so ausgeführt, dass man das Licht auf ein Insolationsgefäss wirken liess, dem man eine verschiedene Tiefe geben konnte, und die Menge der gebildeten Salzsäure verglich, wenn man die Dicke der insolirten Schicht einmal gleich h_1, dann gleich h_2 u. s. f. machte. In welcher Weise sich α_1 daraus bestimmen lässt, ergibt sich folgendermaassen. In der Entfernung z von der Eintrittsstelle des Lichtes ist die Intensität des Lichtes noch

$$J = J_0 \,.\, 10^{-\alpha_1 z} = J_0 \,.\, e^{-m\alpha_1 z}\,,$$

wenn wie immer e die Basis des natürlichen Logarithmensystems und m der natürliche Logarithmus von 10 ist. In der unendlich dünnen Schicht dz ist dann diese Intensität J dieselbe, und da die chemische Wirkung in derselben der Intensität des Lichtes proportional ist, haben wir

$$dw = N \, . \, J \, . \, dz = N \, . \, J_0 \, e^{-m\alpha_1 z} \, . \, dz.$$

Um nun die Wirkung in einer Schicht von der Dicke h_1 zu bekommen, haben wir die Summe aller dieser Ausdrücke zu bilden, indem wir z nach und nach alle Werthe von $z = o$ bis $z = h_1$ annehmen lassen, oder

$$w = \int_0^{h_1} N J_0 \, e^{-m\alpha_1 z} \, dz.$$

Nun ist

$$e^{-m\alpha_1 z} \, dz = \frac{1}{m\alpha^1} \left\{ e^{-m\alpha_1 z} - e^{-m\alpha_1 (z + dz)} \right\},$$

denn zunächst können wir schreiben

$$e^{-m\alpha_1 (z + dz)} = e^{-m\alpha_1 z} \, . \, e^{-m\alpha_1 dz},$$

und indem wir $e^{-m\alpha_1 dz}$ in eine Reihe entwicklen

$$e^{-m\alpha_1 (z + dz)} = e^{-m\alpha_1 z} \left\{ 1 - m\alpha_1 \, dz - {}^1\!/_2 m\alpha_1 \, dz^2 - \ldots \right\},$$

von denen schon das dritte Glied gegen das zweite unendlich klein ist. Demnach ist

$$e^{-m\alpha_1 z} - e^{-m\alpha_1 (z + dz)} = m\alpha_1 \, e^{-m\alpha_1 z} \, dz.$$

Bilden wir nun alle diese Differenzen von $z = o$ bis $z = h_1$, so bleiben nur das erste und letzte Glied übrig, und wir erhalten

$$w = \frac{NJ_0}{m\alpha_1} \left\{ e^{-m\alpha_1 o} \, . - e^{-m\alpha_1 h_1} \right\}$$

oder

$$w = \frac{NJ_0}{m\alpha_1} \left\{ 1 - e^{-m\alpha_1 h_1} \right\}.$$

Mit Hülfe dreier Beobachtungen kann man hieraus N, J_0 und α_1 bestimmen.

Bunsen und Roscoe erhielten auf diese Weise für α_1 den Werth

$$\alpha_1 = \frac{1}{234},$$

also einen beträchtlich grössern Werth, als er der optischen Absorption allein entspricht, ein Beweis, dass für die chemische Wirkung Licht verbraucht wird, und dass die Menge des verbrauchten Lichtes der chemischen Action direkt proportional ist. Die Differenz des optischen Exstinctionscoefficienten und des hier gefundenen Werthes von α_1 gibt uns den chemischen Exstinctionscoefficienten, derselbe wird $\frac{1}{723}$, das heisst, wenn in dem Chlorknallgasgemische gar keine optische, sondern nur Absorption in Folge der chemischen Action vorhanden wäre, würde das in das Gemisch eindringende Licht nach Zurücklegung eines Weges von 723^{mm} auf ein Zehntel seiner Stärke gebracht. Die Zahl gilt natürlich nur für das Licht der zu diesen Versuchen benutzten

Flamme, für andere Lichtquellen, deren Licht anders zusammengesetzt ist, wird der Werth ein anderer. Für Morgenlicht, vom Zenith des wolkenlosen Himmels genommen, findet Bunsen 377,mm3.

§. 47.

Theoretische Andeutungen über Absorption, Fluorescenz und chemische Action des Lichtes. Die Erscheinungen der Fluorescenz und der chemischen Action des Lichtes in Verbindung mit denen der Absorption setzen uns in den Stand, diese Erscheinungen, wenn auch nicht vollständig aufzuklären, so doch dem Verständniss näher zu bringen.

Wenn das Licht auf einen Körper trifft, so wird es allemal geschwächt, es geht also Licht verloren.

Nun ist das Licht nach der Undulationstheorie eine Bewegung des Aethers, deren Geschwindigkeit zwischen gewissen Grenzen eingeschlossen ist; ist die Dauer einer Undulation grösser oder kleiner, so kann diese Bewegung uns nicht mehr den Eindruck des Lichtes machen. Denn nach der Undulationstheorie ist für die verschiedenen Farben die Wellenlänge eine verschiedene. Da aber nun im leeren Raum das Licht aller Farben sich mit gleicher Geschwindigkeit fortpflanzt, so folgt, dass auf der in der gleichen Zeit einer Sekunde zurückgelegten Strecke C von der einen Farbe sich mehr Wellenlängen befinden als von der andern, und da weiter während einer Oscillation eines Aethertheilchens sich die Bewegung um eine Wellenlänge fortpflanzt, so folgt, dass die Anzahl der einer Farbe entsprechenden Oscillationen um so grösser ist, je grösser die Anzahl der auf die Strecke C gehenden Wellen ist, dass also die Oscillationsdauer in demselben Verhältnisse wie die Wellenlänge kleiner ist. Den rothen Strahlen entsprechen die grössten, den violetten die kleinsten Wellenlängen, erstern somit die grösste, letztern die kleinste Oscillationsdauer. Nur zwischen diesen Grenzen nehmen wir Licht wahr, Wellenbewegungen von grösserer Oscillationsdauer als die der rothen, von kleinerer als die der violetten sind für uns nicht sichtbar.

Wenn demnach bei der Absorption Licht verschwindet, so heisst das, eine gewisse Quantität Bewegung hört durch die Wechselbeziehung zwischen Licht und Körper auf bemerkbar zu sein. Da nun aber eine Bewegung eine gewisse Quantität lebendiger Kraft ist, und da nach dem schon im ersten Theile §. 14 angeführten Principe von der Erhaltung der Kraft eine einmal vorhandene Kraft nicht vernichtet werden kann, ebenso wie keine Kraft erzeugt werden kann, so kann diese Bewegung nicht einfach aufhören; sondern sie muss in irgend einer Weise im Innern des Körpers verbraucht werden, oder in eine Bewegung umgeändert werden, welche langsamer oder schneller ist, als dass wir sie noch als Licht wahrnehmen können.

Es gibt nun besonders zwei Theorieen der Absorption, die eine ist von dem Baron von Wrede[1]) aufgestellt, sie nimmt an, dass das verschwundene

1) *v. Wrede,* Poggend. Annal. Bd. XXXIII.

Licht durch Interferenz ausgelöscht sei; wir werden die Grundzüge derselben im nächsten Abschnitte vorführen zugleich mit der Schwierigkeit, welche ihr entgegensteht; die andere ist in neuerer Zeit von Stokes[1]) näher verfolgt und mit den Erscheinungen der Fluorescenz in Verbindung gebracht.

Da die Moleküle der Körper auf den sie umgebenden Aether einen Einfluss haben, wie sich aus der verschiedenen Dichtigkeit des Aethers in den verschiedenen Körpern ergibt, so sind wir auch berechtigt rückwärts anzunehmen, dass die in dem die Moleküle des Körpers umgebenden Aether stattfindenden Bewegungen auf die Moleküle des Körpers von Einfluss sind. Die chemischen Wirkungen des Lichtes beweisen dieses sogar, indem bei den empfindlichen Körpern die schneller schwingenden Lichtstrahlen eine Aenderung des Zusammenhanges in den einzelnen Theilen der zusammengesetzten Moleküle des empfindlichen Körpers hervorbringen, und somit, da sie zugleich aufhören als Lichtstrahlen zu erscheinen, ihre Bewegung an die ponderabeln Moleküle der Körper abgeben. Als eine ähnliche molekulare Störung, die jedoch nicht bis zur Ueberführung in einen andern Gleichgewichtszustand der Moleküle geht, können wir auch die Fluorescenzerscheinungen ansehen. Denn nach der Undulationstheorie entsteht, wie bereits §. 41 ausgeführt wurde, das Licht zunächst aus den schwingenden Bewegungen der letzten Theilchen des Körpers. Bei dem Phänomen der Fluorescenz verhält sich nun der fluorescirende Körper, so lange er unter dem Einflusse des Lichtes ist, wie ein selbstleuchtender Körper. Es ist daher das Natürlichste anzunehmen, dass die ankommenden Bewegungen des Aethers schwingende Bewegungen in den letzten Molekülen der empfindlichen Substanzen erzeugen, und dass umgekehrt die für sich schwingenden Moleküle wiederum Vibrationen im Lichtäther erzeugen und dadurch das Leuchten verursachen. Die Perioden dieser Vibrationen hängen ab von den Vibrationen, in denen die Moleküle zu schwingen geneigt sind, nicht von denen der einfallenden Lichtbewegung; daher ist die Farbe des Fluorescenzlichtes im Allgemeinen eine andere als diejenige des einfallenden Lichtes.

Letztere Annahme scheint nun auf den ersten Blick mit den Principien der Wellenbewegung und mit den sonstigen Erfahrungen im Widerspruch zu stehen. Denn nach dieser kann eine schwingende Bewegung, welche von einer andern schwingenden Bewegung hervorgerufen wird, sich von ersterer nur in den Amplituden der Bewegung unterscheiden, nicht aber in der Dauer der einzelnen Oscillationen.

Diesem Einwurfe begegnet Stokes[2]) durch die Bemerkung, dass die der Undulationstheorie zu Grunde liegenden Principien der Wellenbewegung von der Annahme ausgehen, dass die Kräfte, welche die schwingenden Theile in

---

1) *Stokes,* Poggend. Annal. Ergänzungsband IV. p. 322 ff.
2) *Stokes,* a. a. O. p. 324.

die Gleichgewichtslage zurückführen, den Verschiebungen der Theile proportional seien[1]), eine Annahme, die gewiss gerechtfertigt ist, so lange wir die Verschiebungen als unendlich klein gegen die Abstände der schwingenden Punkte betrachten dürfen. Bei der Lichtbewegung im Allgemeinen ist das gestattet, wir sind aber nicht berechtigt, die Molekularvibrationen, um welche es sich hier handelt, als äusserst klein im Verhältniss zu der Grösse eines Moleküles zu betrachten. Denn diese können wir als Vibrationen im Innern der Moleküle selbst ansehen, ähnlich jener Bewegung, die bei der chemischen Action zu einer Trennung der Theile des complexen Moleküles führt, welche aber nicht so weit geht, dass der Gleichgewichtszustand der Moleküle bleibend ein anderer wird. Es verschieben sich z. B. die einzelnen Theile der complexen Moleküle gegen einander, ähnlich wie die einzelnen Theile eines schwingenden Stabes oder einer schwingenden Platte, um Strecken, die nicht gegen die Grösse desselben unendlich klein sind.

Wenn aber die Kräfte, welche diese Molekularvibrationen nach dem Anstoss des ankommenden Lichtes veranlassen, nicht den Verschiebungen proportional sind, so können auch die entstehenden Vibrationen nicht mit den ankommenden gleicher Periode sein, und dann muss auch die Undulationsdauer der rückwärts im Aether erzeugten Schwingungen eine andere sein als die des ankommenden Lichtes.

Dass das fluorescirende Licht nun immer eine kleinere Brechbarkeit, also eine grössere Undulationsdauer besitzt, hat, wie Stokes[2]) entwickelt, seinen Grund darin, dass die Molekularvibrationen nur dann von der ankommenden Bewegung des Aethers erhalten werden können, wenn letztere eine kürzere Schwingungsdauer als erstere besitzt. Ist dagegen die Oscillationsdauer der ankommenden Lichtbewegung grösser, so wird die vorhandene Bewegung der Moleküle gestört, es kann keine Fluorescenz auftreten.

Die Erscheinungen der Phosphorescenz, sahen wir, fasst E. Becquerel ganz in derselben Weise auf, er sieht in derselben eine länger andauernde Fluorescenz. Im Allgemeinen stimmen allerdings die Erscheinungen damit überein, das Phosphorescenzlicht entspricht einer gewissen Menge absorbirten Lichtes, oder es ist Bewegung des Aethers auf die Moleküle des Körpers übertragen. Die Erscheinungen der Phosphorescenz sind indess im Einzelnen damit noch keineswegs erklärt, so ganz besonders der Umstand, dass das Phosphorescenzlicht im Innern der Körper gewissermaassen latent werden und später durch Erwärmen wieder geweckt werden kann. Man müsste denn annehmen, dass in Folge der Insolation die Moleküle des phosphorescirenden Körpers eine andere Gleichgewichtslage erhalten hätten, aus welcher sie, sich selbst überlassen, nur ganz allmählich in die frühere zurückkehren, während die Erwärmung die Rückkehr plötzlich beschleunigt. Diese beschleunigte

1) Man sehe: Theil I, Abschnitt III, Kapitel 1.

2) *Stokes*, a. a. O. p. 327.

Rückkehr muss dann zu Schwingungen, also zu neuem Leuchten Anlass geben. Es würde damit die Phosphorescenz ein Mittelglied zwischen Fluorescenz und chemischer Action sein.

Wir sehen somit in mehreren Fällen eine Wirkung des absorbirten Lichtes im Innern der Körper, eine Uebertragung der Bewegung auf die Moleküle der Körper. Nehmen wir dahinzu noch den Kirchhoff'schen Satz über die Gleichheit der Emission und Absorption, so werden wir nicht zweifeln können, dass jede Absorption eine Abgabe der Bewegung des Aethers an die Moleküle der Körper ist. Wir erhalten allerdings in den seltensten Fällen diese Bewegung wieder als Licht, entweder weil die Schwingungen der Körpermoleküle zu schwach, oder weil ihre Oscillationsdauer in Folge der den Aethertheilchen gegenüber zu grossen Masse der Körpermoleküle zu gross ist. Verschwunden ist die Bewegung aber nicht, und wir werden im dritten Theile nachweisen, dass sie als Wärme wieder hervortritt.

Viertes Kapitel.

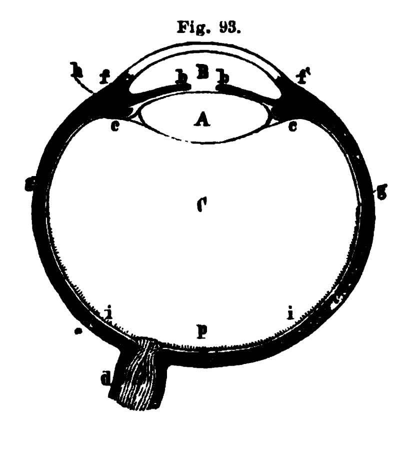
Von der Wahrnehmung des Lichtes.

§. 48.

Das menschliche Auge. Wie zur Wahrnehmung des Schalles, so besitzen wir auch zur Wahrnehmung des Lichtes ein besonderes Organ, das Auge.

Das menschliche Auge[1]), sowie das der Wirbelthiere, besteht aus einer Combination von Linsen aus verschiedenen Medien, welche in ihrer Gesammtheit als Sammellinse wirken. Hinter dem letzten der Medien C Fig. 93 ist die das Licht empfindende Nervenhaut, die Netzhaut (Retina), ausgebreitet (i).

Fig. 93.



Der ganze Apparat ist von einer festen Kapsel eingeschlossen, welche durch innern Druck gespannt erhalten wird und mit ihrem Inhalte den Augapfel bildet. Der grösste Theil derselben, in der Zeichnung schattirt, ist die undurchsichtige Faser- oder Sehnenhaut (Sclerotica), welche dem Augapfel seine im Ganzen kugelige Form gibt. Nur vorn von f bis f' ist dieselbe durch die durchsichtige Hornhaut (Cornea) ersetzt, welche ein kleines Segment einer stärker gekrümmten Kugel

1) *Helmholtz*, Physiologische Optik. §. 1—6 und §. 10.

darstellt, und durch welche das Licht in das Auge eintritt. Am lebenden Auge sieht man zwischen den Augenlidern den vordern Theil der Sehnenhaut, das Weisse, und in der Mitte die durchsichtige Hornhaut.

Das Innere des Auges besteht aus drei Abtheilungen, der vordern Augenkammer *B*, welche die wässerige Feuchtigkeit enthält, der Krystalllinse *A* und hinter derselben dem gallertigen Glaskörper *C*. Der Rand der Krystalllinse *A* ist mit der Grenze *ff* der Sehnenhaut und Hornhaut so fest verwachsen, dass die Linse die vordere Augenkammer vollständig von dem Glaskörper trennt.

Zwischen den Medien *A* und *C* und der das ganze Auge umschliessenden Sehnenhaut sind nun noch zwei Häute ausgespannt. Zunächst schliesst den Glaskörper die Netzhaut (*i*) ein. Die Nervenfasern, von deren Ausbreitung diese gebildet wird, treten durch die Oeffnung der Sehnenhaut (*d*) ein, welche dem Scheitel der Hornhaut nicht genau gegenüber liegt. Ziemlich genau in der durch den Scheitel der Hornhaut und den Mittelpunkt des Auges gelegten Axe des Auges liegt der sogenannte gelbe Fleck, die Stelle der Netzhaut, wo die Empfindung am feinsten ist, weil hier die Nervenendigungen am dichtesten zusammenliegen (*p*). Der Querschnitt des Nerven (*d*), der Mariotte'sche Fleck, besitzt keine Nervenenden und ist deshalb blind. Nach vorn wird im Allgemeinen die Nervenhaut immer dünner und die lichtempfindenden Nervenenden immer sparsamer vertheilt; bei *g* hört sie ganz auf und an ihre Stelle tritt eine nervenlose Membran, welche bis zur Linse reicht und an diese angeheftet ist.

Zwischen Netzhaut und Sehnenhaut liegt dann das Hautsystem der Uvea, in der Figur durch einen schwarzen Strich angedeutet. Sie besteht aus der Aderhaut (Chorioidea) mit einer der Netzhaut zunächst anliegenden Schicht schwarzen Pigmentes, und aus deren bis vor die Linse reichenden Fortsetzung, die Regenbogenhaut (Iris). Letztere ist wie die Aderhaut auf ihrer innern Seite mit Pigment bedeckt und liegt der Linse frei verschiebbar auf. Sie hat nur in der Mitte vor der Linse eine kreisförmige Oeffnung *bb*, die Pupille, welche durch die kreisförmigen und radiären Muskelfasern der Iris erweitert und verengt werden kann. Diese Verengerung geschieht unwillkürlich bei starker Beleuchtung der Netzhaut.

Die Uebergangsstelle der Aderhaut in die Regenbogenhaut, zwischen der Grenze der Sehnen- und Hornhaut und dem Rande der Linse, verdickt sich zu einem ringförmigen Wulste, dem Ciliarkörper, welcher aus einzelnen Abschnitten der Ciliarfortsätze *c* zusammengesetzt ist. Zwischen diesem Wulst und der Sehnenhaut ist endlich noch ein ringförmiger Muskel, der Ciliarmuskel *h* eingeschaltet, der mit dem Rande der Regenbogenhaut zusammenhängend, wie diese aus durchflochtenen radiären und circulären Fasern besteht, von denen die erstern an der Innenfläche des Randes der Horn- und Sehnenhaut festsitzen. Dadurch kann auch dieser Ring weiter oder enger gemacht und so bald mehr bald weniger auf den Ring der Ciliarfortsätze, mit-

telbar also auf den Rand der Linse, gedrückt werden. Auf diese Weise wird wahrscheinlich die Krystalllinse mehr oder weniger gewölbt und dadurch die Accommodation vermittelt.

Die Begrenzung der drei Medien des Auges ist eine nahe kugelförmige, um die durch den Scheitel der Hornhaut und den Mittelpunkt des Auges gehende Axe des Auges gedrehte, Rotationsfläche. Die beiden ersten durchsichtigen Medien, die wässerige Feuchtigkeit B und die Krystalllinse A, dienen als ein System zweier unmittelbar an einander liegender Sammellinsen, welche bewirken, dass das von einem leuchtenden Punkte ausgehende Licht so gebrochen wird, dass es auf einem Punkte der unmittelbar hinter dem dritten Mittel, dem Glaskörper C, ausgebreiteten Netzhaut wieder in einen Punkt vereinigt wird. Auf der Fläche dieser Haut wird daher ein reelles optisches Bild der aussen gesehenen Gegenstände entworfen; dasselbe ist umgekehrt und verkleinert. Man kann es an frisch ausgeschnittenen Augen sichtbar machen, wenn man vorsichtig den hintern mittlern Theil der Sehnen- und Aderhaut entfernt, die Netzhaut aber stehen lässt, und nun die Hornhaut eines so präparirten Auges gegen helle Gegenstände kehrt. Das Bild erscheint dann klein, hell und scharf und als ein umgekehrtes auf der stehen gebliebenen Netzhaut. Noch besser ist das Bildchen nach der Methode von Gerling zu sehen [1]), wenn man die Elemente der Netzhaut mit einem Pinsel entfernt und dann ein Täfelchen von Glas oder Glimmer in die Oeffnung einschiebt.

Derjenige Punkt, welchen wir beim Sehen fixiren, wird jedesmal an der vorhin als gelber Fleck bezeichneten Stelle der Netzhaut abgebildet; dadurch, dass diese Stelle die empfindlichste ist, sehen wir die fixirten Punkte am schärfsten. Nur dort ist zugleich das optische Bild scharf begrenzt, an andern Stellen der Netzhaut ist es weniger scharf; deshalb sehen wir in der Regel auch nur den einen Punkt deutlich, den wir fixiren, alle übrigen undeutlich. Indess ist diese Undeutlichkeit nicht allein durch die geringere Schärfe der Bilder, sondern wesentlich mit durch die geringere Empfindlichkeit der Netzhaut bedingt, da sie schon in geringer Entfernung von der fixirten Stelle viel grösser ist als die objective Undeutlichkeit der Netzhautbilder.

Das Gesichtsfeld eines einzelnen Auges wird bestimmt durch die Weite der Pupille und deren Lage zum Rande der Hornhaut; nach innen, oben und unten wird es durch Theile des Antlitzes, Nase, Augenbrauenrand und Wangen begrenzt, nur nach aussen ist es ganz frei. Beide Augen zusammen überschauen, wenn ihre Axen parallel in die Ferne gerichtet sind, einen horizontalen Bogen von 180 und mehr Graden.

§. 49.

Gang der Lichtstrahlen im Auge. Die Lichtstrahlen, welche von einem entfernten leuchtenden Punkte auf das Auge treffen, werden zuerst

1) *Gerling*, Poggend. Annal. Bd. XLVI.

von der Hornhaut gebrochen, und zwar so, dass sie ungestört weiter gehend sich etwa 10^{mm} hinter der Netzhaut in einem Punkte vereinigen würden. Indem sie so convergirend durch die vordere Augenkammer gehen, treffen sie auf die biconvexe Krystalllinse, werden von dieser noch convergenter gemacht und können in Folge dessen nun schon auf der Netzhaut zur Vereinigung gelangen.

Wenn auch die einzelnen Flächen von Kugelflächen abweichen, so können wir doch zur Bestimmung der Lage und Grösse der Bilder das Auge als ein optisches System centrirter Kugelflächen ansehen, dessen Axe mit der Axe des Auges zusammenfällt. Die einzelnen Krümmungsverhältnisse unterliegen wohl ziemlich bedeutenden individuellen Verschiedenheiten, für uns genügt es, ein mittleres Auge zu betrachten. Ein solches liefern uns folgende aus den Messungen von Helmholtz [1]) abgeleiteten Werthe der einzelnen Brechungsexponenten und Krümmungsradien der Theile des Auges [2]):

1. Brechungsexponent der Hornhaut, der wässerigen Feuchtigkeit und des Glaskörpers . . . . $^{101}/_{75} = 1,3465$
2. Brechungsexponent der Linse . . . . $^{16}/_{11} = 1,4545$
3. Krümmungsradius der Hornhaut . . . . 7,8 Mm.
4. „ „ vordern Linsenfläche . . . . . 9,51 „
5. „ „ hintern „ . . . . . 5,87 „
6. Abstand der vordern Linsenfläche von der vordern Hornhautfläche . . . . 3,78 „
7. Dicke der Linse . . . . 4 „

Um nun aus diesen Daten den Gang der Lichtstrahlen im Auge zu erhalten, haben wir in die allgemeinen Gleichungen der §§. 33, 34, 36 diese Daten einzusetzen und die Lage der Cardinalpunkte des Auges zu berechnen.

Wir betrachten nun das Auge am bequemsten als ein System von drei brechenden Flächen, deren erste die Hornhaut ist, deren andere zusammen die Linse bilden. Um die Cardinalpunkte dieses ganzen Systems zu bestimmen, haben wir dieselben zunächst für die einzelnen Theile desselben aufzusuchen. Als ersten Theil betrachten wir die Vorderfläche der Hornhaut, vor welcher Luft, hinter welcher wässerige Feuchtigkeit sich befindet. Als zweiten Theil die Krystalllinse, vor und hinter welcher sich Mittel gleichen Brechungsvermögens befinden.

Die Hauptpunkte des ersten Theiles befinden sich nach §. 33 beide im Scheitel der Hornhaut.

Für die zweite Hauptbrennweite haben wir nach §. 31 die Gleichung

$$F_1 = \frac{nr}{n-1};$$

---

1) *Helmholtz*, Physiologische Optik. §. 10.

2) Man sehe *Wüllner*, Einleitung in die Dioptrik des Auges. Leipzig 1866.

setzen wir darin $n = 1,3465$, $r = 7,8$, so wird

$$F_1 = \frac{1,3465 \cdot 7,8}{0,3465} = 30^{mm},31.$$

Für die erste Brennweite haben wir

$$A_1 = \frac{F_1}{n} = \frac{r}{n-1} = \frac{7,8}{0,3465} = 22^{mm},22.$$

Durch die Lage der Hauptpunkte, Knotenpunkte und Hauptbrennpunkte ist das Verhalten der Hornhaut vollständig bestimmt, der erste Hauptbrenn punkt liegt hiernach um $22^{mm},22$ vor der vordern Fläche der Hornhaut, der zweite um $30^{mm},31$ hinter derselben.

Der zweite Theil unseres Systems ist die Krystalllinse, welche wir uns durch eine homogene Linse mit den vorhin angegebenen Constanten ersetzt denken. Die Lage des ersten Hauptpunktes derselben erhalten wir nach §. 33 aus der Gleichung

$$h_1 = \frac{(\nu - 1)\, rd}{(\nu - 1)(n-1)\, d - (\nu - 1)\, nr - (n-1)\, \varrho},$$

worin d die Dicke, r der Radius der vordern, ϱ der Radius der hintern Fläche der Linse ist, n den Brechungsexponenten des Lichtes bei dem Uebergange aus der wässerigen Feuchtigkeit in die Linse und ν denjenigen beim Uebergange des Lichtes aus der Linse in den Glaskörper bedeutet. Da das Brechungsvermögen der wässerigen Feuchtigkeit und des Glaskörpers dasselbe ist, so folgt zunächst $\nu = \frac{1}{n}$. Führen wir den Werth ein, so wird

$$h_1 = \frac{dr}{(n-1)\, d - n\,(r - \varrho)}.$$

Den Werth von n erhalten wir aus den angegebenen Constanten folgendermassen; ist n_1 der Brechungsexponent des Lichtes beim Uebergange aus Luft in wässerige Feuchtigkeit, n_2 jener bei dem Uebergange aus Luft in die Linse, so ist, wie schon mehrfach erwähnt,

$$n \cdot n_1 = n_2; \quad n = \frac{n_2}{n_1},$$

somit

$$n = \frac{1,4545}{1,3465} = 1,0802.$$

Setzen wir nun für r seinen Werth $9^{mm},51$, für $d = 4^{mm}$ und für ϱ, da die hintere Fläche dem ankommenden Lichte ihre concave Seite zuwendet, $\varrho = -5^{mm},87$ ein, so wird

$$h_1 = \frac{4 \cdot 9,51}{0,0802 \cdot 4 - 1,0802\,(9,51 + 5,87)} = -\frac{38,04}{16,2926} = -2^{mm},334.$$

Der erste Hauptpunkt liegt also, übereinstimmend mit Messungen von Helmholtz, im Innern der Linse um $2^{mm},334$ hinter dem Scheitel der vordern Fläche.

Für den zweiten Hauptpunkt haben wir nach §. 33

$$h_2 = \frac{(n-1)\,\nu d\varrho}{(\nu-1)(n-1)\,d - (\nu-1)\,nr - (n-1)\,\varrho}$$

oder mit Beachtung, dass $\nu = \frac{1}{n}$,

$$h_2 = -\frac{d\varrho}{(n-1)\,d - n\,(r-\varrho)} = -\frac{23{,}48}{16{,}2926} = -1^{mm},441.$$

Der zweite Hauptpunkt liegt also ebenfalls in der Linse, um $1^{mm},441$ vor dem Scheitel der hintern Fläche.

Die beiden Hauptbrennweiten der Linse sind einander gleich, da sich an beiden Seiten derselben dasselbe brechende Mittel befindet.

Für die zweite Hauptbrennweite haben wir, da $\nu = \frac{1}{n}$, nach §. 35

$$F_2 = \frac{r\,\varrho}{(n-1)\left\{\varrho - r + \frac{n-1}{n}\cdot d\right\}} = \frac{9{,}51\;.\;5{,}87}{0{,}0802\left\{5{,}87 + 9{,}51 - \frac{0{,}0802}{1{,}0802}\cdot 4\right\}}$$

$$F_2 = \frac{55{,}8237}{0{,}0802\,(15{,}38 - 0{,}295)} = 46{,}142.$$

Dieser Werth der Hauptbrennweite liegt zwischen den beiden von Helmholtz durch direkte Messung erhaltenen Werthen; er gibt an, dass Strahlen, welche in der wässerigen Feuchtigkeit einander und mit der Axe der Linse parallel sind, nach der Brechung in der Linse in einem Abstande von $46^{mm},142$ hinter dem zweiten Hauptpunkte der Linse sich vereinigen, oder dass Strahlen, welche in der wässerigen Feuchtigkeit nach einem 46,142 vor dem ersten Hauptpunkte der Linse liegenden Punkte convergiren, nach der Brechung in der Linse parallel einander weiter gehen.

Mit Hülfe der im §. 36 für ein System von mehr als zwei brechenden Flächen entwickelten Gleichungen erhalten wir nun die Cardinalpunkte des Auges selbst.

Den ersten Hauptpunkt des Auges bekommen wir aus der Gleichung

$$h_1 = \frac{A_1\,D}{D - F_1 - A_2},$$

worin h_1 den Abstand des Hauptpunktes des ganzen Systems vom ersten Hauptpunkte des ersten Systems, hier also vom Scheitel der Hornhaut, A_1 die erste Hauptbrennweite, F_1 die zweite Hauptbrennweite des ersten Systems, A_2 die erste Hauptbrennweite des zweiten Systems und D den Abstand des ersten Hauptpunktes des zweiten Systems, der Krystalllinse vom zweiten Hauptpunkte des ersten Systems, hier ebenfalls der Scheitel der Hornhaut, bedeutet. Setzen wir die soeben im Einzelnen bestimmten Werthe, und für D die Summe des Zwischenraumes zwischen der Hornhaut und der Krystalllinse und des Abstandes des ersten Hauptpunktes der Linse vom Scheitel derselben, so wird

$$h_1 = \frac{22{,}22 \, . \, 6{,}114}{6{,}114 - 30{,}31 - 46{,}142} = - \frac{135{,}85308}{70{,}338} = - 1^{mm}{,}931.$$

Der erste Hauptpunkt des Auges liegt also in der wässerigen Feuchtigkeit um $1^{mm},931$ hinter der Vorderfläche der Hornhaut.

Die Lage des zweiten Hauptpunktes erhalten wir aus der Gleichung

$$h_2 = \frac{D \, . \, F_2}{D - F_1 - A_2},$$

worin h_2 den Abstand des zweiten Hauptpunktes der Krystalllinse bedeutet. Setzen wir die betreffenden Werthe ein, so wird

$$h_2 = \frac{6{,}114 \, . \, 46{,}142}{6{,}114 - 30{,}31 - 46{,}142} = - \frac{282{,}11218}{70{,}338} = - 4^{mm}{,}011.$$

Der zweite Hauptpunkt liegt also um $4^{mm},011$ vor dem zweiten Hauptpunkte der Linse; letzterer liegt nun um $1^{mm},441$ vor der Hinterfläche der Linse, der zweite Hauptpunkt des Auges liegt also um $5^{mm},452$ vor der Hinterfläche der Linse, und da letztere um $7^{mm},78$ hinter dem Scheitel der vordern Hornhautfläche liegt, so liegt der zweite Hauptpunkt des Auges $2^{mm},328$ hinter der Vorderfläche der Hornhaut oder $0^{mm},397$ hinter dem ersten Hauptpunkte des Auges.

Die beiden Hauptbrennweiten des Auges erhalten wir nach §. 36 aus den beiden Gleichungen

$$F = \frac{F_1 \, F_2}{F_1 + A_2 - D}$$

und die erste

$$A = F \cdot \frac{A_1 \, A_2}{F_1 \, F_2}.$$

Setzen wir in den Ausdruck für F die betreffenden Werthe ein, so wird

$$F = \frac{30{,}31 \, . \, 46{,}142}{70{,}338} = 19^{mm}{,}883.$$

Der zweite Hauptbrennpunkt liegt also um $19^{mm},883$ hinter dem zweiten Hauptpunkte des Auges, und da dieser um $5^{mm},452$ vor der Hinterfläche der Krystalllinse liegt, um $14^{mm},431$ hinter der Hinterfläche der Linse.

Da in dem Ausdrucke für die erste Hauptbrennweite

$$F_2 = A_2 \, ; \quad F_1 = n \, . \, A_1$$

ist, wenn $n = 1{,}3465$ der Brechungsexponent der wässerigen Feuchtigkeit ist, so folgt

$$A = \frac{F}{1{,}3465} = 14{,}767.$$

Der erste Brennpunkt liegt somit um $14^{mm},767$ vor dem ersten Hauptpunkte, und da letzterer um $1^{mm},931$ hinter dem Scheitel der Hornhaut liegt, um $12^{mm},836$ vor dem Scheitel der Hornhaut.

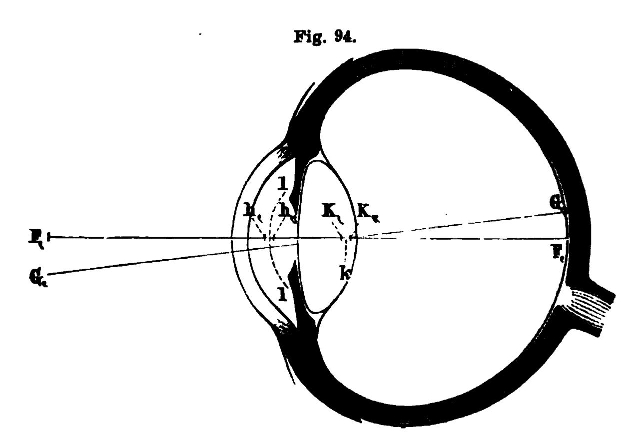
Es erübrigt noch die Bestimmung der Knotenpunkte; wie wir sahen, liegt der erste Knotenpunkt um die zweite Hauptbrennweite hinter dem ersten

Hauptbrennpunkte, der zweite um die erste Hauptbrennweite vor dem zweiten Hauptbrennpunkte. Der erste Knotenpunkt liegt demnach $5^{mm},116$ hinter dem ersten Hauptpunkte oder $7^{mm},047$ hinter dem Scheitel der Hornhaut, $0^{mm},734$ vor der Hinterfläche der Linse. Der zweite Knotenpunkt liegt $0^{mm},337$ vor der Hinterfläche der Linse, der Abstand der beiden Knotenpunkte ist gleich $0^{mm},397$, gleich dem Abstande der beiden Hauptpunkte von einander.

Der zweite Hauptbrennpunkt liegt nach obigen Rechnungen $14^{mm},431$ hinter dem Scheitel der zweiten Linsenfläche. Nach Messungen von C. Krause liegt die Netzhaut $14^{mm},387$ hinter der hintern Linsenfläche; der zweite Hauptbrennpunkt fällt somit auf die Netzhaut.

Die Lage der Hauptpunkte $h_{,}$ und $h_{,,}$, Knotenpunkte $K_{,}$ und $K_{,,}$ und Hauptbrennpunkte $F_{,}$ und $F_{,,}$ ist hiernach in der aus Helmholtz physiologischer Optik entnommenen Fig. 94 dargestellt.

Fig. 94.



Mit Hülfe dieser Kardinalpunkte kann man für ein Auge den Weg der Lichtstrahlen im Auge finden und die von irgend einem Gegenstande entworfenen Bilder ihrer Lage und Grösse nach beurtheilen. Wir können zu dem Ende das Auge uns sogar noch einfacher denken.

Da nämlich sowohl die beiden Hauptpunkte als auch die beiden Knotenpunkte sehr nahe zusammenliegen, so kann man bei Beurtheilung der entstehenden Bilder ohne bemerklichen Fehler sowohl die Hauptpunkte als auch die beiden Knotenpunkte in einen Punkt zusammenziehen. Das so noch mehr vereinfachte Schema des Auges nennt Listing das reducirte Auge. In dem reducirten Auge liegt der Hauptpunkt $2^{mm},3448$ hinter der Vorderfläche der Hornhaut und der Knotenpunkt k Fig. 94 um $0^{mm},4764$ vor der Hinterfläche der Linse. Die Brennpunkte bleiben dieselben.

Da hiernach die vor der Brechung nach dem Knotenpunkte convergirenden Strahlen nach dem Eintritt in das Auge ungebrochen weiter gehen, so ist die Wirkung des reducirten Auges gleich der einer brechenden Kugelfläche, deren Mittelpunkt der Knotenpunkt ist und deren Radius gleich ist dem Ab-

stande des Knotenpunktes von dem Hauptpunkte, vor welcher Luft und hinter welcher Glaskörper ist. Der Krümmungsradius der Kugel würde gleich $5^{mm},1248$ sein. Berechnet man hiernach die Lage der Brennpunkte des so auf eine brechende Fläche reducirten Auges, so findet man dieselbe genau wie im schematischen Auge. Darin liegt auch nach den früher gegebenen Entwicklungen über die Brechung in Linsen, welche zwei Mittel trennen, die Berechtigung dieser Reduction. In Fig. 94 ist diese Fläche durch den Bogen ll dargestellt, welche der Hinterfläche der Linse um $2^{mm},3448$ näher gerückt ist als der Scheitel der Hornhaut.

Wenn wir die Wirkung des reducirten Auges annehmen, so erhalten wir die Lage des Bildes auf der Netzhaut, wenn wir von dem leuchtenden Punkte eine gerade Linie nach dem Knotenpunkte ziehen und diese bis zur Netzhaut verlängern; wo sie die Netzhaut trifft, ist der Ort des Bildes. Eine solche Linie heisst die Richtungslinie des Sehens und daher auch der Knotenpunkt der Kreuzungspunkt der Richtungslinien.

Die in diesem Paragraphen angenommenen Zahlen gelten für ein Auge, welches auf unendliche Entfernungen accommodirt ist, da angenommen ist, dass der zweite Hauptbrennpunkt auf die Netzhaut fällt. Die Bilder leuchtender Punkte, welche in nicht unendlicher Entfernung liegen, fallen daher hinter die Netzhaut, und auf der Netzhaut selbst entstehen dann Zerstreuungskreise. Die Lage der Bilder und die Grösse der Zerstreuungskreise ergeben sich folgendermassen.

Was zunächst die Lage der Bilder betrifft, so erhalten wir deren Abstand f von dem Scheitel der brechenden Fläche des reducirten Auges oder den Abstand g von dem Knotenpunkte nach §. 31 (5) und (5a)

$$f = \frac{a \cdot F}{a - A}; \quad g = \frac{b \cdot G}{b - B},$$

wenn a den Abstand des leuchtenden Punktes vom Scheitel, A die erste, F die zweite Hauptbrennweite bedeutet; und in der Gleichung für g die Grössen b, B, G die Abstände des leuchtenden Punktes und des ersten und zweiten Brennpunktes von dem Mittelpunkte bedeuten.

Für den Abstand des Bildes von der Netzhaut, welche um F von dem Scheitel, um G von dem Mittelpunkte entfernt ist, erhalten wir daraus

$$f - F = \frac{A \cdot F}{a - A}; \quad g - G = \frac{B \cdot G}{b - B}.$$

Um die Grösse des Zerstreuungskreises auf der Netzhaut zu erhalten, dürfen wir annehmen, dass die in das Innere des Auges eindringenden Strahlen einen Kegel bilden, dessen Basis die Pupille und dessen Spitze der Bildpunkt, dessen Höhe also gleich dem Abstande der Pupille von dem Bildpunkte ist. Nennen wir daher den Abstand der Pupille, welche der vordern Linsenfläche aufliegt, vom Knotenpunkte δ, so ist die Höhe des Kegels gleich $g + \delta$. Dieser Strahlenkegel wird nun von der der Pupille parallelen Netzhaut geschnitten, welche um F von dem Scheitel des reducirten Auges ent-

fernt ist. Dieser Durchschnitt der Netzhaut und des Strahlenkegels ist der Zerstreuungskreis. Nennen wir nun den Durchmesser der Pupille p und den des Zerstreuungskreises z, so erhalten wir letztern aus der Proportion

$$p : z = g + \delta : f - F,$$

da die Durchmesser der Basis zweier Kegel gleicher Oeffnung sich verhalten wie die Höhen der Kegel. Somit ist

$$z = p \frac{f - F}{g + \delta}.$$

Der Durchmesser der Pupille ist nun nach Listing $p = 4^{mm}$ und da die Dicke der Linse 4^{mm} und der Knotenpunkt um $3^{mm},5236$ hinter der Vorderfläche der Linse liegt, so ist $\delta = 3^{mm},5236$.

Rechnen wir die Abstände a und A, wie es unsere Gleichung voraussetzt, von dem Scheitel des reducirten Auges, so ist A sehr nahe gleich 15^{mm} und $A \,.\, F$ nahe 300. Nach Listing[1]) ist dann

für $a - A$	$f - F$	z
∞	0^{mm}	0^{mm}
65^{m}	0,005	0,0011
25	0,012	0,0027
6	0,050	0,0112
1,5	0,200	0,0443
0,75	0,40	0,0825
0,375	0,80	0,1616
0,188	1,60	0,3122
0,094	3,20	0,5768.

Man sieht aus dieser Tabelle, dass die Lage des Bildes sich nur wenig ändert, wenn die Entfernung des leuchtenden Punktes sehr gross ist, wie das Bild sich dagegen rasch von der Netzhaut entfernt, wenn der Punkt nahe rückt.

Das von uns angenommene Auge wird daher in grossen Entfernungen deutlich sehen, in kleinen, wo die Zerstreuungskreise sehr gross werden, aber nicht; denn für diese wird das auf der Netzhaut entworfene Bild dieselbe Beschaffenheit haben wie das Bild, welches durch eine Linse entworfen wird, wenn der auffangende Schirm der Linse näher ist als die Vereinigungsweite der Lichtstrahlen.

§. 50.

Sehen in verschiedener Entfernung. Am Schlusse des vorigen Paragraphen sahen wir, dass in dem von uns supponirten Auge nur von sehr weit entfernten Gegenständen scharfe Bilder auf der Netzhaut entstehen.

Da nun die Bilder der Netzhaut die Gesichtswahrnehmungen vermitteln, so würde ein solches Auge nur in bestimmten und zwar sehr grossen Ent-

1) *Listing* a. a. O., Dioptrik des Auges.

fernungen deutlich sehen. Die gewöhnlichste Erfahrung zeigt uns nun aber, dass das wirkliche gesunde Auge nicht so beschränkt ist, sondern dass wir sehr entfernte und sehr nahe Gegenstände bis zu einer gewissen Grenze deutlich sehen können. Man hat daher wohl geglaubt, dass das Auge ein optischer Apparat ganz eigenthümlicher Art sei, der zugleich Strahlen aus unendlicher Entfernung und aus grosser Nähe in einem Punkte vereinigen könne, auf den also die Gesetze der Lichtbrechung in Linsen nicht anwendbar seien. Dass indess diese Ansicht falsch sei, lässt sich sehr leicht zeigen. Denn wenn man irgend einen bestimmten Punkt fixirt, so sieht man nur diesen deutlich und scharf begrenzt, alle übrigen jedoch undeutlich. Sehen wir in die Ferne, so erscheinen uns, wie man sich bei einiger Achtsamkeit leicht überzeugt, alle nahe liegenden Gegenstände mit verwischten und verschwommenen Contouren, umgekehrt scheinen uns die fernern Gegenstände so bei Fixirung nahe gelegener Punkte. In jedem Falle erscheinen somit auf der Netzhaut Zerstreuungskreise von den nicht fixirten Punkten, der Vereinigungspunkt der von diesen ausgehenden Strahlen liegt vor oder hinter der Netzhaut, nur der Vereinigungspunkt der von den fixirten Punkten ausgehenden Strahlen fällt gerade auf die Netzhaut.

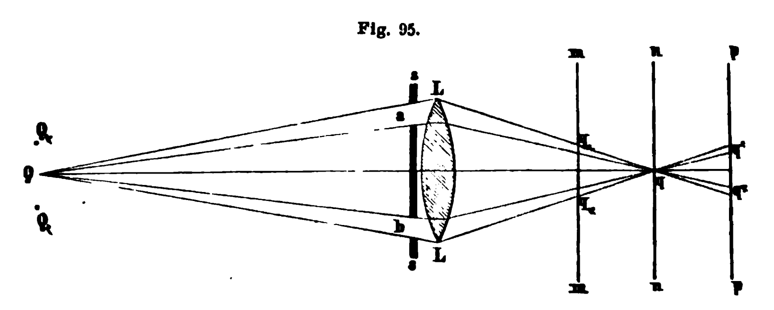
Nach den Gesetzen der Brechung in Linsen muss nun der Vereinigungspunkt der Strahlen, welche weiter herkommen als von dem Punkte, dessen Bild gerade auf einen hinter der Linse befindlichen Schirm fällt, vor dem Schirme liegen, kommen sie aber von näher liegenden Punkten, so muss der Vereinigungspunkt hinter dem Schirme liegen. Dass auch dieses in dem Auge der Fall ist, zeigt der unter dem Namen des Scheiner'schen bekannte Versuch [1]).

Man mache in ein Kartenblatt zwei Löcher, deren Abstand kleiner ist als der Durchmesser der Pupille, also ungefähr zwei Millimeter, halte dieselben so vor das Auge, dass die Verbindungslinie horizontal ist, und sehe dadurch nach einer feinen Nadel, welche vertical vor dem hellen Hintergrunde des Fensters aufgestellt ist. Fixirt man die Nadel, so sieht man dieselbe einfach und scharf begrenzt; bedeckt man das eine der Löcher, so erscheint sie weniger hell, da dann weniger Licht von ihr in das Auge fällt. Fixirt man aber einen weiter vom Auge entfernten Gegenstand, oder einen näher liegenden, so sieht man die Nadel in beiden Fällen doppelt. Bedeckt man dann eines der Löcher, so verschwindet eines der beiden Bilder, während das andere unverändert bleibt. Es verschwindet aber ein anderes Bild, wenn man einen nähern, als wenn man einen fernern Gegenstand fixirt. Fixirt man einen nähern Punkt, so verschwindet das rechts stehende der beiden Bilder, wenn man das rechte Loch verdeckt, fixirt man aber einen fernern Punkt, so verschwindet beim Verdecken des rechten Loches das linke Bild. Aus diesem Versuche folgt nun, dass die Strahlen, welche von fernern Punkten als den fixirten kommen, sich

1) *Helmholtz,* physiol. Optik. §. 11.

vor der Netzhaut schneiden, Strahlen dagegen, welche von nähern Punkten kommen, erst hinter der Netzhaut. Denn ist LL (Fig. 95) eine Linse und Q

Fig. 95.



ein leuchtender Punkt in einem gegebenen Abstande, dessen Bild in q liegt, und bringen wir nun vor der Linse einen Schirm ss an, der nur die beiden kleinen Löcher a und b hat, so wird auf dem durch den Bildpunkt q gestellten Schirm nn nur ein einfaches Bild erscheinen, welches nur dunkler ist, als wenn die Linse unbedeckt wäre. Auf den Schirmen mm, pp, auf denen bei unbedeckter Linse Zerstreuungskreise sich zeigen würden, werden aber bei dieser Vorrichtung je zwei helle Punkte $q_{,}$, $q_{,,}$ und q', q'' erscheinen. Wird dann das untere Loch bedeckt, so verschwindet auf dem ersten Schirme der untere Punkt $q_{,,}$, auf dem zweiten der obere q'.

Denken wir uns nun anstatt der Linse die brechenden Medien des Auges und statt der Schirme mm, nn, pp die Netzhaut des Auges, so entsteht auf derselben nur ein Bild, man sieht den Gegenstand einfach, wenn der Vereinigungspunkt der Strahlen gerade auf die Netzhaut fällt. Fällt er hinter dieselbe, wenn die Netzhaut in mm ist, so entstehen auf ihr zwei Bilder, und man glaubt anstatt des einen leuchtenden Punktes Q zwei zu sehen, $Q_{,}$ und $Q_{,,}$. Und da das Bild auf der Netzhaut beim Aufrechtsehen umgekehrt ist, so entspricht dem Eindruck des obern Bildpunkes q, der untere Punkt $Q_{,}$, und dem untern Bildpunkt $q_{,,}$ der obere Punkt $Q_{,,}$. Wird nun $q_{,,}$ verdeckt, so verschwindet von den beiden gesehenen leuchtenden Punkten der obere. Wenn also in dem Falle, dass der Vereinigungspunkt der Strahlen hinter die Netzhaut fällt, die untere Oeffnung b verschlossen wird, so verschwindet von den beiden gesehenen Punkten der obere. Da nun beim Scheiner'schen Versuche, wenn das Auge auf ferner liegende Gegenstände eingestellt ist, von den Doppelbildern der näher liegenden Punkte beim Verdecken des linken Loches das rechte Bild verschwindet, so folgt, dass der Vereinigungspunkt der von ihnen ausgehenden Strahlen hinter die Netzhaut fällt.

Befindet sich dagegen die Netzhaut in pp, so entstehen auf ihr ebenfalls zwei Bilder, q' und q''; man sieht wieder doppelt, und der eben gegebenen Entwicklung gemäss entspricht dem Netzhautbild q' der untere Punkt $Q_{,}$ und dem Bilde q'' der obere Punkt $Q_{,,}$. Das Netzhautbild q' wird aber, da die Strahlen sich vor ihr kreuzen, durch das untere Bündel, welches die Oeff-

nung b durchsetzt, erzeugt; wird daher b verschlossen, so verschwindet das untere Bild $Q_,$. Beim Scheiner'schen Versuche verschwindet, wenn das Auge auf nahe Gegenstände eingestellt ist, von den Doppelbildern der fernern bei Bedeckung des linken Loches das linke Bild, der Vereinigungspunkt der von ihnen ausgehenden Strahlen fällt daher vor die Netzhaut.

Da nun das Bild eines gegebenen Punktes beim Fixiren fernerer Gegenstände hinter, beim Fixiren näherer vor die Netzhaut fällt, so folgt, dass bei Accommodation für die Nähe oder Ferne der Gang der Lichtstrahlen im Auge ein anderer wird, und zwar, dass bei Accommodation für die Nähe die Brennweite des Auges eine kleinere ist als bei Accommodation für die Ferne.

Diese Veränderung des Auges geschieht durch einen willkürlichen Act, in dem es ganz von unserem Willen abhängt, das Auge für die eine oder andere Entfernung einzustellen.

Der Mechanismus der Accommodation war bis auf die neueste Zeit dunkel, da durch eine Reihe verschiedener Aenderungen des Auges die Brechung des Lichtes in ihm eine andere werden kann. Wir können auf diese verschiedenen Ansichten nicht eingehen [1]), besonders da nach den neuern Versuchen von Max Langenbeck [2]), Cramer [3]) und Helmholtz [4]) kein Zweifel darüber mehr herrschen kann, dass es eine Veränderung der Linse ist, welche die Accommodation bewirkt. An der Vorder- und Hinterfläche tritt nämlich, da vor und hinter der Linse eine Flüssigkeit anderer Brechbarkeit ist, eine Reflexion des Lichtes ein, durch welche, da die Flächen als Kugelspiegel wirken, Bilder der Gegenstände entstehen, welche Licht auf die Linse werfen. Die oben erwähnten Forscher haben nun gezeigt, wenn man von der Linse das Bild einer Lichtflamme reflectiren lässt, während das beobachtete Auge bald für die Nähe, bald für die Ferne accommodirt ist, dass dann die Grösse des Flammenbildes eine andere wird, und zwar kleiner, wenn das Auge für die Nähe, grösser, wenn es für die Ferne accommodirt ist. Da nun das von Kugelspiegeln entworfene Bild um so kleiner ist, je kleiner der Krümmungsradius des Spiegels ist, so folgt aus diesen Versuchen, dass die Verkürzung der Brennweite des Auges bei Accommodation für die Nähe durch stärkere Krümmung der Linsenflächen erzeugt wird. Bei der stärkern Krümmung wird zugleich die Vorderfläche der Linse der Hornhaut etwas genähert, die hintere nicht, die Linse wird also etwas dicker. Nach Helmholtz ist der Krümmungsradius der vordern Linsenfläche bei Accommodation für die Ferne am schematischen Auge 10^{mm}, für die Nähe 6^{mm}, der hintern für die Ferne 6^{mm}, für die Nähe $5^{mm},5$.

---

1) Man sehe *Helmholtz* a. a. O., Geschichte der Accommodationslehre zu §. 12.

2) *M. Langenbeck,* Klinische Beiträge aus dem Gebiete der Chirurgie und Ophthalmologie. I. 1849. Göttingen.

3) *Cramer,* Ueber das Accommodationsvermögen. Deutsch von Doden. Leer 1855.

4) *Helmholtz* in Gräfe, Archiv für Ophtalm. I. und physiol. Optik. §. 11 und 12.

Nach Max Langenbeck und Henke [1]) wird diese Aenderung der Linse durch die Wirkung des Ciliarmuskels (*h* Fig. 93) in der Weise hervorgebracht, dass die circulären Muskelfasern bei Accommodation für die Nähe sich verkürzen, die radiären verlängert werden, und bei Accommodation für die Ferne das Umgekehrte eintritt.

Diese Accommodation des Auges ist jedoch nicht unbegrenzt, denn wenn auch bei einem normalen Auge parallel einfallendes Licht auf der Netzhaut vereinigt wird, das Auge also für unendliche Entfernungen accommodirt werden kann, so kann man in der Nähe doch nur bis zu einer gewissen Entfernung deutlich sehen. Die Strahlen, welche von leuchtenden Punkten kommen, die näher als 100^{mm} beim Auge sind, lassen sich nicht mehr auf der Netzhaut vereinigen.

Jedes Auge sieht in einer gewissen Entfernung, ohne bemerkbare Anstrengung am deutlichsten; es ist das die Entfernung, in welcher man beim Lesen unwillkürlich ein Buch hält; für ein normales Auge ist dieser Abstand nahe 2,5 Decimeter. Man nennt diese Entfernung die Weite des deutlichen Sehens oder die deutliche Sehweite.

Nicht alle Augen haben die Fähigkeit, zwischen den oben angegebenen Entfernungen zu accommodiren. Solche Augen, deren Fernpunkt nicht in unendlichem, sondern endlichem, oft nur kleinem Abstande vom Auge liegt, nennt man kurzsichtig. Das Auge hat in dem Falle eine zu kurze Brennweite, die Vereinigungspunkte der Strahlen, welche von fernen Punkten kommen, liegen vor der Netzhaut. Man wird der Kurzsichtigkeit daher abhelfen dadurch, dass man die das Auge treffenden Strahlen weniger convergent macht, durch Vorsetzung eines Zerstreuungsglases. Andere können parallele, aber nicht die stark divergirenden Strahlen, welche von nahe liegenden Punkten aus das Auge treffen, auf der Netzhaut vereinigen; deren Nahepunkt ist also in die Ferne gerückt. Mit Hülfe convexer Brillen wird aber diesem Uebelstande abgeholfen werden können, und dadurch der Weitsichtige fähig sein, in die Nähe zu sehen [2]).

§. 51.

Monochromatische und chromatische Abweichung. Irradiation. In dem Auge kommen Abweichungen der Strahlen von dem eben betrachteten Gange mehrfacher Art vor. Die eigentliche sogenannte Abweichung wegen der Kugelgestalt, bei der die Randstrahlen in einer andern Distanz von der Linse vereinigt werden, als die centralen, zeigt sich zwar nur in sehr geringem Maasse, da einmal durch die Iris der Rand der Linse bedeckt ist, und so durch die Pupille nur die mehr centralen Strahlen in das Auge dringen, und da ferner durch die eigenthümliche Beschaffenheit der Linse die Mitte der-

---

1) *Henke* in Gräfe, Archiv für Ophtalm. VI.

2) Genaueres über Kurz- und Fernsichtigkeit etc. *A. Fick*, medicinische Physik. Braunschweig 1856.

selben stärker brechbar ist als die äussern Schichten[1]). Da nun die Randstrahlen nur äussere Schichten durchsetzen, so wird dadurch ihre Vereinigungsweite grösser, und derjenigen der Centralstrahlen gleich. Ja es sollen sogar nach Volkmann[2]) Fälle vorkommen, bei denen in Folge dieser eigenthümlichen Linsenconstruction die mittlern Strahlen näher bei der Linse vereinigt werden als die Randstrahlen.

Dagegen finden sich Abweichungen anderer Art, welche zu ganz eigenthümlichen Zerstreuungsfiguren Anlass geben, und welche Helmholtz[3]), da sie auch bei einfarbigem Lichte vorkommen, monochromatische Abweichungen nennt. Sie zeigen sich zwar besonders bei nicht vollkommener Accommodation, erscheinen jedoch bei Betrachtung intensiver Lichtpunkte auch bei vollkommener Accommodation.

Es gehören hierher die eigenthümlichen strahligen Figuren, als welche selbst den gesunden Augen die Sterne und entfernte Flammen erscheinen. Die Anzahl der Strahlenbüschel, welche von dem hellen Centrum radiär ausgehen, beträgt meist 8 — 10, sie ist für verschiedene Menschen verschieden. Auch leuchtende Punkte, welche näher liegen als der fixirte Punkt, geben zu derartigen Strahlenfiguren Veranlassung, doch unterscheiden sie sich nach Helmholtz von den erstern dadurch, dass sie in horizontaler Richtung ausgedehnter sind, während die erstern in verticaler Richtung ausgedehnter sind.

Von einer Lichtlinie entstehen, indem jeder Punkt von ihr solche Strahlenfiguren gibt, häufig mehrere Bilder. Dahin gehören die mehrfachen Bilder, welche die meisten Menschen von den Hörnern der Mondsichel haben.

Diese Erscheinungen rühren zwar zum Theil her von den Feuchtigkeitströpfchen, die sich meist auf der Hornhaut finden, und welche gerade so wie Wassertropfen, welche man auf eine Linsenfläche gebracht hat, die erzeugten Bilder zum Theil verzerren; theilweise haben sie aber ihren Grund in einer wirklichen Asymmetrie des Auges.

Wichtiger als diese ist die chromatische Abweichung des Auges. Das Auge ist kein achromatisches Linsensystem, wie man lange geglaubt hat, und kann es auch nicht sein, da die brechenden Medien vor und hinter der biconvexen Krystalllinse, nahezu den gleichen und einen kleinern Brechungsexponenten besitzen als die Linse. Das Auge muss daher dasselbe Dispersionsvermögen besitzen, als wenn es eine brechende Fläche wäre, vor welcher Luft und hinter welcher Glaskörper sich befinden, es muss das Dispersionsvermögen des reducirten Auges haben.

Dass das der Fall ist, haben Fraunhofer's und Helmholtz' Versuche auf das entschiedenste gezeigt[4]). Fraunhofer beobachtete ein Spectrum durch ein achromatisches Fernrohr, in dessen Ocular ein sehr feines Fadenkreuz an-

1) *Helmholtz*, phys. Optik. §. 10.

2) *Volkmann*, Artikel Sehen in R. Wagner's physiol. Handwörterbuch.

3) *Helmholtz* a. a. O. §. 14. *A. Fick*, Medicinische Physik.

4) *Fraunhofer* in Gilbert's Annalen. Bd. LVI. *Helmholtz* a. a. O. §. 13.

gebracht war, und bemerkte, dass er die Ocularlinse dem Fadenkreuz näher bringen musste, um dasselbe deutlich zu sehen, wenn er den violetten Theil des Spectrums betrachtete, als wenn er den rothen im Gesichtsfelde hatte. Indem er mit dem einen Auge einen äussern Gegenstand fixirte, mit dem andern den Faden im Fernrohr betrachtete, stellte er die Ocularlinse so, dass ihm der Faden ebenso deutlich erschien als das äussere Object und maass, um wieviel das Ocular verschoben werden musste, damit der Faden in verschiedenen Farben gleich deutlich gesehen wurde. Mit Berücksichtigung der chromatischen Abweichung des Oculars lässt sich daraus diejenige des Auges bestimmen. Fraunhofer fand dann, dass ein Auge, welches ein unendlich fernes Object deutlich sieht, wenn dasselbe Licht ausstrahlt, das der dunklen Linie *C* entspricht, bei demselben Accommodationszustande ein Object, das Licht von der dem dunklen Streifen *G* nahen Farbe aussendet, in einem Abstande von 0,45 bis 0,6 Meter deutlich sieht. Aus diesen und ähnlichen Versuchen folgt, dass in einem auf unendliche Entfernung eingestellten Auge der Brennpunkt der rothen Strahlen ungefähr $0^{mm},6$ hinter dem der violetten Strahlen liegt.

Man kann die Farbenzerstreuung des Auges sehr gut dadurch sichtbar machen, dass man mit dem Auge einen leuchtenden Punkt oder eine entfernte schmale Lichtquelle fixirt, und dann von der Seite her einen dunklen Schirm vor die Pupille schiebt (die Nase kann sehr gut durch eine kleine Drehung des Kopfes als solcher dienen), man sieht dann die Lichtlinie an der Seite, von welcher her man den Schirm verschiebt, wenn die Pupille halb bedeckt ist, roth, an der andern Seite blau gesäumt, ja wenn die Lichtlinie nur schmal ist, sehe ich ein, wenn auch nicht sehr vollkommenes Spectrum.

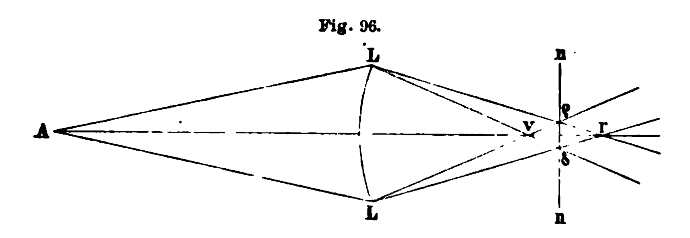
Ein leuchtender weisser Punkt erscheint weiss, wenn man ihn fixirt, aber als Zerstreuungskreis mit rothem Saum, wenn man einen ferner liegenden, als Zerstreungskreis mit blauem Saume, wenn man einen näher liegenden Punkt fixirt. Diese Erscheinungen, sowie die, dass die fixirten Punkte selbst nicht farbig erscheinen, erklären sich unmittelbar bei Betrachtung des Ganges der Lichtstrahlen im Auge.

Ist ein Auge für eine gewisse Entfernung accommodirt, so fällt der Vereinigungspunkt der Strahlen mittlerer Brechbarkeit auf die Netzhaut, derjenige der rothen Strahlen hinter, derjenige der violetten Strahlen vor dieselbe. Ist demnach (Fig. 96) *LL* die Vorderfläche des reducirten Auges, so befindet sich, wenn es auf den leuchtenden Punkt *A* eingestellt ist, die Netzhaut *nn* in der Brennweite der mittlern Strahlen, wo zugleich die Strahlenkegel der früher vereinigten violetten und der später sich kreuzenden rothen Strahlen gleiche Breite haben.

Auf der Netzhaut erscheint daher ein kleiner Zerstreuungskreis; da nun aber überall gemischte Farben vorkommen, welche zusammen als weiss empfunden werden, sieht das Auge den accommodirten Punkt *A* nicht farbig. Statt dessen erscheint er wie ein kleiner Kreis und gibt daher Anlass zu einer

Vergrösserung des Bildes, welche man mit dem Namen der Irradiation bezeichnet, die wegen der geringen Helligkeit der Zerstreuungskreise nur merklich ist, wenn der Punkt *A* hell auf dunklem Grunde ist.

Fig. 96.



Schiebt man nun vor die Pupille einen dunklen Schirm hin, der dieselbe mehr als zur Hälfte bedeckt, so sieht man, wie dann die durch die eine Hälfte eindringenden Lichtstrahlen fortgenommen werden; und würde z. B. nur das Strahlenbündel *AL* eingelassen, so muss auf der Netzhaut *nn* ein vollständiges Spectrum entstehen, in welchem, wenn der Schirm (Fig. 96) von unten vorgeschoben wird, oben roth und unten violett ist. Da aber nun, wie bereits erwähnt, ein auf der Netzhaut oben beleuchteter Punkt bewirkt, dass wir unterhalb der Augenaxe einen leuchtenden Punkt zu sehen glauben, so wird *A* unten, also an der Seite, von welcher her der Schirm vorgeschoben wird, roth, oben aber blau erscheinen.

Fixiren wir einen entferntern Punkt als *A*, so rücken die Vereinigungspunkte *v* und *r* weiter fort, es ist also dasselbe, als wenn *nn* näher an *LL* rückt, wir müssen einen Zerstreuungskreis erhalten mit einem rothen Saume. Fixiren wir dagegen einen nähern Punkt, so fallen die Punkte *v* und *r* näher an *LL*, wir erhalten einen Zerstreuungskreis mit blauem Saume.

Die von Plateau[1]) am ausführlichsten beschriebenen Irradiationserscheinungen lassen sich wohl sämmtlich auf die erwähnten Zerstreuungserscheinungen, welche auch bei vollkommener Accommodation auftreten, zurückführen[2]). Diese Erscheinungen lassen sich im Allgemeinen dahin zusammenfassen, dass stark beleuchtete Flächen grösser erscheinen, als sie wirklich sind, während die benachbarten dunklen Flächen um ebenso viel kleiner erscheinen. Die Erscheinungen sind am auffallendsten, wenn die Accommodation nicht ganz genau ist, sie zeigen sich aber, besonders bei starker Beleuchtung, auch wenn das Auge scharf accommodirt ist.

Die auffallendsten Irradiationserscheinungen sind die: erstens, dass helle Flächen auf dunklem Grunde grösser, dunkle auf hellem kleiner erscheinen; ein weisses Quadrat auf dunklem Grunde erscheint grösser als ein schwarzes auf hellem Grunde; die helle Mondsichel erscheint selbst bei scharfer Accommodation einem grössern Kreise anzugehören als der im Erdlicht schwach

1) *Plateau*, Poggend. Annal. Ergänzungsband I.
2) *Helmholtz* a. a. O. §. 21.

sichtbare Mond; zweitens, dass nahe liegende helle Flächen zusammenfliessen; ein feiner Draht vor die Sonne gehalten verschwindet, so auch ein Haar vor der hellsten Stelle einer Kerzenflamme, selbst wenn man das Auge scharf auf dasselbe einstellt; die weissen Felder eines Schachbrettes scheinen an den Ecken zusammenzufliessen und die schwarzen zu trennen; drittens, dass gerade Linien unterbrochen werden; ein Lineal zwischen das Auge und eine helle Lichtflamme gehalten, scheint dort, wo die helle Flamme darüber hervorblickt, ausgezackt zu sein.

Alle diese Erscheinungen reduciren sich darauf, dass die Ränder heller Flächen sich gleichsam vorschieben und über die benachbarten dunklen Flächen übergreifen; es geschieht das am meisten bei mangelhafter, indess auch, wenn auch nicht so stark, bei genauer Accommodation. Nun wissen wir aber, dass in allen den Fällen Zerstreuungskreise auf der Netzhaut entstehen, bei der Accommodation wegen der chromatischen und erwähnten monochromatischen Abweichung. Durch diese wird nun bewirkt, dass am Rande des Netzhautbildes die Helligkeit über die geometrische Grenze sich ausbreitet, und die Randtheile des Bildes weniger hell werden. Da nun unser Auge besonders bei grosser Helligkeit kleine Lichtunterschiede weniger leicht wahrnimmt als eine wenn auch schwache Beleuchtung vorher dunkler Stellen, so folgt, dass man bei dieser Erscheinung besonders die Verbreiterung des Hellen wahrnimmt, und dass die Irradiation um so deutlicher wird, je heller die angesehene Fläche ist. Es folgt daraus zugleich, wie Helmholtz nachweist, dass die Irradiation bis zu einer gewissen Grenze mit der Helligkeit der beleuchteten Fläche an Breite wächst.

Viele Physiologen und Physiker haben mit Plateau eine andere Theorie der Irradiation angenommen; sie glauben, dass die in der Netzhaut gereizte Nervenfaser die Fähigkeit habe, den Zustand der Reizung auch in benachbarten Nervenfasern hervorzurufen, und so dort eine Empfindung hervorzubringen, ohne dass dieselben vom Licht getroffen werden. Helmholtz indessen erklärt, wie früher schon Welcker[1]) und A. Fick[2]) diese Theorie für physiologisch nicht gerechtfertigt, und zugleich für überflüssig, da obige Erklärung für alle Einzelnheiten der Erscheinung ausreichend ist[3]).

§. 52.

Von den Gesichtsempfindungen. Die Lehre von den Gesichtsempfindungen, als einem rein physiologischen Gegenstande, sowie auch die Lehre von den Gesichtswahrnehmungen können in einem der Physik gewidmeten Werke nur kurz behandelt werden. Wir begnügen uns mit einer kurzen Uebersicht über die wichtigsten Resultate, soweit sie in physikalischer Bezie-

1) *H. Welcker,* Ueber Irradiation etc. Giessen 1852.
2) *A. Fick,* Medicinische Physik. Braunschweig 1856.
3) *Helmholtz,* Physiol. Optik. §. 21.

hung von Bedeutung sind und verweisen im Uebrigen auf die Lehrbücher der Physiologie, besonders auf das schon mehrfach erwähnte klassische Handbuch der physiologischen Optik von H. Helmholtz.

Unser Auge unterscheidet in dem dasselbe treffenden Lichte zweierlei, Quantität und Qualität, bei gleicher Qualität eine geringere oder grössere Helligkeit, und bei gleicher oder verschiedener Helligkeit verschiedene Farbe.

Da das Licht in der von uns angenommenen Hypothese eine Wellenbewegung des Aethers ist, ähnlich wie der Schall der Luft, so wird auch die Intensität des Lichtes der lebendigen Kraft der Aetherbewegungen gleich zu setzen sein, wie die Intensität des Schalles der lebendigen Kraft der schwingenden Lufttheile. Die Lichtempfindung wird nun veranlasst durch den Stoss des bewegten Aethers gegen die Netzhaut; je stärker der Stoss ist, um so intensiver ist daher auch die Lichtempfindung; indess ist die Lichtempfindung nicht der Stärke des Stosses oder der objectiven Lichtstärke einfach proportional zu setzen, denn unser Auge unterscheidet nicht alle nachweisbar vorhandenen Lichtunterschiede; die kleinsten wahrnehmbaren Abstufungen in der Lichtempfindung entsprechen nicht gleichen Unterschieden der Lichtstärke[1]). Man beleuchte eine weisse Fläche mit einem schwachen Lichte, so dass die Lichtstärke des von der Fläche ausgesandten Lichtes gleich h ist; man stelle dann vor die Fläche einen Stab, der auf die Fläche einen Schatten wirft, innerhalb dessen Grenzen dieselbe daher kein Licht jener ersten Quelle erhält, und beleuchte dann die Fläche durch ein zweites Licht, das ihr die Helligkeit H gibt. Die schattige Stelle der Fläche hat dann die Helligkeit H, während die übrige Fläche die Helligkeit $H+h$ hat. Ist nun die Helligkeit H nur gering, so erkennt das Auge den Schatten, es unterscheidet also die Helligkeiten H und $H+h$. Je mehr aber die Helligkeit H zunimmt, um so mehr verschwindet der Schatten, und es scheint, wie gross auch die Helligkeit h sein mag, eine grössere Helligkeit H zu geben, bei welcher das Auge die Unterschiede H und $H+h$ nicht mehr zu unterscheiden im Stande ist.

So wirft das Mondlicht einen deutlichen Schatten auf eine weisse Fläche, bringt man aber eine gut brennende Lampe nahe vor das Papier, so verschwindet der Schatten, ebenso verschwindet der Schatten einer Lampe, wenn man das Sonnenlicht auf das Papier fallen lässt.

Wenn man ein auf durchsichtigem Glase ausgeführtes photographisches Bild, welches lichte Stellen und stärkere und schwächere Schatten hat, vor einen Grund von immer steigender Helligkeit hält, so findet man, dass bei geringer Helligkeit des Grundes sehr zarte Schatten unsichtbar sind, bei grösserer sichtbar werden, dann eine Zeitlang gleich gut sichtbar sind und bei noch grösserer wieder verschwinden. Nun ist die Helligkeit eines bestimmten Schattens um einen bestimmten Theil der ganzen Helligkeit kleiner als die der lichten Stellen. Nennen wir letztere Helligkeit H, so wird die des

---

1) *Helmholtz*, Physiol. Optik. §. 21.

Schattens sein $(1 - a) H$, wo a einen für einen bestimmten Schatten constanten Werth hat, der ein ächter Bruch ist. Der Unterschied beider ist also $a \cdot H$, welcher mit der Helligkeit H selbst grösser und kleiner wird. Bei geringer Helligkeit ist der Unterschied $a H$ seinem absoluten Werthe nach zu klein, um wahrgenommen zu werden; er ist dann sichtbar, bis H einen gewissen grössten Werth erhält, und nimmt er mit H noch weiter zu, so verschwindet er wieder; trotzdem also der Unterschied $a H$ immer grösser wird, ist er bei einer gewissen Stärke der beiden Helligkeiten nicht mehr wahrnehmbar. Daraus geht hervor, dass es gewisse Grade mittlerer Lichtstärke gibt, innerhalb deren das Auge für kleine Unterschiede am empfindlichsten ist; es sind das die von uns gewöhnlich beim Lesen und Schreiben gebrauchten Lichtstärken. Innerhalb dieser Grenzen kann man nach Fechner und andern bei sehr verschiedenen Graden der Helligkeit Differenzen unterscheiden, die 0,01 der ganzen Helligkeit betragen, denn es fand sich, dass bei einem Rumford'schen Photometer bei Anwendung zweier vorher als gleich erkannter Flammen der eine Schatten nicht mehr gesehen wurde, wenn die eine Flamme 1', die andere 10' vom Schirme entfernt war.

Der Einfluss dieses Satzes auf die Photometrie ist klar, und man sieht, dass bei den früher beschriebenen Photometern die Vergleichung der Lichtstärken höchstens bis auf ein Procent genau sein kann.

Unser Auge unterscheidet ausserdem das durch verschiedene Wellenlänge und demnach verschiedene Brechbarkeit bestimmte Licht verschiedener Qualität, indem es dasselbe als verschiedene Farben erkennt. Nach diesen Farben haben wir bereits früher die verschiedenen Theile des Spectrums bezeichnet. Genauer gibt Helmholtz die Farben desselben folgendermassen an [1]).

Roth ist das weniger brechbare Ende des Spectrums bis nahe zur dunklen Linie C; von C bis D geht das Roth durch Orange, d. h. Gelbroth mit überwiegendem Roth in Goldgelb, d. h. Gelbroth mit überwiegendem Gelb über. Ersterem entspricht unter den Farbstoffen die Mennige, letzterem die Bleiglätte. Von D bis zur Linie b findet sich dann zuerst ein Streifen reines Gelb (Chromgelb), der etwa dreimal so weit von E als von D entfernt ist, dann folgt Grüngelb und von b bis E reines Grün (arseniksaures Kupferoxyd). Zwischen E und F geht das Grün durch Blaugrün in Blau über, zwischen F und G folgen verschiedene Töne des Blau, das erste Drittel von FG, sonst einfach Blau oder Himmelblau genannt, nennt Helmholtz Cyanblau, den übrigen Theil bis gegen F Indigblau. Dem Cyanblau entspricht das Berliner Blau, der Ultramarin dem Indigblau. Jenseits der Linie G bis H oder L (nach Stokes) folgt dann Violett, und auf dieses das Ultraviolett. Letzteres ist für gewönlich nicht sichtbar, kann aber bei sorgfältiger Abblendung des übrigen Lichtes und bei Anwendung von Quarzprismen und Quarzlinsen auch ohne Fluorescenz wahrgenommen werden. Seine Farbe ist bei schwacher Intensität

1) *Helmholtz* a. a. O. §. 19.

indigblau, bei grösserer bläulichgrau. Die geringe Sichtbarkeit der ultravioletten Strahlen erklärt Helmholtz, da sie nach den Versuchen von Brücke und Knoblauch von den Augenmedien nicht absorbirt werden, aus der Unempfindlichkeit der Netzhaut für Schwingungen so kleiner Wellenlänge.

Der Farbeneindruck einer bestimmten Lichtqualität ist keineswegs constant, sondern hängt wesentlich von der Intensität des Lichtes ab. Alle einfachen Farben nähern sich bei gesteigerter Helligkeit dem Eindruck des Weissen; am auffallendsten das Violett, welches einen um so röthlichern Ton erhält, je lichtschwächer es ist, dagegen grauer aussieht, je heller es wird, und schon in dem im Fernrohr betrachteten Sonnenspectrum weissgrau erscheint. Das Cyanblau des Spectrums wird bei schwacher Stärke indigblau, bei grösserer himmelblau, weissblau und endlich weiss. Das Grün geht durch Gelbgrün in Weiss, das Gelb direkt, aber erst bei blendender Stärke in Weiss über. Auch das Roth sah Helmholtz, als er durch ein rothes Glas nach der Sonne blickte, hellgelb werden.

Die Qualität des Lichtes hat einen bedeutenden Einfluss auf die Stärke der Lichtempfindung. Wir sind aus Gründen, die später in der Wärmelehre betrachtet werden, genöthigt anzunehmen, dass die lebendige Kraft der Aetherbewegung, also die objective Lichtstärke vom rothen Ende des Spectrums zum violetten abnimmt, für unsere Empfindung hat aber entschieden der gelbe Theil des Spectrums die grösste Helligkeit. Die Stärke der Lichtempfindung hängt also nicht nur von der lebendigen Kraft der Aetherschwingungen ab, sondern auch von der Schwingungsdauer [1]). Deshalb hat eine auf subjectiver Schätzung beruhende photometrische Vergleichung von Licht verschiedener Farbe durchaus keinen objectiven Werth.

Wenn man zwei oder mehrere Farben mischt, so nimmt das Auge eine resultirende Farbe wahr, in der es die einzelnen Farben nicht so erkennt, wie das Ohr in einem Accord die einzelnen Töne. Es geht das schon daraus hervor, dass das Sonnenlicht uns weiss erscheint, in dem man gewiss nicht die grosse Mannigfaltigkeit der einzelnen Farben vermuthet. Helmholtz hat diesen Satz überdies durch ausgedehnte Versuche bewiesen [2]), indem er durch das Zusammenbringen verschiedener Spectra die Farben mischte oder durch rasche Rotation verschiedener farbiger Sectoren die Farbeneindrücke erst auf der Netzhaut combinirte. Eine Mischung farbiger Pigmente kann uns, da sie Absorptionsfarben besitzen, das eine Pigment also das von dem andern reflectirte Licht absorbirt, keinen Aufschluss geben über die durch eine Mischung der Farben entstehenden Farben. Da man früher die Mischfarben meist aus farbigen Pigmenten herstellte, so sind die Helmholtz'schen Resultate von den frühern vielfach verschieden. Nach Helmholtz geben unter den Spectralfarben Weiss — Roth und Grünlichblau — Orange und Cyanblau — Gelb und Indig-

1) A. a. O. §. 21.
2) *Helmholtz,* Poggend. Annal. Bd. LXXXVII. Physiol. Optik. §. 20.

blau — Grünlichgelb und Violett. Das Grün des Spectrums hat keine einfache Complementärfarbe, sondern nur eine zusammengesetzte, eine Mischung aus Roth und Violett, die Helmholtz Purpur nennt.

Mischt man andere Farben des Spectrums, so entstehen Mischfarben, die zum Theil den Spectralfarben gleich sind, zum Theil nicht. Folgende Tabelle zeigt die Resultate von Helmholtz in übersichtlicher Form. In der ersten verticalen und horizontalen Columne stehen die einfachen Farben; wo sich die horizontalen und verticalen Reihen schneiden, steht die Farbe, die aus der Mischung der an der Spitze stehenden Farben hervorgeht.

	Violett	Indigblau	Cyanblau	Blaugrün	Grün	Grüngelb	Gelb
Roth	Purpur	dk. Rosa	wss. Rosa	Weiss	wss. Gelb	Goldgelb	Orange
Orange	dk. Rosa	wss. Rosa	Weiss	wss. Gelb	Gelb	Gelb	
Gelb	wss. Rosa	Weiss	wss. Grün	wss. Grün	Grüngelb		
Grüngelb	Weiss	wss. Grün	wss. Grün	Blaugrün			
Grün	wss. Blau	Wasserbl.	Blaugrün				
Blaugrün	Wasserbl.	Wasserbl.					
Cyanblau	Indigblau						

dk. = dunkel.
wss. = weiss.

Die Mischung der zusammengesetzten Farben führt zu keinen neuen Farben mehr, sondern wir erhalten aus ihnen dieselben Farben, welche die gleichen Spectralfarben liefern, nur mehr oder weniger gesättigt, d. h. mehr oder weniger mit Weiss gemischt. Die übrigen noch in der Sprache bezeichneten Farben werden durch Intensitätsunterschiede obiger Farben bewirkt. So ist Grau ein lichtschwaches Weiss, Braun ein lichtschwaches Goldgelb u. s. w.

Die Empfindung des Lichtes verschiedener Qualität als Farbe müssen wir als einen rein physiologischen Act ansehen, wie daraus hervorgeht, dass Licht gleicher Qualität bei verschiedener Intensität uns als verschiedenfarbig und Licht verschiedener Qualität, einfaches und zusammengesetztes uns als gleichfarbig erscheint [1]).

Die Affection der Netzhaut dauert noch fort, auch wenn das sie bewirkende Licht aufgehört hat das Auge zu treffen.

Man überzeugt sich zunächst davon durch den bekannten Versuch, dass eine im Kreise rasch bewegte glühende Kohle uns als feuriger Kreis, dass ein rasch gedrehtes Rad uns als eine halb durchsichtige Scheibe erscheint. Ebenso zeigt sich die Dauer des Lichteindruckes, indem ein rasch gedrehter Farbenkreisel in der Mischfarbe der einzelnen auf ihm enthaltenen farbigen Sectoren erscheint.

Zugleich zeigt sich die Dauer dieser Einwirkung in den beiden Arten von Nachbildern, die wir nach dem Anblick eines hellen Gegenstandes haben. Schliessen wir nach dem Anblicke eines hellen Gegenstandes die Augen, und

---

1) *Helmholtz* a. a. O. §. 20. Darlegung der Theorie von Th. Young. (Lectures on natural Philosophy.)

halten so alles Licht ab, so sehen wir noch sehr kurze Zeit ein sogenanntes positives Nachbild, indem wir die Contouren des vorher erblickten Gegenstandes noch wahrnehmen, und zwar die hellen Theile hell, die dunklen dunkel. Das positive Nachbild besteht nur kurze Zeit, und zeigt in dieser durch sein farbiges Abklingen, dass die Eindrücke der verschiedenen Farben nicht gleiche Dauer haben, das Nachbild erscheint zuerst hell und weiss, dann eine kurze Zeit grün, eine noch kürzere violettblau und schliesslich roth.

Die positiven Nachbilder gehen, besonders wenn man das Auge auf eine hellere Fläche richtet, in negative über, in solche, wo das im ursprünglichen Bilde Helle dunkel erscheint und umgekehrt. Das Auge ist demnach an der gereizten Stelle unempfindlicher, und reagirt an derselben auf neues Licht nicht so stark, wie die nichtgereizte Umgebung. Darauf beruht es auch, dass wenn man im frühern Stadium des positiven Nachbildes das Auge auf eine helle Fläche richtet, ein der Farbe desselben complementär gefärbtes negatives Bild sich zeigt. War das positive roth, so ist das negative grünlichblau.

Ist das Auge durch eine bestimmte Farbe gereizt, so wird es für diese unempfindlich, und erblickt dann eine farblose Fläche complementär gefärbt[1]).

Unter den Gesichtsempfindungen ist schliesslich noch die eigenthümliche Erscheinung zu erwähnen, dass ein farblos weisser Körper in einer farbigen Umgebung in der der Umgebung complementären Farbe erscheint. Am auffallendsten zeigen das die farbigen Schatten. Wenn man im Tageslicht eine weisse Fläche noch durch die gelbrothe Flamme einer Talgkerze beleuchtet, so erhält sie einen gelblichen Farbenton, wirft man dann einen Schatten von der Kerzenflamme, so erscheint der Schatten in der gelbrothen Umgebung, obwohl er vom Tageslicht beleuchtet ist, entschieden blau gefärbt.

Diese Erscheinung sieht Helmholtz als eine rein psychologische an[2]), die auf der Eigenthümlichkeit unseres Urtheils beruht, dass wir direkt wahrnehmbare Unterschiede für grösser halten als solche, welche in der Anschauung nur unsicher hervortreten, oder die wir nach der Erinnerung beurtheilen.

Wenden wir das auf die Contrastfarben an, so unterscheiden sich bei denselben die betrachteten Theile des Gesichtsfeldes dadurch, dass der eine objectiv mit farbigem Lichte beleuchtet ist, dort also eine bestimmte Farbe vorherrscht, in dem andern nicht, dort ist die Farbe der Umgebung vorhanden aber schwächer, zu dieser aber noch die sie zu weiss ergänzende Farbe. Deshalb tritt in der Empfindung die complementäre Farbe deutlicher hervor, besonders da uns jeder Vergleich mit andern Farben fehlt, und wir nur aus der Erinnerung wissen, dass das Papier weiss ist.

---

1) *Plateau*, Poggend. Annal. XXXII. *Fechner*, Poggend. Annal. XLIV u. L. *Helmholtz*, Physiol. Optik. §. 22 u. 23.

2) *Helmholtz* a. a. O. §. 24.

§. 53.

Von den Gesichtswahrnehmungen. Mit dem Ausdrucke der Gesichtswahrnehmungen bezeichnen wir die in Folge der Gesichtsempfindungen in uns entstehenden Vorstellungen der ausser uns vorhandenen Objecte. Zur Bildung derselben bedarf es zwar immer einer psychischen Thätigkeit, dieselbe wird aber veranlasst und unterstützt durch die Beschaffenheit der Netzhautbilder.

Wir sehen zunächst immer nach einer bestimmten Richtung, und zur Bestimmung derselben dient der Satz [1]), dass, wenn eine bestimmte Stelle der Netzhaut gereizt wird, wir die reizende Ursache und zwar, da das der ungeheueren Mehrzahl nach Licht aussendende Objecte sind, als Licht aussendende Objecte in der Richtung zu sehen glauben, von wo aus bei normalen Verhältnissen, d. h. bei ungestörter Lichtausbreitung, ein Lichtreiz die gereizte Stelle unserer Netzhaut treffen würde. Wir verlegen also durch unser Urtheil jenes Object immer in die durch die gereizte Stelle und den Knotenpunkt des Auges gelegte Richtungslinie.

Das ist auch der Grund des so vielfach als einer besondern Erklärung bedürftig angesehenen Aufrechtsehens der um uns befindlichen Gegenstände, die auf der Netzhaut ein umgekehrtes Bild entwerfen. Die Richtungslinien der angesehenen Punkte kreuzen sich sämmtlich im Knotenpunkte des Auges; eine unterhalb der Augenaxe gereizte Stelle der Netzhaut sieht daher auswärts einen oberhalb derselben liegenden leuchtenden Punkt. Man kann sagen, wir sehen aufrecht, weil die Bilder der Netzhaut umgekehrt sind.

An den ausser uns gesehenen Gegenständen unterscheiden wir nun ihre räumliche Ausdehnung und ihre räumliche Lage. Die Ausdehnung in einer zur Augenaxe senkrechten Ebene, die Grösse der Gegenstände nach Höhe und Breite beurtheilen wir nach den entsprechenden Ausdehnungen der Netzhautbilder oder nach dem Winkel, den die nach den äussersten Punkten der gesehenen Objecte gezogenen Richtungslinien mit einander bilden. Diesen Winkel nennt man den Sehwinkel. Der Sehwinkel, der demnach die scheinbare Grösse eines Gegenstandes misst, hängt ab von der wirklichen Grösse des angesehenen Gegenstandes und seiner Entfernung vom Auge, so zwar, dass die scheinbare Grösse gleich ist dem Quotienten aus der Grösse des Gegenstandes und der Entfernung desselben vom Auge. Der Winkel, unter dem wir einen Gegenstand von doppelter Grösse sehen, ist derselbe, wenn sich der Gegenstand in der doppelten Entfernung befindet, als der, unter dem uns ein Gegenstand von der Grösse 1 in der Entfernung 1 erscheint. Die Grösse der Netzhautbilder ist daher in beiden Fällen dieselbe. Dass uns aber dennoch der erste Gegenstand grösser erscheint, dass wir also seine wahre Grösse schätzen, ist ein rein psychischer Akt und beruht nur auf unserem Urtheil, indem wir ent-

1) *Helmholtz*, Physiol. Optik. §. 26.

weder von anders her die wahre Grösse kennen und dann schliessen, dass er sich in der doppelten Entfernung befindet, oder umgekehrt aus der bekannten Entfernung seine Grösse ableiten.

Dass es in der That nur ein psychischer Akt ist, der uns über die wahre Grösse der gesehenen Gegenstände Aufschluss gibt, zeigen die vielfach vorkommenden Täuschungen, wenn man unbekannte Gegenstände in Entfernungen sieht, die sich nicht anderweitig schätzen lassen. So ist es eine bekannte Erfahrung, dass fast alle, welche aus einer Ebene oder einem Hügelland zuerst an ein Hochgebirge kommen, die Höhe desselben unterschätzen.

Wird der Gesichtswinkel, unter welchem ein Gegenstand erscheint, zu klein, so kann er nicht mehr wahrgenommen werden. Die Grösse des Gesichtswinkels, unter welchem ein Gegenstand noch sichtbar ist, lässt sich nicht allgemein bestimmen, er schwankt nach der Helligkeit des Objectes und nach der individuellen Beschaffenheit des Auges. Zwei Punkte werden noch als verschiedene erkannt, wenn sie unter einem Gesichtswinkel von 60″ erscheinen, so dass der Abstand ihrer Bilder auf der Netzhaut circa $0^{mm},005$ beträgt [1]. Ueberhaupt wahrgenommen wird ein mässig beleuchteter Gegenstand, wenn er unter einem Gesichtswinkel von circa 30″ erscheint; ein hell beleuchteter auf dunklem Grunde aber noch bei viel kleinerm Gesichtswinkel.

Die räumliche Nebeneinanderlagerung der Gegenstände in einer zur Gesichtslinie senkrechten Ebene und ihren Abstand beurtheilen wir ebenso durch die entsprechende Nebeneinanderlagerung der Bilder auf der Netzhaut und durch ihre Winkeldistanz. Es gilt von ihr dasselbe, was von der Ausdehnung der Körper nach Höhe und Breite gilt.

Anders jedoch mit der Ausdehnung der Körper und ihrer Entfernung nach der dritten Ausdehnung des Raumes. Auf unserer Netzhaut erhalten wir nur Projectionen aller gesehenen Objecte, und ebenso bilden sich die in verschiedener Entfernung vom Auge befindlichen Objecte alle auf derselben Netzhautfläche ab. Ein räumliches Sehen findet daher strenge genommen nicht statt, es ist das nur Folge einer psychischen Thätigkeit. Wir wissen es, dass die Gegenstände im Raume hinter einander liegen, und wir kennen aus Erfahrung die wahre Grösse der meisten Gegenstände; wir schliessen daher aus ihrer scheinbaren Grösse auf ihre räumliche Entfernung. Ebenso sehen wir selbst bei normalem Auge die Gegenstände um so deutlicher, je näher sie der bequemsten Sehweite liegen, entferntere sehen wir undeutlicher; aus der Undeutlichkeit der feinern Contouren, von deren Dasein wir wissen, schliessen wir ebenfalls auf die weitere Entfernung. Ferner ist es nach der Annahme vieler Physiologen wahrscheinlich, dass wir uns der Accommodation in so weit bewusst werden, dass dieses Bewusstsein zur Schätzung der Entfernung beiträgt.

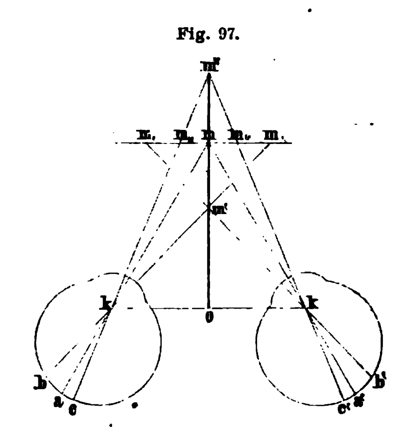
---

1) *Helmholtz* a. a. O. §. 18.

Wirklich räumlich sehen wir eigentlich nur nahe liegende Körper; das, sowie die Schätzung der Entfernung nahe liegender Punkte wird bewirkt durch das Sehen mit zwei Augen.

Die meisten in unserem Gesichtsfelde befindlichen Gegenstände entwerfen nämlich in unseren beiden Augen Bilder; dadurch erhalten wir daher auch zwei Empfindungen, die jedoch nur als eine wahrgenommen werden, wenn wir die Gegenstände fixiren, oder wenn sie in einer bestimmten Stellung vor dem Auge sich befinden; alle übrigen Gegenstände sehen wir wirklich doppelt. Wann wir einen Gegenstand einfach, wann doppelt sehen, hängt davon ab, welche Punkte der beiden Netzhäute von den Bildern getroffen werden; es gibt gewisse Punkte in beiden Augen, die sogenannten zugeordneten oder identischen Netzhautstellen, welche, wenn sie zugleich in beiden Augen getroffen werden, die Ursache ihrer Erregung an derselben Stelle des Raumes suchen[1]). Wenn wir nun einen Gegenstand fixiren, so convergiren die Sehaxen nach diesem Punkte, und die Endpunkte der Sehaxen *a* (Fig. 97) werden zugleich von dem Lichte getroffen, welches von dem fixirten Punkte *m* ausgeht. Da wir den Punkt *m* dann einfach sehen, so folgt, dass die Endpunkte der Augenaxen identische Netzhautstellen sind.

Fig. 97.



Wenn man von drei hinter einander liegenden Punkten, etwa den Spitzen dreier auf ein Brett gesteckten Nadeln die mittlere fixirt, so erscheinen die erste und die weitest entfernte doppelt. Die Doppelbilder der nächsten Nadel *m′* sind verkehrtseitig, das rechte *m*, gehört dem linken Auge und das linke dem rechten Auge, die der entfernteren Nadel *m″* sind rechtseitige, das rechte gehört dem rechten, das linke dem linken Auge. Man überzeugt sich leicht davon, wenn man abwechselnd das eine und andere Auge schliesst, und beachtet, welche Bilder verschwinden[2]).

Wir schliessen daraus, dass auf den beiden innern Seiten wie auch auf den beiden äussern der Netzhaut sich keine Punkte als identische entsprechen. Es gibt indess ausser den Endpunkten der Augenaxen noch identische Netzhautstellen, die man durch Bestimmung des Horopters, d. h. derjenigen Punkte, die man ausser dem fixirten einfach sieht, aufsuchen kann[3]). Es sind im Allgemeinen die Punkte identisch, welche in dem einen Auge auf der

1) *Ludwig,* Lehrbuch der Physiologie. p. 327 ff. *Helmholtz,* Physiol. Optik. p. 697 ff.

2) *Ludwig* a. a. O. p. 328.

3) *Meissner,* Beiträge zur Physiologie des Sehorgans. Leipzig 1854. *Helmholtz* a. a. O. p. 700.

innern, im andern auf der äussern Hälfte symmetrisch zur Augenaxe liegen, welche also z. B. von *a* aus gleich weit nach rechts und oben oder nach rechts und unten liegen u. s. f. Die einfach gesehenen Punkte sind jedoch nur durch feine Versuche aufzufinden. Im Allgemeinen sieht man ausser dem fixirten Punkte, wenn auch ohne dass man sich dessen bewusst ist, alles übrige doppelt, wie man sich durch einige Aufmerksamkeit überzeugen kann. Dass man die Doppelbilder gewöhnlich nicht sieht, liegt wohl daran, dass unsere Seele immer nur auf beschränkte Theile der Netzhaut ihre Aufmerksamkeit wenden kann, und daher nur die intensivern Eindrücke der schärfern einfachen Bilder aufnimmt.

Da wir nun beim Direktsehen mit beiden Augen, um einen Gegenstand einfach und deutlich zu sehen, den Augenaxen durch Wirkung der Augenmuskeln eine ganz bestimmte Stellung geben müssen, so ist es wohl keinem Zweifel unterworfen, dass wir aus der Muskelanstrengung, die jedenfalls für einen Punkt in bestimmter Entfernung eine ganz bestimmte ist, unbewusst die Entfernung schätzen [1]. Das Auge fühlt gewissermassen den Winkel der Augenaxen und wir berechnen aus diesem gefühlten Winkel die Entfernung *om* des Punktes *m* Fig. 97. Es gilt das jedoch, wie erwähnt, nur für kleine Entfernungen, für solche, die mehrere Meter betragen, sind die Augenaxen schon merklich parallel.

Auch die Ausdehnung nach der Tiefe eines nahen Körpers beurtheilen wir zum Theil nach der verschiedenen Convergenz der Sehaxen für die verschieden weit vom Auge entfernten Punkte desselben. Indess wirkt dazu noch ein anderer Umstand bestimmend mit, nämlich der, dass wir von den nahen Gegenständen in den beiden Augen verschiedene Bilder erhalten, die auf identischen Theilen der Netzhaut liegen, und die wir als zusammen gehörig erkennen. Denn betrachten wir z. B. eine gleichseitige vierseitige Pyramide, deren Spitze dem Gesichte zugewandt ist, so sehen wir dieselbe mit dem linken Auge wie in Fig. 98, mit dem rechten aber wie in Fig. 99. Dennoch aber glauben wir nur ein Bild zu sehen, weil wir wissen, dass es derselbe Körper ist, welcher die beiden verschiedenen Bilder erzeugt, und diese Verschiedenheit bestimmt unser Urtheil, den Körper als solchen, ihn nach der Tiefe ausgedehnt zu sehen.

Fig. 98.

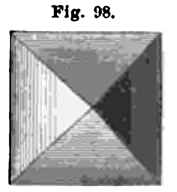
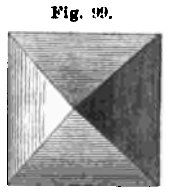


Fig. 99.



Die Richtigkeit dieser Ansicht wird bestätigt durch die von Wheatstone gefundene Thatsache [2], dass wir durch gleichzeitige Anschauung zweier nach Art von Fig. 98 und 99 dargestellten Projectionen vollständig den Eindruck

1) *Brücke,* Müller's Archiv. 1841. *Ludwig,* Lehrbuch der Physiologie. *Helmholtz,* Phys. Optik. p. 599 ff.

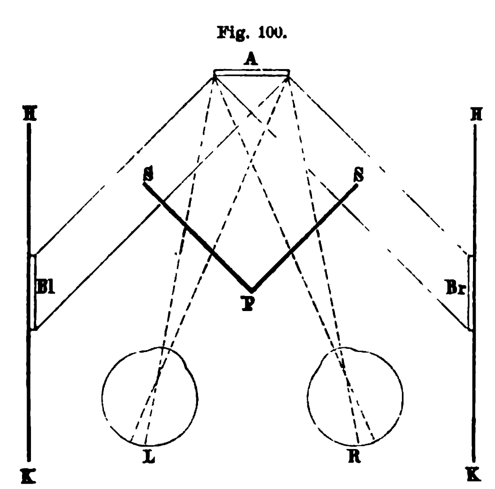
2) *Wheatstone,* Poggend. Annal. Ergänzungsband I.

des Körperlichen, einer vierseitigen Pyramide erhalten, deren Spitze uns zugewandt ist, wenn das Bild des rechten Auges nur vom rechten, das des linken Auges nur vom linken Auge gesehen wird, und die Netzhautbilder derselben auf identische Netzhautpunkte fallen.

Bei einiger Uebung reicht es schon hin, um die Zeichnungen stereoskopisch zu sehen, wenn man vor jedes Auge eine Röhre von einigen Zollen Länge hält, etwa eine Papierrolle, und durch diese nach der für das betreffende Auge gezeichneten Abbildung hinsieht, bequemer aber und auch wenn man nicht darin geübt ist, sieht man diese Erscheinungen mit Hülfe von Stereoskopen.

Die beiden verbreitetsten Apparate der Art sind das Wheatston'sche Spiegelstereoskop [1]) und das von Brewster [2]) construirte dioptrische Stereoskop. Ersteres besteht aus zwei gleichen Spiegeln *SP* (Fig. 100), welche unter einem rechten Winkel so zusammengefügt, dass die äussern Flächen spiegeln, in einem vorn und hinten offenen Kasten befestigt sind. Die Wände *HK* des Kastens sind einander und der Halbirungsebene des Winkels parallel, und um den Abstand der deutlichen Sehweite von den Spiegeln entfernt. Stellt man nun bei *Br* eine für das rechte, bei *Bl* eine für das linke Auge gefertigte Zeichnung eines Körpers auf, so liegen die virtuellen Bilder beider in *A*, und die vor dem Spiegel befindlichen Augen *L* und *R* sehen jedes das für dasselbe gefertigte Bild. Statt der Bilder glaubt man dann den Körper zu sehen, den sie darstellen.

Fig. 100.



In dem Brewster'schen dioptrischen Stereoskop betrachtet man die beiden Zeichnungen durch zwei Röhren, die in dem Abstande der beiden Augen auf einem Kästchen befestigt sind, auf dessen Boden die Zeichnungen hingelegt werden, und dessen eine Wand zur Beleuchtung der Bilder zum Theil geöffnet werden kann.

In den Röhren sind ausserdem die Hälften einer in der Mitte durchgeschnittenen Linse von circa 15 Centimeter Brennweite angebracht, so das

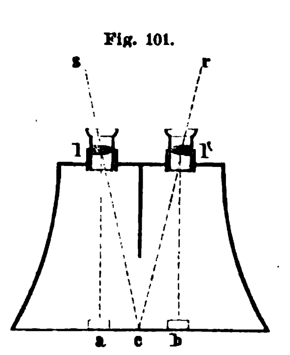
---

1) *Wheatstone* a. a. O.

2) *Brewster*, Report of the British Association cet. 1849. Eine Reihe anderer Stereoskope nebst einer Menge Versuche über diesen Gegenstand finden sich im zweiten Theile von *Dove's* Farbenlehre, optische Untersuchungen. p. 159—200, beschrieben. Berlin 1853. Ferner *Helmholtz*, Physiol. Optik. p. 638 ff. p. 679 ff.

die beiden Schnittflächen nach aussen gerichtet sind. Die Linsen dienen dazu, um die Augen bequem accommodiren zu können, und zugleich, um die Bilder ein wenig nach der Mitte zu verschieben, so dass sie auf identische Netzhautstellen fallen. Denn sind Fig. 101 *l* und *l'* die beiden Linsenhälften, und *a* und *b* die beiden Zeichnungen, so ist klar, dass die von *a* und *b* auf die Linsen fallenden Lichtstrahlen durch die Wirkung der Linsen als Prismen so abgelenkt werden, dass sie nach Punkten convergiren, die zwischen *a* und *b* liegen, und dass leicht bewirkt werden kann, dass sie nach dem Mittelpunkte *c* convergiren. Die von *a* und *b* entworfenen Netzhautbilder fallen dann auf identische Punkte und man sieht die Zeichnungen als Körper.

Fig. 101.



Wir sehen demnach, dass hauptsächlich drei Umstände unser Urtheil über die Grösse und Entfernung der wahrgenommenen Gegenstände bestimmen, die Grösse des Sehwinkels, das Accommodationsgefühl und die Convergenz der Sehaxen; letzterer Umstand jedoch nur für nahe liegende Gegenstände. Bei entfernteren tritt dafür die verschiedene Helligkeit und Deutlichkeit der von verschiedenen Gegenständen entworfenen Bilder hinzu. Zu diesen kommen dann noch eine Anzahl rein psychologischer Umstände, wie Erfahrung etc. hinzu, auf welche natürlich hier nicht eingegangen werden kann.

§. 54.

Das Mikroskop. Damit wir einen Gegenstand sehen können, darf nach dem Vorigen der Winkel, den die durch seine äussersten Punkte gelegten Richtungslinien mit einander bilden, der Sehwinkel, nicht zu klein sein. Der Sehwinkel oder die scheinbare Grösse eines Körpers hängt nun ab von der Grösse des Körpers und von seinem Abstande vom Auge. Durch hinreichende Annäherung an das Auge kann daher der Sehwinkel eines Körpers immer grösser gemacht werden, so dass wir dadurch im Stande sind, den Sehwinkel auch der kleinsten Körper so gross zu machen, dass er oberhalb jener Grenze bleibt, bei welcher das Bild auf der Netzhaut zu klein wird, um wahrgenommen zu werden.

Indess ist der Annäherung eines Körpers an das Auge, um ihn zu sehen, dadurch eine Grenze gesetzt, dass unser Accommodationsvermögen nicht unbeschränkt ist, dass wir die von zu nahen Gegenständen ausgehenden Lichtstrahlen nicht mehr auf der Netzhaut vereinigen können. Um einen Gegenstand scharf und deutlich, ohne zu grosse Anstrengung zu sehen, dürfen wir ihn dem Auge nicht viel weiter als bis zur deutlichen Sehweite nähern. Dadurch ist die Grösse der Gegenstände, welche wir mit freiem Auge sehen können, begrenzt. Wir müssen uns daher optischer Hülfsmittel bedienen,

um Gegenstände, welche wegen zu geringer Grösse mit freiem Auge nicht sichtbar sind, zu sehen.

Der einfachste Apparat der Art ist die Lupe oder das einfache Mikroskop. Dasselbe besteht aus einer Sammellinse, oder einer Combination von Sammellinsen, welche zusammen als eine wirken. Damit eine solche als Mikroskop diene, hält man dieselbe so über den zu betrachtenden Gegenstand, dass die Linse um weniger als ihre Brennweite von demselben entfernt ist. Nach §. 35 erzeugt dann die Linse von diesem Gegenstande ein aufrecht stehendes virtuelles Bild, welches in einer Entfernung f von der Linse sich befindet, welche durch die Gleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{a}$$

gegeben ist, und welche grösser ist als der Abstand a des Gegenstandes von der Linse. Nennen wir die Grösse des Gegenstandes Y, die des Bilds y, so ist ebenfalls nach §. 35

$$y = -\frac{f}{a} \cdot Y.$$

Man hält die Linse dicht vor das Auge und wählt dann den Abstand a so, dass der Abstand f des Bildes gleich der deutlichen Sehweite wird.

Die Vergrösserung einer Lupe ist das Verhältniss der scheinbaren Grössen des von der Lupe in der deutlichen Sehweite erzeugten virtuellen Bildes und des ebenfalls in den Abstand des deutlichen Sehens versetzten Gegenstandes. Da nun aber nach dem vorigen Paragraphen die Grösse, in der ein Körper uns erscheint, seiner wirklichen Ausdehnung proportional, seinem Abstande vom Auge dagegen umgekehrt proportional ist, so folgt, dass die scheinbare Grösse zweier im gleichen Abstande vom Auge befindlicher Körper sich einfach wie ihre wahre Grösse verhält; die Vergrösserung der Lupe wird also einfach gemessen durch

$$\frac{y}{Y} = -\frac{f}{a} \quad \ldots \quad (\alpha).$$

Soll nun f gleich der deutlichen Sehweite $= -d$ werden, so muss der Abstand a des Gegenstandes von der Linse so gewählt sein, dass

$$-\frac{1}{d} = \frac{1}{F} - \frac{1}{a},$$

$$a = \frac{d \,.\, F}{d + F}$$

und setzen wir diesen Werth und zugleich $f = -d$ in (α), so wird

$$\frac{y}{Y} = \frac{d + F}{F}.$$

Ist z. B. die deutliche Sehweite gleich 24 Centimeter und die Brennweite der Linse gleich drei Centimeter, so würde eine solche neunfache Vergrösserung liefern und die Linse würde in einem Abstande von 2,7 Centimeter vor dem zu betrachtenden Gegenstande zu halten sein.

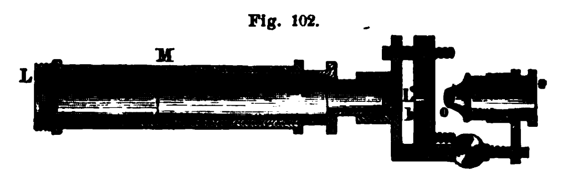
Der Ausdruck für die Vergrösserung, die eine Lupe gibt, zeigt, dass dieselbe zunimmt, wenn die Brennweite kleiner wird, und da diese kleiner wird, wenn die Krümmung der Linsenfläche grösser wird, dass die Vergrösserung mit der Krümmung der Linsen zunimmt. Dadurch ist die Anwendung der Lupen beschränkt, bei grossem Gesichtsfelde auf kleine Vergrösserungen, und bei starken Vergrösserungen auf ein kleines Gesichtsfeld. Denn je stärker die Krümmung der Linsenflächen ist, um so grösser ist auch die Abweichung der Randstrahlen, wodurch die von den Linsen erzeugten Bilder undeutlich werden. Man kann daher nur bei schwach gekrümmten Linsen denselben einen grossen Durchmesser geben und damit ein grosses Gesichtsfeld erhalten, während man bei starker Krümmung durch Verkleinerung des Linsendurchmessers und somit des Gesichtsfeldes die Randstrahlen abhalten muss.

Zuweilen wendet man, um mittels eines einfachen Mikroskopes stärkere Vergrösserungen bei grösserem Gesichtsfelde zu erhalten, sogenannte Duplets oder Triplets an, Lupen, welche aus Linsen bestehen, welche in der §. 37 betrachteten Weise zusammengesetzt sind; dadurch, dass mehrere Linsen von grosser Brennweite unmittelbar zusammengelegt sind, erhalten wir die Wirkung einer Linse von kleiner Brennweite.

Bequemer jedoch wendet man in dem Falle ein sogenanntes zusammengesetztes Mikroskop an. Dieselben zerfallen in zwei Klassen, solche, welche zu objectiver Darstellung reelle vergrösserte Bilder liefern, und solche, welche virtuelle nur dem in sie hineinschauenden Beobachter sichtbare Bilder liefern.

In dem objectiven Mikroskop wirft eine Linse von kurzer Brennweite die vergrösserten reellen Bilder auf einen Schirm. Die durch einen Heliostaten horizontal in ein sonst dunkles Zimmer geleiteten Sonnenstrahlen fallen auf die, an dem Ende des horizontal vor den Heliostaten in den Fensterladen eingeschraubten Rohres *M* (Fig. 102) eingesetzte Linse von grosser Brenn-

Fig. 102.



weite *L*. Die dadurch bereits convergirenden Sonnenstrahlen treffen dann auf eine zweite am andern Ende des Rohres *M* befestigte Linse von kleiner Brennweite *L'*, werden in dem Brennpunkte bei *b* vereinigt und treffen dort auf den zwischen zwei feinen Glasplatten befestigten Gegenstand. Von dem dadurch sehr stark beleuchteten Gegenstande aus gehen dann die Strahlen durch die in dem bei *e* offenen Rohr befestigte Linse *o*, welche eine nicht sehr grosse Brennweite hat, und die um etwas mehr als ihre Brennweite von *b* entfernt ist. Diese Linse entwirft daher auf einem entfernten Schirme

ein vergrössertes umgekehrtes Bild des bei *b* vorhandenen Gegenstandes. Die Linse *o* kann dem Gegenstande etwas mehr oder weniger genähert werden, damit auf verschieden entfernten Schirmen deutliche Bilder erzeugt werden können.

Die Vergrösserungen, welche man mit einem solchen Mikroskop erzeugen kann, sind sehr bedeutend. Nehmen wir z. B. an, die Brennweite der Linse *o* sei gleich 1,5 Centimeter, ihr Abstand von *b* sei 1,507 Centimeter, so wird in einem Abstande von drei Metern von *o* das reelle umgekehrte Bild entstehen, und zwar werden in demselben alle linearen Dimensionen fast 200mal grösser sein als in dem abgebildeten Gegenstande. Ist daher die Grösse des Gegenstandes ein Quadratmillimeter, so beträgt die Grösse des Bildes 40,000 Quadratmillimeter.

Die zusammengesetzten Mikroskope der zweiten Art, die gewöhnlich einfach Mikroskope genannt werden, sind eigentlich eine Zusammensetzung des objectiven Mikroskopes und der Lupe. Sie bestehen aus einer dem zu betrachtenden Objecte nahe gebrachten Sammellinse *o* (Fig. 104), die von demselben ein vergrössertes reelles Bild entwirft, und aus einer Lupe *p*, durch welche man dieses vergrösserte reelle Bild betrachtet. Erstere Linse wird das Objectiv, letztere das Ocular genannt. Beide sind zusammen in eine Röhre *R* (Fig. 103) gefasst, das Objectiv unten bei *o*, das Ocular oben bei *p*. Die Röhre ist an einer prismatischen Stange befestigt, welche in der passend hohlen Säule *P* mittels der Schraube *Q* auf und nieder gelassen werden kann. Unterhalb der Röhre bei *T* ist an der Säule eine durchbohrte Metallplatte, als Objectträger angebracht, auf welche das zu betrachtende Object zwischen zwei Glasplättchen eingeschlossen gelegt wird. Die Oeffnung in dem Objectträger ist in der Verlängerung der Mikroskopaxe, so dass das betreffende Object gerade über derselben zu liegen kommt. Unterhalb derselben ist ein kleiner Hohlspiegel angebracht, der so gegen ein Fenster gestellt ist, dass er zerstreutes Tageslicht nach dem auf der Oeffnung liegenden Objecte reflectirt. Häufig ist noch unterhalb *T* eine zweite drehbare mit Oeffnungen verschiedener Grösse versehene Metallplatte *d* angebracht, die dazu dient, von dem Spiegel *S* mehr oder weniger Licht zum Object zu lassen.

Als Objectivlinsen werden Linsen von sehr kleiner Brennweite, höchstens fünf Millimeter angewandt, um einmal eine starke Vergrösserung zu erzielen, ohne das Rohr des Mikroskopes zu lang machen zu müssen, und zugleich um eben dadurch ein grosses Gesichtsfeld zu erhalten. Denn wenn auch das durch das Objectiv erzeugte reelle Bild sich in Bezug auf die Erzeugung neuer Bilder gerade so verhält, als befände sich an seiner Stelle ein wirklicher Gegenstand, so unterscheidet es sich von letzterm dadurch, dass es nicht nach allen Seiten Licht aussendet, sondern dass von dem reellen Bilde aus nur solche Strahlen das Ocular treffen, welche rückwärts verlängert durch das Objectiv gehen. Die gesammten das Ocular treffenden Strahlen sind daher von einem Kegel umschlossen, dessen Basis das Ocular und dessen

Spitze die Mitte des Objectivs ist, wie eine Betrachtung der Fig. 104 sofort erkennen lässt. Je weiter nun das Ocular *p* von *o* entfernt ist, um so spitzer wird der Kegel, um so kleiner daher auch das Gesichtsfeld *ab*, welches gleich der Basis des über *o* hinaus verlängerten Kegels an der Stelle des Objectes ist.

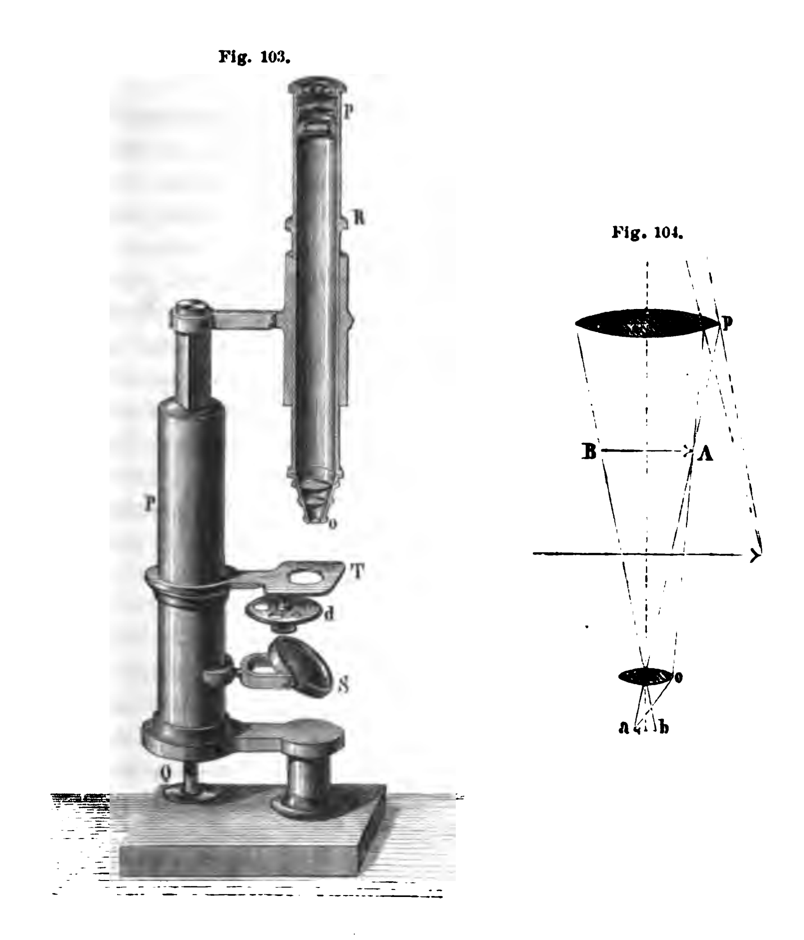


Fig. 103.

Fig. 104.

Andererseits ist, wie ebenfalls Fig. 104 zeigt, die Grösse des Gesichtsfeldes der Grösse des Oculares proportional, das Ocular ist daher von grösserm Durchmesser, und um die Abweichung der Randstrahlen zu vermeiden, von grösserer Brennweite.

In der Anordnung der Objective und Oculare findet sich in den Mikroskopen aus verschiedenen Fabriken manche Verschiedenheit. Statt der einfachen Objectivlinsen werden achromatische Combinationen angewandt und ausserdem mehrfach anstatt eines achromatischen Linsenpaares mehrere, um durch deren Zusammenwirken eine kleine Brennweite ohne sphärische Abweichung zu erhalten. Gleiches gilt vom Ocular, welches ebenfalls aus meh-

reren Linsen zusammengesetzt wird. Die Wirkung derselben wird man sich nach dem Angegebenen in besondern Fällen leicht erklären können [1]).

Um die Deutlichkeit der Bilder zu erhöhen, ist ausserdem durch Anbringen passender Blendungen in den Mikroskopröhren an der Stelle, wo die reellen Bilder sich befinden, dafür Sorge getragen, dass ausser den vom reellen Bilde ausgesandten Lichtstrahlen kein Licht durch das Ocular ins Auge gelangt.

Die neuern vollkommnern Mikroskope sind so eingerichtet, dass man mit denselben verschiedene Vergrösserungen herstellen kann. Bei denjenigen, bei welchen Ocular und Objectiv in fester Entfernung von einander sind, geschieht das mittels verschiedener Objective und Oculare, bei andern dadurch, dass man das Objectiv dem Objecte mehr oder weniger nähern und dem entsprechend die Entfernung des Oculars vom Objectiv regeln kann. In allen Fällen wird aber das Ocular so gestellt, dass das reelle Bild, welches das Objectiv entwirft, sich in gleichem Abstande vom Ocular befindet. Um daher bestimmte Stellen des Bildes mit dem Auge fixiren zu können, ist in manchen Mikroskopen an dieser Stelle ein sogenanntes Fadenkreuz ausgespannt, zwei sehr feine Fäden, die sich unter einem rechten Winkel an der Axe des Mikroskopes kreuzen. Bei andern sind, um sie als Messapparat zu benutzen zu können, an derselben Stelle planparallele Glasplatten angebracht, auf denen in bestimmten sehr kleinen Abständen eine Menge paralleler, sehr feiner Linien eingeschnitten ist, sogenannte Glasmikrometer.

§. 55.

Das Fernrohr. Die scheinbare Grösse eines Gegenstandes nimmt nicht nur ab mit dessen wahrer Grösse, sondern auch in demselben Verhältniss als die Entfernung desselben vom Auge zunimmt. Wie es nun der Zweck der Mikroskope ist, von Gegenständen, deren wahre Grösse zu gering ist, als dass sie in deutlicher Sehweite wahrgenommen werden können, dort ein vergrössertes Bild zu erzeugen, so ist es die Aufgabe der Fernrohre, von Gegenständen, deren scheinbare Grösse wegen eines zu grossen Abstandes derselben vom Auge zu klein ist, um noch deutlich wahrgenommen zu werden, in der Weite des deutlichen Sehens ein Bild zu entwerfen, und dieses zugleich so zu vergrössern, dass es deutlich wahrgenommen werden kann.

Jedes Fernrohr besteht daher aus zwei wesentlichen Theilen, dem Objectiv, welches von dem entfernten Gegenstande in der Nähe des Auges ein Bild entwirft, und dem Ocular, welches dieses Bild in die Entfernung des deutlichen Sehens bringt und zugleich vergrössert.

---

1) Genaueres über das Mikroskop siehe *H. von Mohl*, Mikrographie. Tübingen 1846. *Harting*, Theorie, Gebrauch und Geschichte des Mikroskops, aus dem Holländischen übersetzt von *Theile*. Braunschweig 1859. *Nägeli* und *Schwendner*, Das Mikroskop. Leipzig 1867.

Die verschiedenen Arten der Fernrohre unterscheiden sich nach der Einrichtung des Objectivs in dioptrische und katoptrische; erstere erzeugen das reelle Bild durch eine Sammellinse, letztere durch einen Hohlspiegel; nach der Einrichtung des Oculars in astronomische und terrestrische; erstere liefern umgekehrte, letztere aufrechtstehende Bilder des Gegenstandes, auf welchen das Fernrohr gerichtet ist.

Das dioptrische Objectiv besteht aus einer achromatischen Sammellinse von ziemlich grosser Brennweite und grossem Durchmesser. Denn die Lichtstärke des Bildes und somit auch zum Theil seine Deutlichkeit ist um so grösser, je mehr Licht von den einzelnen Punkten des Objects das Objectiv trifft. Deshalb wählt man dasselbe möglichst gross, und um dann keine Undeutlichkeit in Folge der Abweichung der Randstrahlen zu erhalten, wählt man eine grosse Brennweite, die bei diesen Apparaten, wo das Bild immer in einem der Hauptbrennweite nahen Abstande erzeugt wird, von keiner Unbequemlichkeit begleitet ist.

Bei den astronomischen Fernrohren wird dann das von dem Objectiv erzeugte Bild durch ein einfaches Mikroskop, als Ocular, betrachtet. Das Ocular besteht demnach aus einer Sammellinse oder einer Combination von Sammellinsen, die als eine Sammellinse von grösserer Brennweite wirken. Da das Ocular als Lupe wirken soll, so befindet es sich in einem solchen Abstande vom Objectiv, dass das Bild von dem Ocular etwas weniger, als die Brennweite des Oculars beträgt, entfernt ist; da nun das Bild von dem Objectiv nahezu um die Brennweite des Objectivs entfernt ist, so ist der Abstand von Ocular und Objectiv nahezu gleich der Summe der Brennweiten von Objectiv und Ocular.

Das Ocular soll das Bild stets in die Weite des deutlichen Sehens versetzen. Damit deshalb das Fernrohr für verschiedene Augen brauchbar ist, und mittels desselben verschieden entfernte Gegenstände gesehen werden können, ist es gegen das Objectiv verstellbar, es kann ihm genähert oder von ihm entfernt werden. Je näher die zu betrachtenden Gegenstände sind, um so weiter ist auch das Bild von dem Objectiv entfernt, um so weiter muss daher das Ocular von dem Objectiv entfernt werden.

Um die durch ein solches Fernrohr erhaltene Vergrösserung zu bestimmen, müssen wir das Verhältniss der scheinbaren Grösse des Gegenstandes und des durch das Ocular in die deutliche Sehweite versetzten Bildes aufsuchen.

Wegen der grossen Entfernung des Gegenstandes vom Auge dürfen wir annehmen, dass der Gesichtswinkel des Gegenstandes vom Auge aus gerechnet gleich ist dem, unter welchem der Gegenstand von der Mitte des Objectives aus erscheint. Da nun nach dem Frühern zwischen der Grösse des reellen Bildes y und des Gegenstandes Y die Beziehung besteht

$$y = -\frac{f}{a} \cdot Y,$$

so folgt, dass der Gesichtswinkel, unter dem das reelle Bild vom Objectiv aus erscheint, gleich ist dem des Gegenstandes; oder vom Objectiv aus gesehen ist die scheinbare Grösse des Gegenstandes

$$g = \frac{Y}{a} = -\frac{y}{f}$$

gleich der des reellen Bildes. Dies reelle Bild befindet sich nun in einem Abstande f' vor dem Ocular, von der Mitte des Oculars aus gesehen ist demnach die scheinbare Grösse des Bildes

$$g' = \frac{y}{f'}$$

und dies ist auch von der Mitte des Oculares aus gesehen die scheinbare Grösse des von dem Oculare erzeugten vergrösserten Bildes, da auch hierfür die Relation besteht

$$\frac{y'}{d} = \frac{y}{f'},$$

wenn y' die Grösse des virtuellen Bildes und $-d$ sein Abstand vom Ocular ist.

Vernachlässigen wir nun den Abstand des Auges vom Ocular, so sind g und g' die scheinbaren Grössen des Gegenstandes und des Bildes und wir erhalten

$$\frac{g'}{g} = -\frac{f}{f'}.$$

Der Abstand f ist nun immer nahezu gleich der Brennweite des Objectivs, f' der des Oculares, so dass wir ohne bedeutenden Fehler setzen können

$$\frac{g'}{g} = -\frac{F}{F'}.$$

Die durch das Fernrohr erzeugte Vergrösserung ist also direkt proportional der Brennweite des Objectivs und umgekehrt derjenigen des Oculars. Das Bild ist, wie das Vorzeichen — beweist, ein umgekehrtes.

Die Grösse des Gesichtsfeldes ist gerade wie beim Mikroskop durch den Kegel bestimmt, dessen Spitze die Mitte des Objectivs, dessen Basis das Ocular ist.

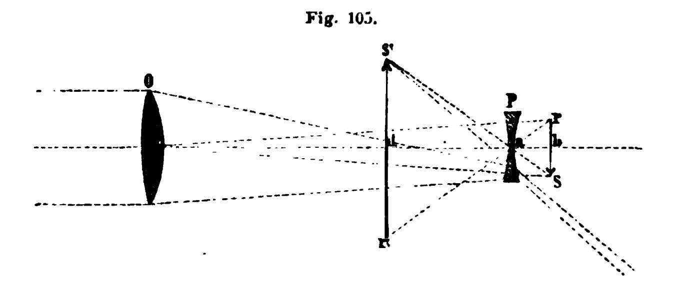
Um das Fernrohr als Messinstrument zu benutzen, wird in demselben ein Fadenkreuz angebracht, in gleicher Weise, wie wir es beim Mikroskop erwähnten, also in dem Abstande vom Ocular, dass es an derselben Stelle sich befindet, wo das reelle Bild entsteht. Da das Fadenkreuz immer in demselben Abstande vom Ocular sich befinden muss, so ist es mit demselben verschiebbar.

Bei dem astronomischen Fernrohr ist das Bild umgekehrt; da dieses zu manchen Zwecken unbequem ist, hat man in dem terrestrischen oder Erdfernrohr mit dem Objectiv ein zusammengesetztes Ocular verbunden, welches als schwaches Mikroskop wirkt. Eine passende Linsencombination entwirft

von dem reellen Bilde ein neues Bild, und dieses wird durch die Ocularlinse betrachtet.

Einfacher wird dieser Zweck bei dem Galilei'schen Fernrohre dadurch erreicht, dass als Ocular eine Concavlinse verwandt ist. Ist O Fig. 105 das

Fig. 105.



Objectiv eines solchen Fernrohres, welches bei rs ein reelles Bild des entfernten Gegenstandes entwerfen würde, so ist bei diesen Fernrohren bei P ein Concavglas angebracht, in welchem die Strahlen gebrochen werden, ehe sie sich im reellen Bilde vereinigt haben. Der Abstand ab des Concavglases von dem Orte des Bildes rs ist etwas grösser als die Zerstreuungsweite des Glases; die nach den verschiedenen Punkten von rs convergirenden Strahlen werden daher durch das Glas P so abgelenkt, dass bei $r's'$ ein virtuelles Bild entsteht, in einem Abstande f, so dass (§. 35)

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{F'} + \frac{1}{a}.$$

Man nimmt nun ein Ocular von kleiner Zerstreuungsweite, so dass, wenn $ab = -a$ nur wenig von F' verschieden ist, f gleich der deutlichen Sehweite wird, und bekommt dann ein aufrecht stehendes vergrössertes Bild des Gegenstandes.

Die erhaltene Vergrösserung wird gerade wie beim astronomischen Fernrohr bestimmt. Die scheinbare Grösse des Gegenstandes ist auch hier wieder

$$g = \frac{rs}{cb}$$

gleich der scheinbaren Grösse des Bildes von der Mitte des Objectives an gerechnet. Die scheinbare Grösse des Bildes ist aber, wenn wir annehmen, das Auge befinde sich unmittelbar am Ocular,

$$g' = \frac{r's'}{ad} = \frac{rs}{ab}.$$

Demnach ist die Vergrösserung

$$\frac{g'}{g} = \frac{cb}{ab} = \frac{F}{F'},$$

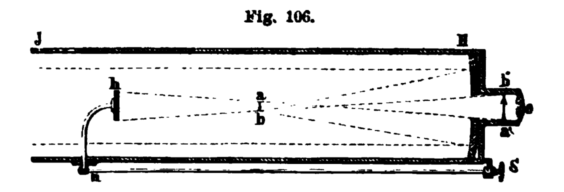
wenn F die Brennweite des Objectives, F' diejenige des Oculars bedeutet, da die Abstände cb und ab sich wenig von den beiden Brennweiten unterscheiden.

Da bei dem Galilei'schen Fernrohr die Strahlen von dem Oculare aus sofort divergiren, so ist das Gesichtsfeld immer nur sehr klein, es wird bei der Annahme, dass das Auge unmittelbar am Oculare ist, durch die Oeffnung eines Kegels gemessen, dessen Spitze die Mitte des Objectives und dessen Basis die Pupille des Auges ist. Man kann daher, wenn das Gesichtsfeld einigermassen gross sein soll, immer nur kleine Vergrösserungen damit erzielen. Daher werden diese Fernrohre auch fast nur zu Zwecken benutzt, wo kleine Vergrösserungen ausreichen, wie zu Theaterperspectiven etc.

Von den dioptrischen Fernrohren unterscheiden sich die katoptrischen dadurch, dass als Objectiv anstatt der Sammellinse ein Hohlspiegel verwandt wird, dessen reelles Bild dann durch ein Mikroskop betrachtet wird. Sie wurden construirt, so lange man noch nicht im Stande war, grosse, reine und achromatische Objective zu construiren. Jetzt sind die Spiegelteleskope auch auf den Sternwarten meist durch die Refractoren verdrängt.

Die Einrichtung dieser Apparate ergibt sich aus beistehendem Schema des Gregory'schen Teleskopes. Das Rohr ist mit seinem Ende J gegen den zu betrachtenden Gegenstand gerichtet. Die in dasselbe eintretenden Strahlen

Fig. 106.



treffen den Hohlspiegel H, der bei ab ein kleines reelles Bild entwirft. Der Hohlspiegel ist in der Mitte, dort, wo das Ocularrohr eingesetzt ist, durchbohrt. Dem Oculare o gegenüber ist ein zweiter kleiner Hohlspiegel h angebracht, der von dem reellen Bilde ab ein zweites reelles Bild $a'b'$ nahe vor das Ocular wirft. Dieses Bild wird dann durch das Ocular betrachtet. Die Stange s dient dazu, das Spiegelchen h etwas zu verstellen, damit das von verschieden entfernten Gegenständen entworfene Bild immer in gleichem Abstande von h sich befindet, und so das zu betrachtende immer dieselbe Stelle vor dem Oculare einnimmt.

In dem Newton'schen Spiegelteleskope ist das Ocular seitlich bei n angebracht, der Spiegel h ist ein Planspiegel, der gegen die Axe geneigt ist und das zuerst von dem Spiegel H entworfene Bild vor das Ocular bringt. Er befindet sich deshalb zwischen H und ab und zwar um die Distanz hn von dem reellen Bilde entfernt.

Von andern optischen Apparaten ist die in neuester Zeit durch Entdeckung der Photographie so wichtig gewordene Camera obscura zu erwähnen. Man kann sie als ein Fernrohr ohne Ocular betrachten. In der Vorderwand eines rings verschlossenen Kastens (Fig. 107) ist ein Rohr eingesetzt, und

diesem ein zweites Rohr verschiebbar. In dem zweiten Rohre *R* ist eine achromatische Sammellinse angebracht, welche auf der Hinterwand *H* ein reelles Bild der Gegenstände entwirft, die in einem passenden Abstande vor der Linse sich befinden. Bei Apparaten, die zu photographischen Zwecken dienen, ist die Hinterwand *H* eine matte Glastafel, welche fortgenommen werden und durch die in eine Cassette eingeschlossene empfindliche Platte ersetzt werden kann. Die nach dem Innern des Kastens gerichtete Wand der Cassette besteht aus einem Schieber; wird derselbe gehoben, so fällt das Bild auf die Platte.

Fig. 107.

Je nach dem Zwecke, wozu die Camera sonst dienen soll, sind an derselben zuweilen noch Spiegel und andere Vorrichtungen angebracht, die den Zweck haben, das von der Linse erzeugte Bild an einer bestimmten Stelle zu entwerfen. Dieselben bedürfen keiner besondern Erklärung[1]).

1) Ueber die Fernrohre und sonstige optische Instrumente sehe man die ausführlichern Werke über Dioptrik, z. B.: *Littrow,* Dioptrik oder Anleitung zur Verfertigung der Fernrohre. Wien 1830. *Prechtl,* praktische Dioptrik. Wien 1828.

Zweiter Abschnitt.

Theoretische Optik.

Erstes Kapitel.

Interferenz und Beugung des Lichtes.

§. 56.

Fresnel's Spiegelversuch. Von den beiden Hypothesen, nach denen sich die Erscheinungen der ungestörten Ausbreitung des Lichtes als im Wesen desselben begründet zu erkennen geben, wurde die Newton'sche Emissionshypothese durch den Foucault'schen Versuch über die Geschwindigkeit des Lichtes im Wasser als unhaltbar erkannt. Da dieser Versuch die Folgerungen der zweiten Hypothese, nach welcher das Licht eine Wellenbewegung des Aethers ist, vollkommen bestätigte, so hielten wir uns berechtigt, dieselbe als wahrscheinlich anzunehmen. Wir benutzten sie demgemäss zur Erklärung der Erscheinungen, die sich bei der Wechselwirkung des Lichtes und der Körper, auf welche dasselbe bei der gestörten Ausbreitung trifft, zeigen, sowie der Erscheinungen der Emission, und sahen, dass in diesen nichts lag, was der Undulationstheorie widersprach, vielmehr, dass alle die dahin gehörigen Erscheinungen mit Hülfe dieser Theorie verstanden werden konnten.

Nach derselben ist das Licht eine schwingende Bewegung, die sich in dem überall vorhandenen Aether von den leuchtenden Punkten aus nach allen Richtungen verbreitet. Die Grenze, bis zu welcher sich die Bewegung in einem bestimmten Augenblicke bei der ungestörten Fortpflanzung ausgebreitet hat, ist eine Kugel, da wir annehmen, dass der freie Aether isotrop, das heisst überall gleich dicht und nach allen Richtungen gleich elastisch ist. Die Radien dieser Kugelwellen sind die Lichtstrahlen, sie sind die Punktreihen, welche die im dritten Abschnitte des ersten Theiles ausführlicher betrachtete Bewegung vollführen, und denen wir bei Betrachtung der Wellenbewegung in einem Punktsystem den Namen Wellenstrahlen beilegten. Die Bewegung kann entweder eine longitudinale oder eine transversale sein, combinirt aus beiden kann sie nicht sein, da die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der beiden

Bewegungen nach den damals abgeleiteten Gesetzen sehr verschieden sind, so dass die longitudinale der transversalen Bewegung weit voreilen muss. In einem nur sehr kleinen Abstande von der Lichtquelle müssen deshalb beide Bewegungen vollständig getrennt sein. Von diesen beiden möglichen Bewegungen bestimmten uns dann die Erscheinungen der Dispersion, die transversalen Schwingungen als die Ursache des Lichtes zu betrachten. Bei diesen sind nun im isotropen Aether alle in einer zur Fortpflanzungsrichtung des Lichtes senkrechten Ebene, der Wellenebene, wie wir sie schon mehrfach nannten, liegenden Richtungen gleich berechtigt. Wir werden daher unter Voraussetzung transversaler Schwingungen annehmen müssen, dass die Schwingungen nach allen in der Wellenebene vorhandenen Richtungen vor sich gehen, das heisst ein bestimmtes vom Lichte getroffenes Aethertheilchen, oder die in einer Ebene liegenden Theilchen, durch welche die Lichtwellen hindurchgehen, müssen in einer unmessbar kleinen Zeit nach und nach sich in allen in dieser Ebene liegenden Richtungen bewegen.

Wenn nun auch diese Theorie durch die bisher betrachteten Erscheinungen für uns einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit gewonnen hat, so müssen wir uns doch noch nach direkten Beweisen für dieselbe umsehen, ganz besonders um definitiv zu entscheiden, ob in der That die durch die Dispersionstheorie veranlasste Annahme der transversalen Schwingungen, durch welche wir, wie damals schon erwähnt wurde, dem Aether gewissermassen die Eigenschaften eines festen Körpers beilegen, zulässig ist.

Der Weg, den wir zu diesem Ziele verfolgen müssen, liegt unmittelbar vor; wir haben an der Hand der im dritten Abschnitte des ersten Theiles abgeleiteten Sätze über die Wellenbewegung die Consequenzen dieser Theorie zu ziehen und diese dann durch den Versuch zu bestätigen.

Das Wesen der Wellenbewegung besteht in der Periodicität; ein schwingendes Theilchen bewegt sich eine Zeit lang nach der einen Richtung und darauf ebenso lange und mit eben solcher Geschwindigkeit nach der entgegengesetzten. Von dem erregenden Mittelpunkte pflanzt sich dann die Bewegung nach allen Richtungen fort, und der entstehende Wellenstrahl zeigt in einer Wellenlänge alle Phasen der Bewegung neben einander, die ein schwingendes Theilchen während einer Oscillationsdauer nach einander durchläuft. Die Wellenlänge zerfällt daher in zwei congruente Theile, in deren erstem die Bewegung in dem einen, in deren anderem sie in dem entgegengesetzten Sinne vor sich geht, in deren jedem die Geschwindigkeit von einem Minimum bis zu einem Maximum wächst und dann wieder zu einem Minimum abnimmt, um in der folgenden Wellenhälfte den entgegengesetzten Sinn anzunehmen.

In einem Mittel können sich nun mehrere Wellenbewegungen gleichzeitig fortpflanzen und demselben Theilchen Impulse ertheilen. Nach dem Princip der Coexistenz kleiner Bewegungen ist dann die Geschwindigkeit des Theilchens die algebraische Summe der Geschwindigkeiten, welche ihm jede einzelne der Theilbewegungen geben würde. Die resultirende Geschwindigkeit

oder die resultirende Amplitude der Schwingung muss daher von der Phase der Bewegung abhängig sein, in der die einzelnen Wellensysteme zusammentreffen.

Es kann auf den ersten Blick zweifelhaft scheinen, ob dieser Satz bei den Lichtbewegungen zur Anwendung kommen kann, wenn, wie wir voraussetzen, die Bewegung eine transversale ist, denn wenn die interferirenden Schwingungen nicht in derselben Richtung geschehen, so hängt von der Phasendifferenz nach §. 123 des ersten Theiles weniger die Amplitude als die Form der resultirenden Schwingung ab. Indess die in einem bestimmten Zeitmoment von einer und derselben Lichtquelle ausgehenden Schwingungen werden eine ganz bestimmte Richtung besitzen und auch wenn sie sich ausbreiten stets gleichgerichtete Schwingungen erzeugen. Wenn wir deshalb die in einem bestimmten Momente von einer Lichtquelle ausgehende Bewegung theilen, und nachdem sie verschiedene Wege durchlaufen, wieder zusammentreffen lassen, so können wir auf eine solche Lichtbewegung direkt die früher für Punktreihen, in denen die Schwingungen gleichgerichtet sind, abgeleiteten Interferenzgesetze anwenden.

Wir sahen früher, dass die schwingende Bewegung einer Punktreihe sich darstellen lässt durch die Gleichung

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

wenn y den Abstand eines um die Entfernung x von dem Mittelpunkt entfernten Theilchens von der Gleichgewichtslage zur Zeit t bedeutet, und a die Amplitude, T die Schwingungsdauer, λ die Wellenlänge der Bewegung darstellt. Ist nun die Entfernung eben dieses Theilchens von einem andern erregenden Mittelpunkte, der auch zur Zeit $t = 0$ seine Bewegung beginnt, $x + \delta$, so wird der Abstand y' dieses Theilchens von der Gleichgewichtslage zur Zeit t in Folge des von dieser Bewegung herrührenden Impulses sein

$$y' = a' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + \delta}{\lambda}\right),$$

wenn a' die Amplitude dieser Bewegung bedeutet.

Erhält das Theilchen von beiden Bewegungen Impulse nach gleicher Richtung, so ist der resultirende Abstand

$$Y = y + y'$$

und derselbe lässt sich darstellen, da die resultirende Bewegung mit den componirenden von gleicher Periode sein muss, durch

$$Y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + D}{\lambda}\right),$$

worin

$$A^2 = a^2 + a'^2 + 2a \,.\, a' \,.\, \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$$

und

$$\sin 2\pi \frac{D}{\lambda} = \frac{a'}{A} \cdot \sin 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$$

ist, wie man leicht erhält, wenn man die Summe $y + y'$ bildet und auf die für Y angegebene Form bringt [1]). Aus dem Ausdrucke für A folgt, dass die Amplitude der resultirenden Bewegung abhängt von der Grösse δ, die uns die Phasendifferenz gibt, mit welcher die componirenden Bewegungen zusammentreffen. Ist $\delta = 0$, so ist

$$A^2 = a^2 + a'^2 + 2aa' = (a + a')^2.$$

Wächst δ bis auf $\frac{\lambda}{2}$, so nimmt A ab bis

$$A^2 = a^2 + a'^2 - 2aa' = (a - a')^2.$$

Nimmt δ noch weiter zu, so wächst A wieder, bis es für $\delta = \lambda$ wieder einen grössten Werth erhält. Bei weiterer Zunahme von δ nimmt A in gleichen Perioden ab und zu, so dass es allemal wenn $\delta = n\lambda$ ist seinen grössten, und wenn es gleich $(2n - 1)\frac{\lambda}{2}$ ist, seinen kleinsten Werth annimmt.

Noch deutlicher tritt dieses periodische Wachsen hervor, wenn wir annehmen, dass die Amplituden der Theilbewegung gleich sind, dann wird

$$A^2 = 2a^2\left(1 + \cos 2\pi\frac{\delta}{\lambda}\right)$$

und da

$$1 + \cos 2\pi\frac{\delta}{\lambda} = 2\cos^2\pi\frac{\delta}{\lambda}$$

$$A^2 = 4a^2 \,.\, \cos^2\pi\frac{\delta}{\lambda} \quad A = 2a \,.\, \cos\pi\frac{\delta}{\lambda}$$

und man sieht, wie A einen zwischen 0 und $2a$ liegenden Werth annimmt, je nachdem die Phasendifferenz δ zwischen $(2n - 1)\frac{\lambda}{2}$ und $2n\frac{\lambda}{2}$ liegt.

Durch das Zusammenwirken der beiden Bewegungen kann also die resultirende stärker oder schwächer sein als jede der beiden, und kann selbst vernichtet werden.

Wenden wir diese Folgerungen auf das Licht an, so folgt daraus, dass, wenn ein Punkt von einer Lichtquelle auf zwei verschiedenen Wegen Licht erhält, die Beleuchtung des Punktes nicht einfach die Summe der beiden zu ihm gesandten Lichtmengen ist, sondern dass die Beleuchtung abhängt von der Differenz der beiden von den verschiedenen Lichtwellen durchlaufenen Wege. Durch das Zusammenwirken zweier nach Zurücklegung verschiedener Wege sich vereinigender Lichtstrahlen kann, vorausgesetzt, dass dieselben gleiche Wellenlänge haben, die Beleuchtung des Punktes stärker oder schwächer sein, als die von jedem einzelnen Lichtstrahle; und ist die Intensität beider Strahlen die gleiche, so kann durch ihr Zusammenwirken selbst Dunkelheit entstehen. Diese Einwirkung der Strahlen auf einander kann aber nur an der Stelle statt-

1) Wir verweisen hier zugleich für alle folgenden Entwicklungen auf die im 3. Abschnitt des ersten Theiles ausführlich dargelegten Principien der Wellenbewegung.

finden, wo die Strahlen sich treffen, in ihrem weitern Verlauf werden sie nicht gestört, da nach dem zweiten Theile des Princips der Coexistenz der kleinsten Bewegungen die Wellenstrahlen sich ungestört durchkreuzen, das heisst jenseits des Kreuzungspunktes sich ungestört fortsetzen.

Der Erste, welcher Interferenzerscheinungen beobachtete und auf diese hin den Satz aussprach, dass Licht zu Licht hinzugefügt Dunkelheit erzeugen könne, war Grimaldi[1]), und Thomas Young[2]) benutzte die von Grimaldi gemachte und von ihm vervollkommnete Beobachtung zum Erweise der Richtigkeit der Wellentheorie. Wir werden diese Erscheinungen, bei denen sich zugleich eine Beugung des Lichtes zeigt, in den nächsten Paragraphen besprechen. Fresnel[3]) erst erdachte einen Versuch, den nach ihm benannten Spiegelversuch, mit dem er den unzweideutigen Beweis lieferte, dass, wenn ein Punkt zugleich von zwei Lichtquellen beleuchtet wird, seine Helligkeit verschieden ist, je nach der Differenz der Abstände des Punktes von den beiden Lichtquellen.

Fresnel stellte zwei Spiegel von schwarzem oder hinten geschwärztem Glase so auf, dass ihre Ebenen vertical und nur sehr wenig gegen einander geneigt waren, und dass sie überdies mit einer Kante genau zusammenstiessen, ohne dass an der Berührungslinie ein Spiegel vor dem andern vorstand.

Wenn die von verschiedenen Mechanikern hergestellten Interferenzapparate nicht zu Gebote stehen, kann man sich diese Spiegel am besten dadurch herstellen, dass man eine viereckige Platte schwarzen Glases durch einen scharfen Schnitt in der Mitte durchschneidet, und nachdem man die Schnittränder abgeschliffen hat, die beiden Stücke auf ein viereckiges Holzstückchen mit weichem Wachs aufklebt, so dass die beiden abgeschliffenen Ränder zusammenstossen. Man darf dann, wenn die Vorrichtung zu dem Versuche brauchbar sein soll, mit der Fingerspitze an der Stelle, wo die Gläser zusammenstossen, keine vorspringende Kante mehr fühlen. Der Winkel, den die beiden vordern spiegelnden Flächen mit einander bilden, muss ferner nahezu 180^0 sein.

Ein vortreffliches von Nörrenberg angegebenes Mittel zur Erreichung dieser Bedingungen theilt Quincke mit[4]). Ein Spiegelglasstreifen von 100^{mm} Länge, 25^{mm} Breite und 3^{mm} Dicke wird mit dem Diamanten in zwei 50^{mm} lange Stücke geschnitten. Diese legt man dicht neben einander auf vier nahezu gleich grosse Kügelchen von weichem Wachs, die auf der horizontalen

1) *Grimaldi*, Physico-Mathesis de Lumine. Bologna 1665.

2) *Thomas Young*, On the theory of light and colours. Philosophical Transactions of Roy. Society. 1802. London. Gilb. Ann. XXXIX.

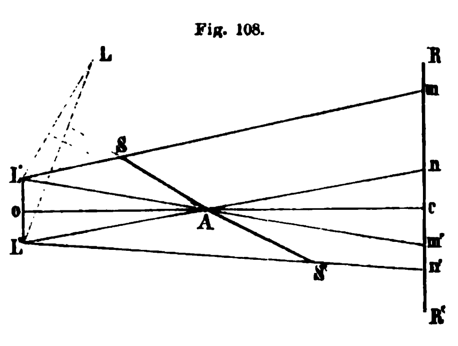
3) *Fresnel*, Sur la lumière. Supplément à la traduction française de la 5. édit. du traité de chimie de Thomson. Paris 1822. Poggend. Annal. Bd. 3. Oeuvres complètes. T. II. p. 17 ff.

4) *Quincke*, Poggend. Annal. Bd. CXXXII. p. 42.

Oberfläche eines grössern Holzklötzchens aufliegen. Zwei von den Wachskugeln liegen unter der Berührungslinie der beiden Glasstreifen, die andern beiden an den Enden der Streifen, so dass jeder Streifen in drei Punkten aufliegt. Auf diese beiden als Spiegel dienenden Streifen legt man dann eine grössere Platte Spiegelglas von etwa 200^{mm} Länge, 50^{mm} Breite und 3^{mm} Dicke und drückt diese mit horizontal und parallel der Berührungslinie der beiden Spiegel gelegtem Zeigefinger längs dieser Linie schwach an. Die grössere elastische Spiegelglasplatte biegt sich dann in der Mitte durch, und in Folge dessen werden die beiden Spiegelflächen schwach gegen einander geneigt, ohne dass die eine Fläche vor der andern im Geringsten vorsteht. Die Neigung der Spiegel beträgt dann nur wenige Minuten.

Stellt man dann die beiden Spiegel einer Lichtquelle gegenüber, so erzeugt jeder von derselben ein Bild, und ein den Spiegeln gegenüber gestellter Schirm wird von dem von den Spiegeln reflectirten Lichte so beleuchtet, als wären die Spiegelbilder zwei selbständige Lichtquellen. Fig. 108 zeigt die Anordnung des Versuches als Horizontaldurchschnitt. L ist die Lichtquelle, AS, AS' sind die beiden Spiegel, L', L'' die beiden Spiegelbilder. Der Schirm RR', den wir parallel $L'L''$ aufgestellt denken, erhält dann zwischen mm' Licht von der Lichtquelle L', in dem Raume nn' von der Lichtquelle L''; der Raum nm' wird also zugleich von beiden Lichtquellen beleuchtet; man sieht das deutlich an der in diesem Raume grössern Helligkeit des Schirmes.

Fig. 108.



Wendet man nun als Lichtquelle L eine sehr schmale intensive verticale Lichtlinie an, etwa ein sehr schmales Bündel Sonnenstrahlen, oder die Brennlinie, welche von den Sonnenstrahlen gebildet wird, welche eine Cylinderlinse durchsetzt haben, so erscheinen in dem Raume nm' an beiden Seiten der Mitte C eine Anzahl farbiger Streifen, welche den Lichtlinien L' und L'' parallel sind. In der Mitte c befindet sich ein weisser Streifen, dort, wo die in der Mitte des Abstandes LL' auf LL' senkrechte oc den Schirm trifft. Von der Mitte aus nach einer Seite hin fortschreitend treffen wir folgende stetig in einander übergehende Farben, zunächst gelblich-roth, dann schwarz-violett, blau; weiter weiss, gelb-roth, violett, blau, ferner grün, gelb, roth, bläulich-grün, dann noch roth, bläulich-grün, wieder roth, bläulich-grün u. s. f. bis die Farben schliesslich undeutlich werden.

Wenn man auf die Cylinderlinse anstatt weissen Lichtes homogenes einfaches Licht fallen lässt, indem man entweder die Sonnenstrahlen durch ein homogenes Glas gehen lässt, oder vor die Linse ein Prisma anbringt, so dass nur eine Farbe auf die Linse fällt, dann wird die Erscheinung viel einfacher

es treten nur abwechselnde helle und dunkle Streifen auf. Die Mitte c ist hell, von ihr ausgehend sieht man nach beiden Seiten die Helligkeit abnehmen, und in einem bestimmten Abstande am geringsten werden, von da an wächst nach beiden Seiten die Helligkeit wieder und erreicht wieder in einem bestimmten Abstande ihren grössten Werth u. s. f. Wir bezeichnen die Maxima der Helligkeit als helle, die dunkelsten Stellen als dunkle Streifen.

Erzeugt man mit einem Prisma ein möglichst helles Spectrum und lässt von diesem immer andere Farben auf die Linse, und somit auf die Spiegel fallen, so findet man, dass die Abstände der hellen und dunklen Streifen immer andere werden; sie sind am grössten für rothes Licht, kleiner für gelbes, grünes, blaues, am kleinsten für violettes Licht. Die Breite der Streifen wird also um so geringer, je brechbarer das Licht ist. Hieraus folgt zunächst, weshalb wir bei Anwendung des weissen Lichtes anstatt heller und dunkler Streifen farbige Streifen sehen. In dem mittlern hellen Streifen sind alle Farben mit grösster Intensität vorhanden, derselbe muss daher weiss erscheinen; nach den Seiten hin verschwindet zuerst violett, dann blau, dann grün, und schliesslich überragt das Roth die übrigen Farben, der mittlere helle Streifen muss daher nach Innen gelbliche, nach Aussen rothe Ränder haben. Dann folgt nach beiden Seiten, da der helle Streifen für violett weiter von der Mitte entfernt ist als der dunkle für roth, zunächst ein schwarzer Streifen, auf diesen folgt dann zunächst das Maximum für violett und blau; diese Farben werden daher den zweiten hellen Streifen nach Innen begrenzen. Weiterhin treten zum Violett und Blau auch die andern Farben; auf das Blau wird daher Weiss folgen müssen, welches, da das violette und blaue Licht zuerst wieder verschwindet, durch Gelb in Roth übergeht u. s. f. Wir können die Farben sämmtlich nach den Gesetzen der Farbenmischung ableiten.

Wie bei den verschiedenen Farben, so ändern sich die Abstände der Streifen ebenso, wenn wir die Neigung der Spiegel ändern. Die Mitte bleibt immer hell, der erste und die folgenden dunklen und hellen Streifen rücken aber um so weiter nach den Seiten, je näher der Winkel, welchen die beiden Spiegel bilden, gleich 180^0 ist, um so näher zusammen, je mehr die Spiegel gegen einander geneigt sind. Wenn die Neigung der Spiegel gegen 170^0, oder wenn wir von dem spitzen Winkel der beiden Spiegelebenen ausgehen, 10^0 beträgt, fallen die Streifen so nahe zusammen, dass sie nicht mehr sichtbar sind.

Ebenso ändert sich der Abstand der Streifen, wenn die Entfernung des Schirmes von den Spiegeln eine andere wird, er wird grösser, wenn der Schirm weiter von den Spiegeln entfernt wird, kleiner, wenn man den Schirm den Spiegeln nähert.

Aus der Thatsache, dass in dem von beiden Lichtquellen beleuchteten Streifen des Schirmes bei Anwendung einfarbigen Lichtes dunkle Streifen auftreten, folgt nun unzweideutig, dass in der That Licht zu Licht hinzugefügt Dunkelheit hervorbringen kann, denn diese Streifen zeigen sich nicht

dort, wo nur Licht von dem einen Spiegel hinkommt. Sie verschwinden ebenfalls und machen einer gleichmässigen Beleuchtung Platz, wenn der eine Spiegel bedeckt wird, also nur der andere Licht auf den Schirm sendet.

Die Mitte c des von beiden Spiegeln beleuchteten Streifens ist immer hell, in welchem Abstande man auch den Schirm aufstellen mag und welche Neigung auch die Spiegel gegen einander haben, vorausgesetzt, dass der Schirm, wie wir annahmen, senkrecht ist zu der auf die Verbindungslinie der beiden Lichtquellen $L' L''$ in dem Mittelpunkte o senkrechten oc, dass also RR' parallel ist LL'. Da nun die Mitte c von jeder der beiden Lichtquellen L' und L'', welche zugleich in demselben Augenblicke Licht aussenden, in dem von L das Licht ausgeht, gleich weit entfernt ist, so folgt, dass zwei gleichbeschaffene Lichtstrahlen, die von zwei ganz gleichen Lichtquellen ausgehen und einen von beiden gleichweit entfernten Punkt beleuchten, sich gegenseitig verstärken. Von der Mitte aus wird nach beiden Seiten hin die Lichtstärke anfangs kleiner, sie wird in den dunklen Streifen ganz Null, und nimmt dann wieder zu. Daraus folgt, dass, wenn der von zwei Lichtstrahlen bei ihrem Zusammentreffen durchlaufene Weg ein verschiedener ist, sie je nach der Verschiedenheit des Weges sich stärken oder schwächen können.

Die Helligkeit ist also abhängig von der Differenz der von den beiden Lichtstrahlen durchlaufenen Wege, und zwar ist sie eine periodische Funktion; mit der Zunahme der Wegedifferenz wird sie erst kleiner, dann grösser, wieder kleiner u. s. f. Um nun zu untersuchen, ob die Abhängigkeit von der Wegedifferenz genau die von der Theorie geforderte ist, müssen wir die Differenz der Entfernungen der einzelnen Punkte von den beiden Lichtquellen bestimmen.

Zu dem Ende müssen wir ausser dem Abstande der Lichtquelle und des Schirmes von den Spiegeln, so wie die Neigung der letzteren gegen einander, die leicht ein für allemal gemessen werden können, die Entfernungen der einzelnen hellen und dunklen Streifen von der Mitte c kennen. Um diese zu erhalten, ist das beschriebene Beobachtungsverfahren, die Erscheinung auf einem Schirme zu betrachten, nicht sehr geeignet, da die Streifen sehr nahe zusammenliegen.

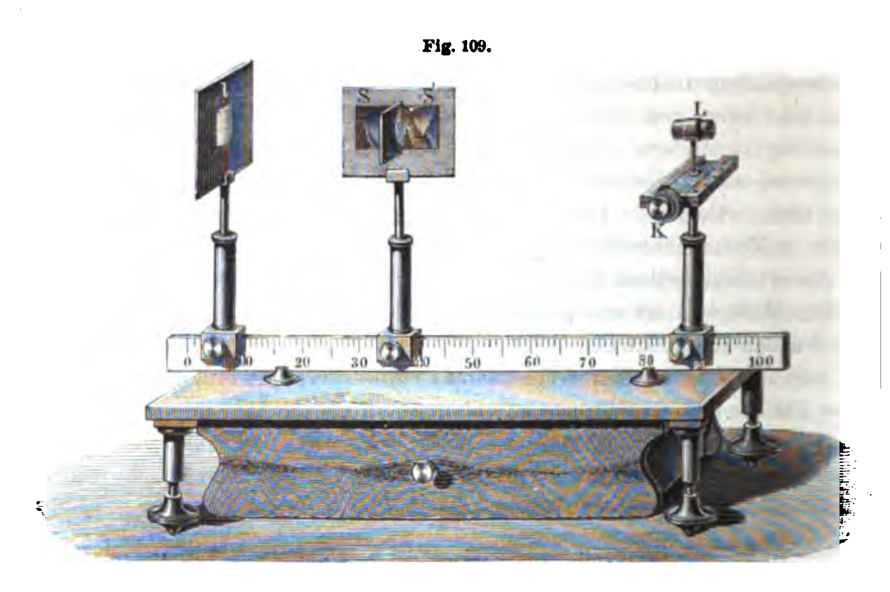
Fresnel[1]) fing daher die Erscheinung direkt mit einer Lupe von kurzer Brennweite auf. Man denke sich eine Lupe so hinter dem Schirme aufgestellt, dass man durch sie hindurchsehend ein deutliches virtuelles Bild der den Spiegeln zugewandten Seite des Schirmes erhält, so sieht man nach Fortnahme des Schirmes die vorhin auf dem Schirme dargestellten Streifen vergrössert, und kann nun leicht den Abstand derselben messen. Zu dem Zwecke spannte Fresnel in der gleichen Entfernung vor der Lupe einen feinen Faden parallel den Streifen aus, der unveränderlich fest mit der Lupe ver-

1) *Fresnel,* a. a. O. Poggend. Annal. Bd. 3. p. 99 ff. Oeuvres complètes T. II. p. 15.

bunden war, und befestigte den Apparat auf einer Mikrometerschraube, welche der Lupe eine seitliche Bewegung in der Richtung *mn* Fig. 108 zu ertheilen vermochte. Da die angesehenen Streifen und der Faden sich in derselben Entfernung von der Linse befinden, so sieht man sie zugleich und Faden wie Streifen deutlich.

Eine sehr bequeme Anordnung zur Messung der Streifenabstände gibt die sogenannte Diffractionsbank von Duboscq. Dieselbe zeigt Fig. 109. Auf einem festen Fussbrett ist ein Messinglineal, auf die hohe Kante gestellt, welches mit einer Millimetertheilung versehen ist, befestigt. Auf dieses

Fig. 109.



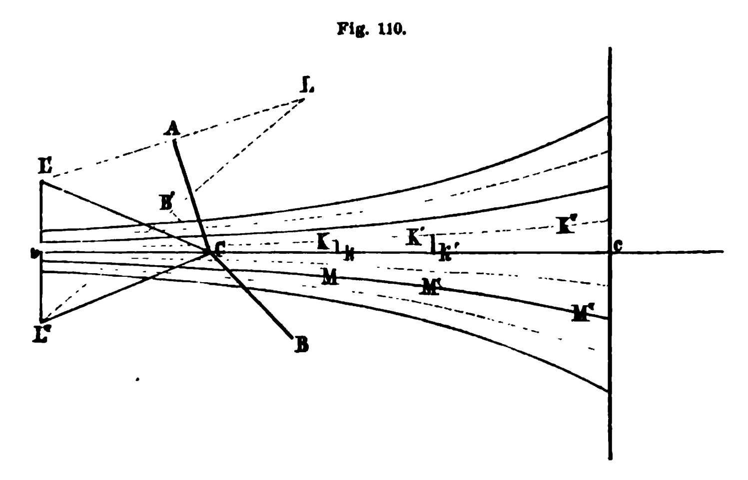
Lineal sind in passenden Stativen die einzelnen Apparate befestigt. Zunächst eine Cylinderlinse l, in der Mitte eines undurchsichtigen Schirmes, der alles nicht durch die Linse hindurchgehende Licht von den Spiegeln abhält. Lässt man auf die Linse ein nahe paralleles Strahlenbündel fallen, so entsteht in der Brennweite derselben eine reelle Lichtlinie, wie sich unmittelbar aus den Gesetzen der Brechung in einer Kreislinie, dem Horizontaldurchschnitt der Cylinderlinse ergibt. Die von dieser Lichtlinie ausgehenden Strahlen fallen dann auf die Spiegel SS', von denen der eine S mit Hülfe einer Mikrometerschraube parallel sich selbst vor oder zurückgestellt werden kann, während die Ebene des andern gegen die des ersten mehr oder weniger geneigt werden kann, um so die Spiegel den vorhin angegebenen Bedingungen entsprechend stellen zu können.

Die entstehenden Streifen werden mit der Lupe L beobachtet, welche nahe der Brennweite einen Faden parallel den Interferenzstreifen ausgespannt hat, oder an dessen Stelle ein feines Glasplättchen, in welchem mit einem Diamanten eine Marke oder eine Theilung eingeritzt ist. Die Lupe wird von einem

Schlitten getragen, welcher durch eine mit dem Kopfe K versehene Mikrometerschraube seitlich verschoben werden kann. An einer Theilung, an der sich ein auf dem Schlitten vorhandener Nonius vorbeischiebt, sowie an der in 100 gleiche Theile getheilten Trommel der Mikrometerschraube wird die seitliche Verschiebung gemessen. Zur Ausführung der Messungen stellt man nun zunächst den Faden der Lupe so, dass er den mittlern hellen Streifen deckt, und verschiebt dann durch Drehung des Schraubenkopfes K die Lupe nach der einen oder andern Seite so weit, dass der Faden den ersten, zweiten etc. dunklen Streifen deckt; die Grösse der Verschiebung liest man dann an der Theilung des Kopfes ab.

Misst man nun so den Abstand eines bestimmten, etwa des ersten oder zweiten Streifens von der Mitte, indem man nach und nach die Lupe in verschiedene Entfernung von den Spiegeln bringt, so findet man, dass die Abstände der Streifen mit zunehmender Entfernung grösser werden, und zwar so, dass in einem Horizontalschnitt, der durch die Ebene $L'L''oc$ Fig. 108 gelegt ist, die einem bestimmten Streifen angehörigen Punkte auf einer Hyperbel liegen, deren Brennpunkte die beiden Lichtquellen L' und L'' sind. Fig. 110 stellt einen solchen Horizontaldurchschnitt dar. AC und BC sind die beiden Spiegel, L' und L'' die beiden Bilder der Lichtquelle, und oc die auf dem Mittelpunkt o von $L'L''$ errichtete Senkrechte. Diese Linie ist der Ort der hellen Mitte, nach beiden Seiten liegt daneben ein dunkler Streifen, dessen

Fig. 110.



Entfernungen von oc in verschiedenen Abständen von o durch die Hyperbel $KK'K''$ gegeben ist. Auf diesen dunklen folgt der zweite helle Streifen, dessen Abstände von oc durch das zweite Hyperbelpaar $MM'M''$ gegeben ist u. s. f.

Die Hyperbel ist bekanntlich dadurch charakterisirt, dass die Differenz zweier von den beiden Brennpunkten nach einem und demselben Punkte derselben gezogenen Leitstrahlen eine constante Grösse, und zwar gleich der sogenannten grossen oder reellen Axe ist.

Daraus, dass diese Curven Hyperbeln sind, folgt also

$$KL'' - KL' = K'L'' - K'L' = K''L'' - K''L' = d,$$

wenn wir die grosse Axe dieser Hyperbel mit d bezeichnen.

Diese Leitstrahlen sind nun die von den Lichtstrahlen, welche in den Punkten K, K' . . zusammentreffen, zurückgelegten Wege; es folgt also, wenn zwei gleichbeschaffene Lichtstrahlen, die zugleich von einem Punkte ausgehen, auf verschiedenen Wegen, von denen der eine um eine gewisse Grösse d kürzer als der andere ist, zu einem Punkte sich fortpflanzen, so vernichten sich dieselben bei ihrem Zusammentreffen.

Die analytische Geometrie lehrt nun, dass, wenn wir den Abstand Kk oder $K'k'$ . . eines Punktes der Hyperbel von der Mittellinie oc mit x und den zugehörigen Abstand ko mit y bezeichnen, wenn wir ferner den halben Abstand $L'L''$ der beiden Brennpunkte e, die halbe grosse Axe der Hyperbel a nennen, dass dann x und y durch folgende Gleichung mit einander verknüpft sind:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{e^2 - a^2} = 1 \quad \ldots \text{I.}$$

Messen wir demnach für irgend einen Punkt der Hyperbel die Werthe x und y, und bestimmen den Abstand e der Brennpunkte, so können wir aus dieser Gleichung a und da

$$KL'' - KL' = d = 2a,$$

auch die Wegedifferenz der Lichtstrahlen bestimmen, bei welcher sie sich vernichten.

Die Grösse x ist der gemessene Abstand des ersten dunklen Streifens von der hellen Mitte, oder der halbe Abstand der beiden ersten dunklen Streifen von einander. Nennen wir den Abstand letzterer δ, so ist demnach

$$x = \frac{\delta}{2}.$$

Ferner ist

$$y = ko = kC + Co.$$

kC ist der Abstand des Punktes k von dem Punkte, in welchem der Horizontalschnitt die Kante schneidet, in welcher die Spiegel zusammenstossen. Derselbe lässt sich direkt messen, er sei gleich w.

Co, der Abstand des Punktes C von der Ebene der Spiegelbilder, bestimmt sich aus dem Abstande LC und der Neigung $ACB' = \alpha$ des Spiegels folgendermassen. Es ist

$$Co = CL' \,.\, \cos oCL'.$$

Nun liegen L, L', L'' auf einer Kreislinie, deren Mittelpunkt C ist, demnach ist

$$CL' = CL = f \text{ und } \sphericalangle\, L'CL'' = 2L'LL'',$$

da der Winkel an L als Peripheriewinkel auf demselben Bogen steht wie der an C als Centriwinkel. Da nun weiter

$$LL' \perp CA, \quad LL'' \perp BC,$$

so folgt

$$\sphericalangle L'LL'' = \alpha,$$

gleich dem Neigungswinkel der beiden Spiegel. Da ferner

$$CL' = CL'' \text{ und } Co \perp L'L'',$$

so folgt auch

$$\sphericalangle oCL' = \frac{1}{2} L'CL'' = \alpha$$

und

$$y = w + f \,.\, \cos \alpha.$$

Der halbe Abstand der beiden Brennpunkte $e = oL'$ ist dann

$$e = CL' \,.\, \sin \alpha = f \,.\, \sin \alpha.$$

Setzen wir nun die Werthe für x, y, e in unsere Gleichung I., so wird dieselbe

$$\frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2}{a^2} - \frac{(w + f \,.\, \cos \alpha)^2}{(f \,.\, \sin \alpha)^2 - a^2} = 1 \quad \ldots \text{II.}$$

und diese Gleichung nach a aufgelöst gibt uns einen bestimmten Werth für a oder auch den Wegeunterschied d.

Bestimmt man nun aus entsprechenden Messungen für die andern hellen und dunklen Hyperbeln die grossen Axen, also die Wegedifferenz der in ihnen zusammentreffenden Lichtstrahlen, so ergibt sich, dass die grossen Axen der dunklen Hyperbeln, wenn die der ersten KK' .... den Werth d hat, die Werthe

$$d, \; 3d, \; 5d, \; 7d \ldots.$$

haben, dass sie sich also verhalten wie die Reihe der ungeraden Zahlen.

Die Axen der hellen Hyperbeln haben dagegen die Werthe

$$2d, \; 4d, \; 6d, \; 8d \ldots.$$

sie verhalten sich also wie die Reihe der geraden Zahlen.

Wir schliessen daraus, dass zwei gleichbeschaffene Lichtstrahlen bei ihrem Zusammentreffen sich vernichten, wenn sie von derselben Lichtquelle ausgehend Wege durchlaufen haben, die um eine bestimmte Grösse d, oder ein ungerades Vielfaches derselben verschieden sind, dass sie sich aber verstärken, wenn ihre Wege nicht oder um ein gerades Vielfaches derselben Grösse d verschieden sind.

Gehen wir von einem hellen Streifen zu dem nächstliegenden dunklen über, so nimmt die Lichtstärke stetig ab, gehen wir von einem dunklen zum nächstliegenden hellen über, so nimmt dieselbe stetig zu. Beim Uebergange zum nächstliegenden Streifen nimmt nun aber die Differenz der von den beiden Lichtstrahlen durchlaufenen Wege stetig zu. Wir schliessen daher, dass die aus dem Zusammenwirken zweier Lichtstrahlen resultirende Lichtintensität stetig abnimmt, wenn die Differenz der von ihnen zurückgelegten Wege

von 0 oder $2nd$ auf d oder $(2n + 1) d$ wächst, dass sie dagegen ebenso zunimmt, wenn sie von $(2n - 1) d$ auf $2nd$ wächst.

Vergleichen wir nun diese Resultate mit der aus den Principien der Wellentheorie gezogenen Folgerung, so finden wir sie damit in vollstem Einklang. Die aus dem Zusammenwirken zweier Wellenbewegungen resultirende Amplitude war

$$A = 2a \,.\, \cos \pi \frac{\delta}{\lambda},$$

wenn die Amplituden beider gleich a und die Phasendifferenz, das heisst der Wegeunterschied der Strahlen gleich δ ist, und man sieht, wie die auf Seite 327 aus dieser Form von A in Bezug auf den Werth von A gezogenen Schlüsse in dem Fresnel'schen Versuche experimentell dargestellt sind. Daraus folgt, dass sich auf jedem Lichtstrahle seiner Länge nach periodische Zustände finden, von der Länge d, die einander stetig folgen, und von denen zwei unmittelbar auf einander folgende sich gerade entgegengesetzt verhalten. Wir werden daher berechtigt sein, das Licht als eine Wellenbewegung und die gefundene Wegedifferenz d, von welcher die resultirende Helligkeit abhängig ist, als die halbe Länge einer Welle anzusehen. Denn der Werth von A hängt genau so von $^1/_2\, \lambda$ ab, wie die resultirende Helligkeit von d.

Die Messung der Distanzen w und f sowie des Winkels α gibt somit sofort durch Auflösung der Gleichung II nach a und durch Verdoppelung des Werthes von a die halbe Wellenlänge des zu dem Versuche benutzten homogenen Lichtes. Fresnel hat diese Messungen für ein rothes Licht durchgeführt, welches durch ein tiefrothes Glas alter Kirchenfenster hindurchging[1]. Er erhielt als Wellenlänge für dieses Licht

$$\lambda = 6{,}38,$$

wenn, wie das schon im ersten Abschnitt geschehen ist, die zehntausendstel Millimeter als Einheit genommen werden.

§. 57.

Andere Methoden die Interferenzstreifen hervorzubringen. Die Erzeugung der Interferenzstreifen mit Hülfe der Fresnel'schen Spiegel beruht darauf, dass mittels derselben Schwingungen ganz bestimmter Phasendifferenz an einer Stelle erregt werden, indem die von einer und derselben Lichtquelle herrührenden Wellen, nachdem sie genau unter denselben Umständen reflectirt sind und verschiedene Wege durchlaufen haben, wieder an derselben Stelle zusammentreffen. Auf diese Weise ist es erreicht, dass an einer und derselben Stelle längere Zeit hindurch, und so lange als man will, Schwingungen gleicher Richtung immer mit derselben Phasendifferenz zusammentreffen. Das ist eine zur Wahrnehmung der Interferenzen nothwendige Be-

1) *Fresnel,* Poggend. Annal. Bd. III. p. 124. Oeuvres complètes. T. II. p. 23

dingung, denn bei der äusserst geringen Länge der Lichtwellen und in Folge dessen der äusserst kurzen Dauer der Schwingungen, ist die Interferenz einzelner Schwingungen, wie es beim Schall der Fall war, nicht wahrzunehmen. Aus diesem Grunde können wir auch keine Interferenzerscheinungen wahrnehmen, wenn wir die Wellen, welche zusammenkommen, von zwei verschiedenen Lichtquellen hernehmen, wenn wir also die beiden durch Spiegelung erhaltenen Lichtlinien bei dem Fresnel'schen Versuch ersetzen durch zwei selbständig leuchtende Lichtlinien oder Lichtpunkte. — Wir können nämlich durchaus nicht annehmen, dass die Schwingungen der leuchtenden Körper mit einer solchen Regelmässigkeit erfolgen, dass wir die von ihnen ausgehenden Lichtwellen eine messbare Zeit hindurch als zu demselben Mittelpunkt gehörig ansehen dürfen, so dass wir die Schwingungen eines im Abstande x von der Lichtquelle befindlichen Aethertheilchens durch die Gleichung

$$y = a \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

darstellen können; wir müssen die Bewegung vielmehr darstellen durch die Gleichung

$$y = a \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + d}{\lambda}\right),$$

worin d innerhalb jeder messbaren Zeit alle Werthe zwischen Null und λ annimmt.

Die von einer zweiten Lichtquelle herkommende und denselben Punkt treffende Welle ist ebenso dargestellt durch

$$y' = a' \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + d'}{\lambda}\right),$$

wo ebenfalls d' in jeder messbaren Zeit alle Werthe zwischen 0 und λ annehmen kann.

Die Amplitude der resultirenden Bewegung ist natürlich auch hier gegeben durch die Gleichung

$$A^2 = a^2 + a'^2 + 2aa' \,.\, \cos 2\pi \frac{d - d'}{\lambda};$$

da indess $d - d'$ in jedem Momente einen andern Werth erhält, so ist die resultirende Amplitude oder Intensität veränderlich. Diese Aenderung erfolgt aber in so kurzen Zeiträumen, dass wir sie selbst nicht wahrnehmen, sondern nur die während der Beobachtungszeit vorhandene mittlere Intensität des Lichtes sehen. Um diese mittlere Intensität innerhalb einer gegebenen Zeit t zu erhalten, haben wir die Summe der in den einzelnen Zeitmomenten dt vorhandenen Intensitäten zu bilden und diese Summe durch die Anzahl der einzelnen Glieder, also durch $\frac{t}{dt}$ zu dividiren. Darnach ist die mittlere Intensität

$$M = \frac{1}{t} \int_0^t (a^2 + a'^2)\, dt + \frac{1}{t} \int_0^t 2aa' \cos 2\pi \frac{d - d'}{\lambda} \,.\, dt.$$

Der mit dt multiplicirte Ausdruck unter dem Summenzeichen des zweiten Gliedes nimmt nun innerhalb des Intervalls $0 - t$ alle Werthe zwischen -1 und $+1$ an, da $d - d'$ alle Werthe zwischen 0 und λ annimmt. Daraus folgt, dass das zweite Glied der Summe gleich 0 ist, somit dass

$$M = \frac{1}{t} \int_0^t (a^2 + a'^2)\, dt = a^2 + a'^2,$$

oder die mittlere Intensität ist einfach die Summe der Intensitäten der von beiden Quellen ausgehenden Bewegung, welches auch die Lage des betrachteten Punktes zu den einzelnen Lichtquellen ist. Zwei verschiedene Lichtquellen können also niemals bei ihrem Zusammenwirken Interferenzstreifen erzeugen.

Auch wenn wir nur eine Lichtquelle haben, ist die ausgesandte Bewegung in der angegebenen Weise unregelmässig, so dass wir im Abstande x von derselben die Bewegung darstellen müssen durch

$$y = a \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + d}{\lambda}\right),$$

worin d innerhalb jeder messbaren Zeit jeden Werth zwischen 0 und λ annimmt. Hier verlässt aber die Bewegung, welche mit der ersten Interferenzen gibt, die Lichtquelle zur selben Zeit, sie wird nur auf einem um δ grössern Weg zu den ihr und der ersten gemeinschaftlichen Punkten geführt; deshalb ist, welches auch der Werth von d in jedem Momente ist, die Phasendifferenz der beiden zusammentreffenden Wellen lediglich durch den Wegeunterschied δ bestimmt und immer derselbe. Die resultirende Bewegung ist deshalb von dieser Phasendifferenz nach dem Interferenzgesetz abhängig und immer dieselbe.

Die äusserst geringe Länge der Lichtwellen fordert auch dann, wenn die interferirenden Wellen von einer und derselben Lichtquelle ausgehen, dass die Lichtquelle möglichst nahe auf einen Punkt oder eine Lichtlinie reducirt werde. Denn sobald die in einem und demselben Punkte zusammentreffenden Wellen von merklich verschieden liegenden Punkten der Lichtquelle herrühren, kommen dieselben wieder in allen möglichen Phasen zusammen und können somit nicht zu Streifen Anlass geben.

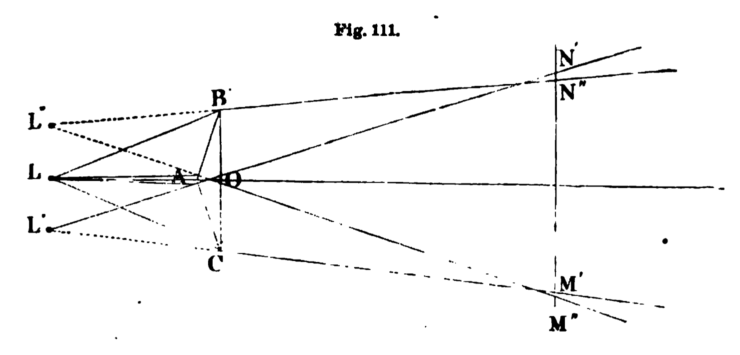
Die Bedingungen, dass wir Interferenzstreifen erhalten, sind also, dass wir von einer schmalen Lichtquelle aus Wellen auf Wegen verschiedener Länge zu denselben Punkten führen, dort, wo die Wegedifferenz dann 0 oder ein gerades Vielfaches von halben Wellenlängen ist, erhalten wir durch das Zusammenwirken der beiden Wellen die vierfache Helligkeit der einzelnen Welle, dort, wo die Wegedifferenz ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge ist, Dunkelheit.

Ausser mit Hülfe der Fresnel'schen Spiegel lässt sich diese Anordnung noch auf verschiedenen andern Wegen erreichen. Sehr bequem ist dazu das

schon von Fresnel[1]) angewandte Interferenzprisma. Dasselbe besteht Fig. 111 aus einem sehr stumpfwinkligen Glasprisma *ABC*.

Dasselbe wird einer Lichtlinie *L* so gegenübergestellt, dass die Kante *A* der Lichtlinie parallel ist, und dass die durch *L* und *A* gelegte Ebene das

Fig. 111.



Prisma halbirt. Jede Hälfte des Prismas wirkt dann als ein Prisma mit sehr kleinem brechenden Winkel, und der Erfolg ist nach §. 17 der, dass die auf die Hälfte *BA* des Prismas fallenden Strahlen nach der Brechung sich so fortpflanzen, als kämen sie von der Lichtlinie *L"*, während die auf *CA* fallenden Strahlen nach der Brechung sich so fortpflanzen, als kämen sie von der Lichtlinie *L'*. In dem von beiden gemeinschaftlich beleuchteten Raume *OM'N"* müssen sich also gerade so Interferenzstreifen zeigen als bei den Fresnel'schen Spiegeln. Nur in einer Beziehung zeigt sich ein kleiner Unterschied. Nach §. 23 ist nämlich die Lage der virtuellen Bilder *L'* und *L"* eine verschiedene für die verschiedenen Farben, für rothes Licht liegen sie näher bei *L* als für violettes Licht. Die hellen und dunklen Streifen für Violett liegen deshalb hier näher beisammen als bei Anwendung der Spiegel, wenn die für rothes Licht denselben Abstand haben. Bei Anwendung des weissen Lichtes sind die farbigen Streifen deshalb schmaler, als wenn man sie durch die Fresnel'schen Spiegel erzeugt.

Ein anderes im Princip wohl zuerst von Fizeau[2]) angewandtes Mittel, um in derselben Weise Interferenzstreifen zu erzeugen, sind zwei aus demselben Stücke geschnittene und wenig gegen einander geneigte Spiegelglasplatten Fig. 112 *A* und *B* mit ebenen und parallelen Wänden; man stellt dieselben in einiger Entfernung von einer Lichtlinie so auf, dass die durch die Lichtlinie und die beiden Glasplatten gemeinschaftliche Kante gelegte Ebene den Winkel der beiden Platten halbirt. Die auf die einzelnen Platten fallenden Strahlen werden dann so gebrochen, dass sie nach dem Austritte sich fortpflanzen, als kämen die aus *A* austretenden von *L"*, die aus *B* austretenden

---

1) *Fresnel*, Oeuvres complètes. T. I. p. 330.

2) *Fizeau*, Comptes Rendus. T. XXXIII. p. 349. Krönig Journal. Bd. III. Man sehe auch Jamin, Cours de Physique. T. III.

von L'. Die dann noch divergirenden Strahlen werden dann von einer Sammellinse aufgenommen, welche von L' in L_1 und von L'' in L_2 ein reelles

Fig. 112.

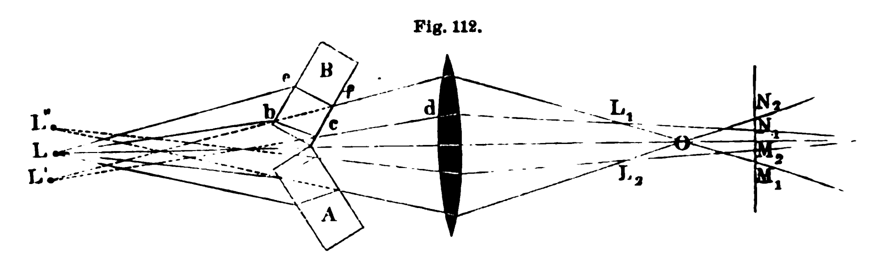


Bild entwirft. Die von L_1 ausgehenden Strahlen erleuchten dann den Raum $L_1 M_1 N_1$, die von L_2 ausgehenden den Raum $L_2 M_2 N_2$. Da die beiden Bilder L_1 und L_2 den vorhin gestellten Bedingungen entsprechen, so entstehen in dem von beiden gemeinschaftlich beleuchteten Raume gerade so Interferenzstreifen, wie bei den Fresnel'schen Spiegeln.

Eine dritte Methode bieten die von Billet[1]) angewandten Halblinsen. Die Einrichtung derselben zeigt Fig. 113. Eine schwache Sammellinse wird durch einen durch ihre Mitte geführten Schnitt in zwei gleiche Hälften getheilt. Die eine Hälfte wird in einen festen Halbring L gefasst, die andere in einen Halbring K, der durch die Mikrometerschraube M dem ersten genähert und von ihm entfernt werden kann. Sind die beiden Halbringe sich möglichst nahe gestellt, so berühren sich die Schnittflächen der Linse. Man stellt nun diese Halblinsen in der Nähe einer Lichtlinie so auf, dass die Halbirungsebene der Linsen die Lichtlinie in sich aufnimmt. Berühren sich die Linsenhälften, so wirken sie als eine einfache Linse, sie erzeugen in einem bestimmten Abstande von der Linse ein reelles Bild der Lichtlinie. Wenn man dagegen die Linsenhälften von einander entfernt, wie Fig. 114, so erzeugen sie

Fig. 113.

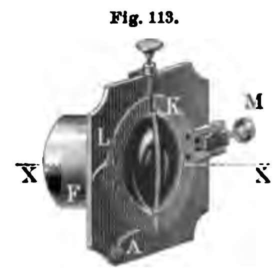
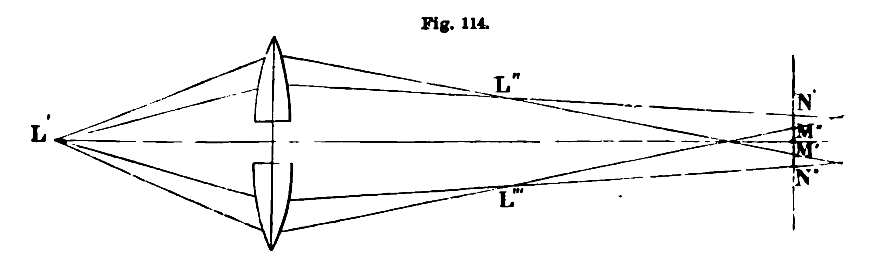


Fig. 114.



zwei Bilder L' und L'', welche beide dann die Bedingung zur Bildung der Interferenzstreifen in dem Raume, in welchen beide Bilder ihr Licht senden, erfüllen.

1) *Billet*, Traité d'optique physique. T. I. p. 67.

§. 58.

Farben dünner Blättchen. Wohl die verbreitetste und zuerst aus der Wellentheorie erklärte Interferenzerscheinung sind die Farben, welche dünne Schichten farbloser durchsichtiger Körper zeigen. Alle durchsichtigen Körper, wenn sie in hinreichend dünnen Schichten hergestellt werden, zeigen Farben ähnlich denen der Seifenblasen, wenn man sie im reflectirten Lichte beobachtet. Der Erste, dem diese Thatsache auffiel, war Boyle (1663), und Hooke, der Zeitgenosse und Rivale Newton's, machte sie zum Gegenstande einer genauern Untersuchung. In seiner Mikrographia (1665) gibt er an, dass die Farbe der Glimmerblättchen von ihrer Dicke abhänge und nur zum Vorschein komme, wenn die Dicke innerhalb gewisser Grenzen liege. Ferner behauptet er, dass für eine gleichmässige Färbung nothwendig sei, dass die Dicke überall dieselbe sei. Er war es auch, dem es zuerst gelang, regelmässige Farbenringe zu erzeugen durch Aufeinanderlegen zweier Objectivgläser.

Nach Hooke beschäftigte sich Newton[1]) mit dieser Erscheinung und stellte in einer musterhaften Experimentaluntersuchung die Gesetze derselben auf.

Legt man auf eine ebene Glasplatte eine Convexlinse von sehr schwacher Krümmung, und betrachtet diese Combination im reflectirten Lichte, indem man also auf sie hinsieht, so sieht man um einen dunklen Mittelpunkt eine Reihe von concentrischen farbigen Ringen. Zunächst um die dunkle Mitte legt sich ein nach Innen bläulich, nach Aussen gelbroth gesäumter weisser Kreis. Als zweites Ringsystem folgt dann ein schmaler violetter Ring, um den sich ein intensiv blauer, dann schwach grüner, deutlich gelber und schliesslich rother Rand herumlegt. Das dritte Ringsystem ist von Innen nach Aussen blau, grün, gelb, roth; das vierte grün, gelbroth, roth und in den noch weiter erkennbaren Ringen zeigt sich nur grün und roth, bläulichgrün, roth und röthlich-weiss. Man hat die Farbenringe, um mit ihnen andere Interferenzfarben bequem vergleichen zu können, genau klassificirt, und als Farben verschiedener Ordnung neben einander gestellt. Jedes der erwähnten Ringsysteme wird dann als ein Ganzes gefasst, und die in dem ersten auftretenden Farben als Farben erster Ordnung, die im zweiten als zweiter Ordnung bezeichnet u. s. f.

Hiernach sind von der dunklen Mitte an gerechnet die Farben

I. Ordnung: schwarz, blassblau, weiss, gelb, orange, roth.
II. Ordnung: violett, blau, gelblich-grün, gelbroth.
III. Ordnung: purpur, indigblau, glänzend grün, lebhaft gelb, rosa, carmoisin.
IV. Ordnung: bläulich-grün, gelblich-roth, schwach roth.
V. Ordnung: schwach grün, weiss, schwach roth.

---

1) *Newton*, im 2. Buche seiner Optik.

Einfacher aber schärfer und deshalb zu genauen Messungen mehr geeignet wird die Erscheinung, wenn man die Platten durch homogenes Licht beleuchtet oder durch ein möglichst homogenes Glas auf sie hinsieht; man sieht dann eine grosse Anzahl heller und dunkler Ringe, die sich um den dunklen centralen Fleck herumlegen.

Der Uebergang von hell zu dunkel und von dunkel zu hell ist wie bei den Interferenzstreifen ein allmählicher.

Eine Messung der Ringdurchmesser ergab, dass, wenn man die Durchmesser des ersten hellen Ringes gleich 1 setzt, diejenigen der folgenden hellen Ringe sind:

$$\varrho h = \sqrt{1},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{7}\ \ldots.$$

sie verhalten sich wie die Quadratwurzeln der ungeraden Zahlen. Diejenigen der dunklen Ringe sind dann

$$\varrho d = \sqrt{0},\ \sqrt{2},\ \sqrt{4},\ \sqrt{6}\ \ldots.$$

sie verhalten sich also wie die Quadratwurzeln aus den geraden Zahlen. Der Durchmesser des centralen dunklen Fleckes ist dabei gleich 0 gesetzt.

Die Durchmesser der Ringe überhaupt verhalten sich also wie die Quadratwurzeln der natürlichen Zahlen.

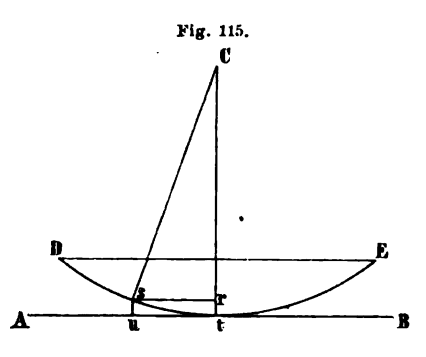
Wendet man nach einander verschiedenes homogenes Licht an, so werden die Durchmesser der Ringe andere, sie sind am grössten bei Anwendung rothen, am kleinsten bei Anwendung violetten Lichtes. Die Ringe im weissen Lichte sind nichts anderes als die theils über theils neben einander gelagerten Ringe der einzelnen Farben; die Färbungen lassen sich daraus nach den Gesetzen der Farbenmischung berechnen, in ganz gleicher Weise wie bei den Interferenzstreifen des weissen Lichtes im Fresnel'schen Spiegelversuch.

Schon Hooke erklärte, dass die zwischen zwei schwach convexen Linsen entstehenden Farbenringe nur ein specieller Fall der Farben dünner Blättchen seien, dass sie in der dünnen zwischen den beiden innern Flächen der auf einander gelegten Gläser eingeschlossenen Luftschicht entstehen. Dünne Blättchen zeigten, wie Hooke fand, Farben, die von ihrer Dicke abhängen, und da bei dieser Vorrichtung die Dicke der Luftschicht in einem um den Berührungspunkt als Mittelpunkt gelegten Kreis überall gleich ist, so ist ein solcher Kreis überall gleich gefärbt, da aber die verschiedenen Kreise eine verschiedene Dicke haben, so sind die verschiedenen Ringe auch immer anders gefärbt. Einen direkten Beweis für die Richtigkeit der Annahme, dass die Ringbildung in dieser Schicht veranlasst werde, erhielten Hooke und Newton durch die Erfahrung, dass die Durchmesser der Ringe wesentlich abhängen von der Substanz der innerhalb der beiden Gläser eingeschlossenen Schicht. Wurden dieselben unter die Glocke einer Luftpumpe gebracht, und zwischen ihnen ein luftverdünnter Raum hergestellt, so wurden die Ringdurchmesser grösser; wurde die Luft durch Wasser ersetzt, so wurden sie kleiner, mehr noch wenn anstatt des Wassers eine stärker brechende Flüssigkeit genommen

wurde. Vergleichende Messungen der Durchmesser bei verschiedenen Substanzen ergaben, dass dieselben sich verhielten umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus den Brechungsexponenten der eingeschlossenen Flüssigkeiten. Die Brechungsexponenten von Luft und Wasser verhalten sich wie $1 : {}^4/_3$, die Ringdurchmesser, wenn einmal Luft, dann Wasser zwischen den Gläsern eingeschlossen ist, wie $\sqrt{1} : \sqrt{{}^3/_4}$.

Bei der von Newton angewandten Combination einer Convexlinse und einer ebenen Glasplatte ergibt sich aus den beobachteten Ringdurchmessern und dem gemessenen Krümmungsradius der untern Linsenfläche die Dicke der Schicht, bei welcher die hellen und dunklen Ringe entstehen. Sei zu dem Ende AB (Fig. 115) die ebene Glasplatte, DE die untere Fläche der Linse, deren Mittelpunkt in C, und sei sr der Radius irgend eines hellen oder dunklen Ringes, der in der obern Grenze der zwischen DE und AB eingeschlossenen Schicht liegt.

Fig. 115.



Die Dicke der Schicht an der Stelle, wo der Ring entsteht, ist dann gleich su. Ist nun Ct senkrecht zu AB, so haben wir

$$sr^2 = Cs^2 - Cr^2$$
$$Cr = Ct - rt$$

und weiter

$$Ct = R; \quad rt = su = d,$$

wenn wir den Krümmungsradius der Fläche DE mit R und die Dicke der Schicht mit d bezeichnen. Daraus folgt

$$\varrho^2 = R^2 - (R - d)^2 = 2Rd - d^2,$$

und daraus

$$d = \frac{\varrho^2}{2R} + \frac{d^2}{2R},$$

d ist gegen R sehr klein, so dass wir $\frac{d^2}{2R}$, welches gegen d selbst wieder sehr klein ist, vernachlässigen dürfen. Dann ist

$$d = \frac{\varrho^2}{2R}.$$

Es folgt daraus, dass die Dicken der Schicht, wo die Ringe sich bilden, proportional sind den Quadraten der Ringdurchmesser. Da nun die Durchmesser der hellen Ringe sich verhalten wie die Quadratwurzeln aus den ungeraden Zahlen, so folgt, dass die entsprechenden Dicken der Schicht sich einfach verhalten wie die ungeraden Zahlen.

Ist also die Dicke für den ersten hellen Ring gleich 1, so sind die Dicken für die übrigen hellen Ringe

$$d_h = 1, 3, 5, 7 \ldots\ldots$$

und die Dicken an Stelle der dunklen Ringe

$$d_d = 0, 2, 4, 6 \ldots\ldots$$

Schliesslich fand Newton, dass die Durchmesser der hellen und dunklen Ringe und somit die Dicken der Schicht, denen die Ringe entsprechen, verschieden sind je nach der Richtung, in welcher man auf die Combination hinsieht. Die Ringdurchmesser sind am kleinsten, wenn man senkrecht auf die Gläser hinabsieht, und sie werden grösser, wenn man unter einem kleinern Winkel auf die Platte sieht. Das Gesetz, nach welchem sich die Dicken der Schicht für einen besimmten Ring bei schiefem Daraufsehen ändern, lässt sich am besten folgendermassen darstellen. Ist d die Dicke der Schicht, wenn wir senkrecht auf die Platte hinabsehen und $\varDelta$ diejenige, wenn wir so darauf hinsehen, dass die in unser Auge kommenden Lichtstrahlen den Winkel r mit dem Einfallslothe im Innern der Schicht bilden, so ist

$$\varDelta = \frac{d}{\cos r}.$$

Das Gesetz ist durch ausgedehnte Messungen von De la Provostaye und Desains[1]) bestätigt worden.

Die Dicken der Schicht für den ersten hellen Ring bei senkrechtem Hinabsehen auf den Apparat sind nach den Messungen von Newton:

für das äusserste Roth	$0^{mm},000161$
„ die Grenze Roth-Orange	0 ,000149
„ „ „ Orange-Gelb	0 ,000142
„ „ „ Gelb-Grün	0 ,000133
„ „ „ Grün-Blau	0 ,000123
„ „ „ Blau-Indigo	0 ,00011475
„ „ „ Indigo-Violett	0 ,00010975
„ das äusserste Violett	0 ,0001015

Auch wenn man durch eine solche Combination einer Linse und einer ebenen Glasplatte hindurchsieht, erscheinen farbige Ringe, welche denen im reflectirten Lichte ganz gleich, nur weniger intensiv und brillant sind, und welche bis auf einen Punkt ganz denselben Gesetzen folgen. Der Unterschied ist der, dass bei den Ringen im durchgehenden Lichte jene dunkel sind, welche im reflectirten Lichte hell sind und umgekehrt. So legt sich zunächst um die helle Mitte ein dunkler Ring, um diesen ein heller u. s. f. Die farbigen Ringe im weissen Lichte sind daher sämmtlich complementär zu denen im reflectirten Lichte gefärbt.

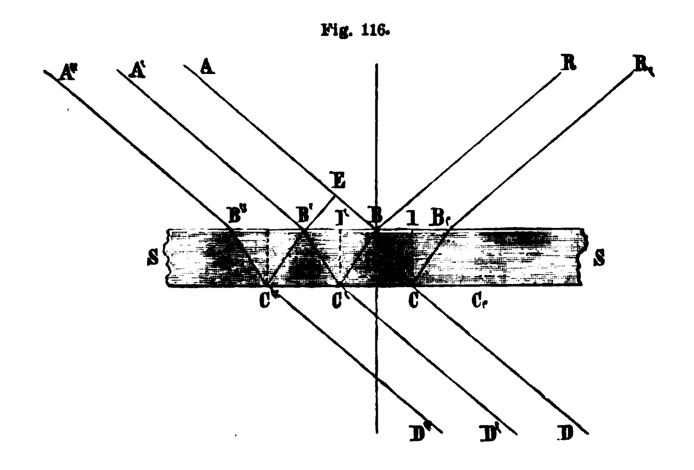
---

1) *De la Provostaye* und *Desains*, Annal. de chim. et de phys. III. Sér. t. XXVII. Poggend. Annal. Bd. LXXVI.

Alle diese Thatsachen sind schon von Newton beobachtet worden, wesentlich Neues in Betreff der Erscheinung ist seitdem nicht hinzugefügt. Anders jedoch mit der Erklärung derselben. Die Newton'sche Erklärung gründete sich auf die Emissionstheorie und erst im Anfange dieses Jahrhunderts fiel dieselbe vor den Einwürfen Th. Young's[1]) und Fresnel's[2]). Diese Forscher in Verbindung mit Poisson[3]) und Airy[4]) leiteten dann die Erscheinung mit allen ihren Einzelnheiten aus den Principien der Undulationstheorie her und wiesen nach, dass die Erscheinung auf Interferenz der nach gleicher Richtung sich fortpflanzenden an der vordern und hintern Fläche der Schicht reflectirten Strahlen beruhe.

Nehmen wir an, ein Bündel paralleller gleichgefärbter Strahlen A, A', A'',.. falle auf eine dünne Schicht SS, einer von parallelen Wänden begrenzten durchsichtigen Substanz (Fig. 116). Der Winkel, den dieselben mit dem

Fig. 116.



Einfallslothe bilden, sei gleich i. Die Schicht SS sei an den beiden Seiten von dem gleichen Mittel begrenzt, also wenn die Schicht, wie bei den Newton'schen Ringen, Luft ist, sei oberhalb und unterhalb derselben die gleiche Glassorte.

An der obern Grenze der Schicht angekommen, erleiden nun sämmtliche Strahlen eine Theilung. Der Strahl AB wird zum Theil bei B reflectirt nach R hin, zum Theil aber tritt er in die Schicht SS' ein und pflanzt sich

1) *Th. Young*, On the theory of ligt and colours. Philos. Trans. 1802.

2) *Fresnel*, Mémoire sur la diffraction de la lumière. Mémoires de l'Acad. Tome V. Poggend. Annal. Bd. XXX. Oeuvres complètes. T. I u. II. p. 74, p. 247 ff. Note sur le phénomène des anneaux colorés. Annal. de chim. et phys. XXIII.

3) *Poisson*, Sur le phénomène des anneaux colorés. Annal. de chim. et phys. XXII.

4) *Airy*, On the undulatory theory of optics. Mathematical Tracts. Poggend. Annal. Bd. XLI.

im Innern der Schicht in der Richtung BC fort, so dass er mit dem Einfall-lothe den Winkel r bildet. Bei C tritt eine zweite Theilung des Strahles ein, er wird zum Theil nach $B_{,}$ reflectirt, zum Theil tritt er in der Richtung CD parallel zu AB aus der Schicht aus. Der in der Richtung $CB_{,}$ reflectirte Strahl tritt dort wiederum zum Theil aus der Schicht aus und pflanzt sich in der Richtung $B_{,} R_{,}$ parallel zu BR fort, zum Theil wird er nochmals nach $C_{,}$ reflectirt. Bei $C_{,}$ tritt wiederum eine Theilung ein; theilweise wird der Strahl reflectirt, theilweise wird er gebrochen. Gleiches gilt von den übrigen Strahlen $A'B'$, $A''B''$ .... Der Erfolg dieser vielfachen Theilungen ist der, dass an jedem Punkte B nicht nur ein reflectirter Strahl BR sich fortpflanzt und in jedem Punkte C nicht nur ein gebrochener Strahl CD austritt, sondern eine ganze Reihe von Strahlen. In der Richtung BR (Fig. 116) z. B. pflanzen sich fort zunächst der an B reflectirte Theil des Strahles AB, ferner der bei B' in die Schicht eintretende, dann bei C' reflectirte und schliesslich bei B nach R wieder austretende Theil des Strahles $A'B'$, dann der bei B'' in die Schicht eintretende, bei C'', B', C' reflectirte Theil des Strahles $A''B''$ u. s. f.

In der Richtung CD treten aus erstens der bei B in die Schicht eintretende, bei C sie wieder verlassende Antheil des Strahles AB, zweitens der bei B' in das zweite Mittel eintretende, bei C' und B reflectirte und schliesslich bei C austretende Theil des Strahles $A'B'$, ferner ein Theil des Strahles $A''B''$, welcher bei B'' in die Schicht eintrat, bei C'', B', C', B reflectirt wurde und bei C in der Richtung CD austritt u. s. f.

Die Lichtintensität des nach BR und CD austretenden Strahlencomplexes hängt nun nach den Gesetzen der Wellenbewegung ab von der Phasendifferenz der einzelnen ihn componirenden Strahlen. Es wird zur Bestimmung derselben hinreichend sein, die Resultirende der beiden ersten Strahlen, welche von AB und $A'B'$ herrühren, zu berechnen, da die folgenden wegen der vielfachen Reflexionen und zweimaligen Brechung zu sehr geschwächt sind, um einen wesentlich bestimmenden Einfluss auf das Resultat auszuüben. In dem wichtigsten Falle werden wir dann den Einfluss der ganzen Strahlengruppe betrachten.

Beginnen wir mit der Bestimmung der reflectirten Lichtintensität und suchen die Resultirende der beiden nach BR sich fortpflanzenden Antheile der Strahlen AB und $A'B'$ auf.

Nennen wir den Abstand des Punktes B von der Lichtquelle x, so wird zur Zeit t das in B befindliche Aethertheilchen im einfallenden Lichtstrahl einen Abstand y von der Gleichgewichtslage haben, der gegeben ist durch

$$y = a \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

worin a die Amplitude, λ die Wellenlänge und T die Oscillationsdauer der Lichtschwingungen bedeutet.

Bei B wird das Licht zum Theil reflectirt, die Amplitude des reflectirten Strahles ist daher kleiner als die des einfallenden Lichtes, während Oscillations-

dauer und Wellenlänge ungeändert bleiben. Ist daher r ein echter Bruch, so wird die Amplitude des reflectirten Strahles gleich ra sein. Um nun in dem reflectirten Strahle die Verschiebung y' eines von B um x' entfernten Aethertheilchens zur Zeit t zu erhalten, haben wir zu beachten, dass durch die Reflexion selbst eine Phasenänderung eintreten kann. Wie wir in den Principien der Wellenbewegung nachwiesen, geht bei der Reflexion einer Wellenbewegung eine halbe Wellenlänge verloren, das heisst in der reflectirten Welle ist die Bewegung der schwingenden Punkte derjenigen der in der einfallenden Welle schwingenden entgegengesetzt, wenn das zweite Mittel dichter ist als das erste; die Phase der reflectirten Welle ist aber derjenigen der einfallenden Welle gleich, das heisst die Bewegung geschieht im Abstande x' von B nach derselben Richtung, als wenn sich das einfallende Licht um die Strecke x' fortgepflanzt hätte, wenn das zweite Mittel optisch dünner ist als das erste. Ist demnach, wie bei den Newton'schen Ringen, die Schicht SS Luft, welche an beiden Seiten von Glas begrenzt ist, so ist die Phase der reflectirten Welle gleich der der einfallenden Welle, da Luft weniger dicht ist als Glas, und wir erhalten

$$y' = ra \, . \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + x'}{\lambda} \right).$$

Der Strahl $A'B'$ ist bei B' von der Lichtquelle, wenn B um x entfernt war, um $x - BE$ entfernt, wenn $B'E$ senkrecht zu AB ist, also die Wellenebene des einfallenden Lichtes darstellt. Für den Punkt B' erhalten wir daher

$$y = a \, . \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x - BE}{\lambda} \right).$$

Bei B' tritt der Lichtstrahl zum Theil in die Schicht ein, erfährt also eine Schwächung seiner Amplitude von a zu da, wo d ein echter Bruch ist. Mit dieser Amplitude durchläuft er zunächst im Innern der Schicht die Strecke $B'C'$ und besitzt in dieser eine andere Wellenlänge λ' als diejenige des einfallenden Lichtes, da, wie wir sahen, bei der Brechung die Wellenlänge geändert wird. Eine Aenderung der Phase findet bei der Brechung nicht statt. Bei C' wird der Strahl reflectirt und erfährt dadurch neuerdings eine Schwächung seiner Amplitude von da und ϱda, zugleich aber tritt hier auch der Verlust einer halben Wellenlänge ein, da die untere Grenze der Schicht SS die obere eines dichtern Mittels ist. Nach der Reflexion bei C' wird daher zur Zeit t der Abstand eines unmittelbar über C' liegenden Aethertheilchens von der Gleichgewichtslage sein

$$y_{,} = \varrho da \, . \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x - BE}{\lambda} - \frac{B'C'}{\lambda'} - 1/_2 \right)$$

und da

$$\cos \pi = -1; \ \sin \pi = 0$$

$$y_{,} = -\varrho da \, . \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x - BE}{\lambda} - \frac{B'C'}{\lambda'} \right).$$

Der reflectirte Strahl durchläuft dann die Strecke $C'B$ gleich $B'C'$ und tritt bei B wieder in das erste Mittel in der Richtung BR aus. Auf der Strecke $C'B$ hat der Strahl die Amplitude ϱda und die Wellenlänge λ', durch die Brechung bei B wird dann die Amplitude nochmals geschwächt auf $\delta\varrho da$ und die Wellenlänge wird wieder die frühere λ. Im Abstande x' von B wird daher die Verschiebung y'' eines Aethertheilchens zur Zeit t sein

$$y'' = -\delta\varrho da \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x - BE + x'}{\lambda} - \frac{2B'C'}{\lambda'}\right).$$

Die Verschiebung Y des an diesem Orte vorhandenen Aethertheilchens zur Zeit t ist nun die algebraische Summe dieser einzelnen Verschiebungen in Folge des reflectirten Antheils von AB und $A'B'$ oder

$$Y = y' + y''$$

oder

$$Y = ra \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + x'}{\lambda}\right) - \delta\varrho da \,.\, \sin 2\pi \left\{\frac{t}{T} - \frac{x + x'}{\lambda} - \left(\frac{2B'C'}{\lambda'} - \frac{BE}{\lambda}\right)\right\}$$

Wir können nun Y auf die Form bringen

$$Y = A \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + x'}{\lambda} - \frac{D}{\lambda}\right),$$

wenn wir setzen

$$ra - \varrho d\delta a \,.\, \cos 2\pi \left(\frac{2B'C'}{\lambda'} - \frac{BE}{\lambda}\right) = A \,.\, \cos 2\pi \frac{D}{\lambda},$$

$$\varrho d\delta a \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{2B'C'}{\lambda'} - \frac{BE}{\lambda}\right) = A \,.\, \sin 2\pi \frac{D}{\lambda}.$$

Für die Amplitude des resultirenden Strahles, welche die Lichtintensität bestimmt, erhalten wir somit

$$A^2 = (ra)^2 + (\varrho d\delta a)^2 - 2a^2 r\varrho d\delta \,.\, \cos 2\pi \left(\frac{2B'C'}{\lambda} - \frac{BE}{\lambda}\right)$$

oder wenn wir den gemeinschaftlichen Factor a^2 herausschreiben und setzen

$$\cos 2\pi \left(\frac{2B'C'}{\lambda'} - \frac{BE}{\lambda}\right) = 1 - 2 \sin^2 \pi \left(\frac{2B'C'}{\lambda'} - \frac{BE}{\lambda}\right),$$

$$A^2 = a^2 \left\{(r - \varrho d\delta)^2 + 4r\varrho d\delta \,.\, \sin^2 \pi \left(\frac{2B'C'}{\lambda'} - \frac{BE}{\lambda}\right)\right\}.$$

Der Ausdruck für A^2 zeigt, dass der Werth der Amplitude abhängig ist von der Dicke der Schicht und der Neigung des einfallenden Lichts; denn damit ändern sich $B'C'$ und BE, und je nach dem Werthe dieser Grössen kann der Sinus zwischen 0 und 1 liegen. Ist der Sinus gleich 0, so ist die Amplitude ein Minimum

$$A^2 = a^2 (r - \varrho d\delta)^2,$$

ist er gleich 1, so wird

$$A^2 = a^2 (r + \varrho d\delta)^2.$$

Um die Abhängigkeit des Werthes dieses Sinus von der Dicke der Schicht besser zu übersehen, sei die Dicke derselben bei C' (Fig. 117) $C'F$ gleich Δ. Die Strecke $B'C' = BC'$ ist dann

$$B'C' = \frac{C'F}{\cos B'C'F}.$$

Fig. 117.

Der Winkel $B'C'F$ ist nun aber, da $C'F$ dem Einfallslothe bei B' parallel ist, gleich dem Brechungswinkel i', demnach ist

$$B'C' = \frac{\Delta}{\cos i'}.$$

Die Strecke BE, um welche der Strahl AB hinter $A'B'$ zurück ist, ist

$$BE = BB' \,.\, \sin BB'E.$$

Der Winkel $BB'E$, welchen die ankommende Wellenebene mit der brechenden Fläche bildet, ist gleich dem Winkel, den die ankommenden Lichtstrahlen mit dem Einfallslothe bilden, somit

$$BE = BB' \,.\, \sin i.$$

Weiter ist, da $B'C' = C'B$,

$$BF = FB'; \quad BB' = 2B'F$$

und da

$$B'F = C'F \,.\, \text{tang}\, B'C'F = \Delta \,.\, \text{tang}\, i',$$
$$BE = 2\Delta \,.\, \text{tang}\, i' \,.\, \sin i.$$

Nach dem Brechungsgesetz verhalten sich nun die Sinus der Einfalls- und Brechungswinkel zu einander wie die Wellenlängen im ersten und zweiten Mittel, demnach

$$\sin i : \sin i' = \lambda : \lambda',$$
$$\sin i = \frac{\sin i' \,.\, \lambda}{\lambda'}.$$

Demnach ist

$$\frac{BE}{\lambda} = \frac{2\Delta \,.\, \text{tang}\, i' \,.\, \sin i'}{\lambda'}$$

und somit

$$\frac{2B'C'}{\lambda'} - \frac{BE}{\lambda} = \frac{2\Delta}{\cos i'}\left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{\sin^2 i'}{\lambda'}\right) = \frac{2\Delta \cos i'}{\lambda'}.$$

Setzen wir diesen Ausdruck in unsere Gleichung für A^2, so wird

$$A^2 = a^2 \left\{(r - \varrho d\delta)^2 + 4r\varrho d\delta \,.\, \sin^2 \frac{\Delta \cos i'}{\lambda'} \cdot 2\pi\right\}.$$

Es ergibt sich daraus unmittelbar, dass die resultirende Amplitude A eine periodische Function ist, welche bei gegebenem Einfallswinkel i und

gegebener Wellenlänge λ nur abhängt von der Dicke der Schicht. Nehmen wir zunächst an, der Einfallswinkel sei gleich 0, das Licht falle senkrecht auf die Schicht, so ist auch der Winkel i' gleich 0, und A erhält immer dann seinen grössten Werth

$$A = a\,(r + \varrho d\delta), \text{ wenn } \sin \frac{\Delta}{\lambda'} \cdot 2\pi = \pm 1,$$

wenn also

$$\sin \frac{\Delta}{\lambda'} \cdot 2\pi = \sin\,(2n - 1)\,\frac{\pi}{2}$$

oder

$$\frac{\Delta}{\lambda'} = (2n - 1)\,{}^1/_4; \quad \Delta = (2n - 1)\,\frac{\lambda'}{4}.$$

Wenn also die Dicke der Schicht gleich einem ungeraden Vielfachen einer viertel Wellenlänge ist, der von dem Strahl $A'B'$ also durchlaufene Weg um eine halbe Wellenlänge oder ein ungerades Vielfaches derselben grösser ist als der Weg des Strahles AB, gibt das Zusammenwirken der beiden Strahlen die grösste Helligkeit.

Der Werth von A wird dagegen am kleinsten

$$A = a\,(r - \varrho d\delta), \text{ wenn } \sin \frac{\Delta}{\lambda'}\, 2\pi = 0,$$

wenn also

$$\sin \frac{\Delta}{\lambda'} \cdot 2\pi = \sin 2n\,\frac{\pi}{2}$$

oder

$$\frac{\Delta}{\lambda'} = 2n\,.\,{}^1/_4; \quad \Delta = 2n\,\frac{\lambda}{4},$$

wenn also die Dicke der Schicht ein gerades Vielfaches einer viertel Wellenlänge, der von $A'B'$ mehr zurückgelegte Weg ein gerades Vielfaches einer halben Wellenlänge ist.

Man übersieht dieses Resultat sofort, wenn man bedenkt, dass allein durch die verschiedenen Reflexionen an der obern und untern Grenze der Schicht zwischen den beiden Strahlen die Phasendifferenz von einer halben Wellenlänge eintritt. Kommt nun durch die Wegedifferenz der Strahlen

$$A'B' + B'C' + C'B + BR - AB - BR$$

die Phasendifferenz einer halben Wellenlänge hinzu, so ist bei der Interferenz in dem reflectirten Strahlencomplexe die Phasendifferenz eine ganze Wellenlänge oder was dasselbe ist, Null, die Strahlen müssen sich also verstärken; ist dagegen die Wegedifferenz Null oder eine Anzahl von ganzen Wellenlängen, so ist die schliessliche Phasendifferenz eine halbe Wellenlänge, die Strahlen müssen sich also gegenseitig schwächen.

Hat nun die Schicht wie bei den Newton'schen Ringen an verschiedenen Stellen eine verschiedene Dicke, so wird überall dort, wo

$$\Delta = 0,\ 2\,\frac{\lambda}{4},\ 4\,\frac{\lambda}{4},\ 6\,\frac{\lambda}{4} \cdots$$

sich das Minimum der Helligkeit finden, da überall dort die reflectirte

Strahlen mit der durch die Reflexion entstandenen Phasendifferenz zusammentreffen. Dort aber, wo

$$\Delta = \frac{\lambda}{4},\ 3\,\frac{\lambda}{4},\ 5\,\frac{\lambda}{4},\ 7\,\frac{\lambda}{4}\ldots$$

findet sich das Maximum der Helligkeit.

Wie wir sahen, treten bei den Newton'schen Ringen unter Anwendung homogenen Lichtes die dunklen Ringe hervor, wo die Dicke der Schicht 0, 2, 4, 6 ... war, die hellen jedoch bei den Dicken 1, 3, 5, 7 ..., also gerade an den Stellen, wo sie die Undulationstheorie erwartet.

Die Dicken der Schichten für die Maxima und Minima der verschiedenen Farben müssen nach der Undulationstheorie verschieden und zwar den Wellenlängen proportional sein, der erste helle Ring im Rothen muss dort auftreten, wo

$$\Delta = {}^1/_4\,\lambda_r$$

und bei den übrigen Farben dort, wo die Dicke der Schicht gleich einer viertel Wellenlänge dieser Farben ist. Newton's Messungen haben diese Forderung experimentell nachgewiesen, die von Fresnel hiernach durch Multiplication mit 4 berechneten Wellenlängen stimmen, soweit es bei der Unbestimmtheit der Bezeichnung Roth etc. möglich ist, vollkommen mit Fraunhofer's §. 24 bereits erwähnten Messungen für die dunklen Linien überein.

Fällt das Licht nicht senkrecht auf unsere Vorrichtung zur Erzeugung der Newton'schen Ringe, d. h. sehen wir schräg auf dieselbe, so werden die Durchmesser der Ringe, also die Dicken der Schicht, wo sie erscheinen, andere, und zwar soll Δ, die Dicke, wo ein Ring, welcher bei senkrechtem Hinabsehen bei der Dicke d erscheint, sich bildet, gleich sein

$$\Delta = \frac{d}{\cos i'},$$

worin i' der Winkel ist, den der im Innern der Schicht reflectirte Strahl mit dem Einfallslothe bildet.

Auch diese Thatsache folgt aus der Undulationstheorie, denn nach unserem Ausdrucke für A

$$A^2 = a^2 \left\{(r - \varrho d\delta)^2 + 4 r \varrho d\delta\ .\ \sin^2 \frac{\Delta\ .\ \cos i'}{\lambda'}\right\},$$

worin i' die eben angegebene Bedeutung hat, erhält A seinen grössten Werth, wenn

$$\sin \frac{\Delta \cos i'}{\lambda'} \cdot 2\pi = \sin\,(2n - 1)\,\frac{\pi}{2} = \pm 1$$

$$\Delta = \frac{2n - 1}{\cos i'} \cdot \frac{\lambda'}{4}.$$

Dagegen erhält A seinen kleinsten Werth, wenn jener Sinus gleich Null ist, also

$$\Delta = \frac{2n}{\cos i'} \cdot \frac{\lambda'}{4}.$$

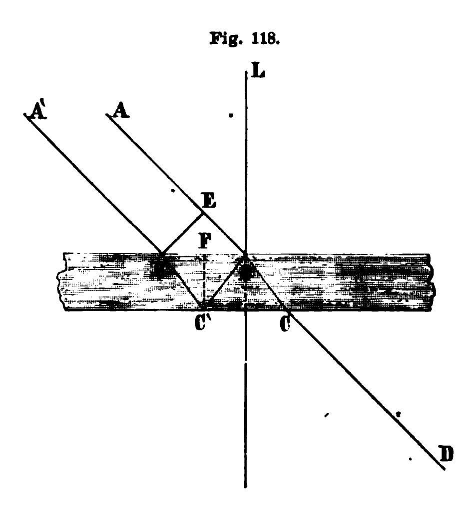
Diese Werthe für Δ verhalten sich daher zu den bei senkrechter Inciden. erhaltenen, wie 1 zu cos i', wie es nach den Versuchen de la Provostaye's und Desains in der That der Fall ist.

Schliesslich ist der Durchmesser der Ringe ein anderer, wenn zwischen den Gläsern anstatt Luft eine andere Substanz ist, und zwar verhalten sich die Dicken der Schichten in zwei Fällen dort, wo ein bestimmter Ring auftritt. umgekehrt wie die Brechungsexponenten der Substanzen; als anstatt Luft Wasser zwischen die Gläser gebracht wurde, war die Dicke der Schicht $^3/_4$ von derjenigen, welche sie war, als sich Luft zwischen den Gläsern befand.

Nach der Undulationstheorie ist der Brechungsexponent gleich dem Verhältniss der Wellenlängen in beiden Mitteln, die Wellenlänge für mittlere Strahlen im Wasser ist also $^3/_4$ von derjenigen in Luft. Ist nun zwischen den Gläsern Wasser anstatt Luft, so tritt in die Gleichungen für Δ anstatt der Wellenlänge in Luft diejenige in Wasser. Da nun aber Δ der Wellenlänge λ' direkt proportional ist, so muss die Dicke der Schicht bei Anwendung von Wasser in demselben Verhältnisse kleiner werden, wie die Wellenlänge im Wasser kleiner ist als in Luft.

Sowie sich die Ringe im reflectirten Lichte nach allen ihren Einzelnheiten aus der Undulationstheorie herleiten lassen, so auch diejenigen im durchgelassenen Licht. In der Richtung CD (Fig. 118) treten aus ein Theil des Strahles AB, der in B und C gebrochen ist, und der Theil des Strahles $A'B'$, der in B' gebrochen, bei C' und B reflectirt und schliesslich in C gebrochen ist.

Fig. 118.



Behalten wir ganz die vorhin angewandte Bezeichnung bei, so wird die Verschiebung eines um x' von C in der Richtung CD entfernten Aethertheilchens in Folge der nach AB ankommenden Lichtbewegung ausgedrückt sein durch

$$y' = d\delta a \, . \, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{BC}{\lambda'} - \frac{x'}{\lambda} \right)$$

und in Folge des von $A'B'$ dorthin gelangenden Theiles der Lichtbewegung

$$y'' = d\varrho^2 \delta a \, . \, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x - BE}{\lambda} - \frac{B'C'}{\lambda'} - {}^1/_2 - \frac{C'B}{\lambda'} - {}^1/_2 - \frac{BC}{\lambda'} - \frac{x'}{\lambda} \right).$$

wie man unmittelbar erhält, wenn man die einzelnen Schwächungen der Amplitude, die durchlaufenen Wege und Phasenverluste des Strahles bei den

Reflexionen, wie sie in der Gleichung in der Reihenfolge, in welcher sie eintreten, dargestellt sind, in Betracht zieht.

Indem wir die Glieder in den Klammern passend ordnen, wird

$$y' = d\delta a \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x+x'}{\lambda} - \frac{BC}{\lambda'}\right)$$

$$y'' = d\varrho^2 \delta a \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x+x'}{\lambda} - \left(\frac{3BC}{\lambda'} - \frac{BE}{\lambda}\right) - 1\right),$$

oder da

$$\sin 2\pi = 0 \quad \cos 2\pi = 1,$$

$$y'' = d\varrho^2 \delta a \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x+x'}{\lambda} - \frac{BC}{\lambda'} - \left(\frac{3BC}{\lambda'} - \frac{BE}{\lambda}\right)\right).$$

Die resultirende Verschiebung ist nun wieder zur Zeit t

$$Y = y' + y''$$

und deren Amplitude gerade wie vorhin berechnet

$$A^2 = (d\delta a)^2 + (d\varrho^2 \delta a)^2 + 2\varrho^2 d^2 \delta^2 a^2 \,.\, \cos 2\pi \left(\frac{2BC}{\lambda'} - \frac{BE}{\lambda}\right),$$

oder wenn wir setzen

$$\cos 2\pi \left(\frac{2BC}{\lambda'} - \frac{BE}{\lambda}\right) = 1 - 2 \sin^2 \pi \left(\frac{2BC}{\lambda'} - \frac{BE}{\lambda}\right)$$

und weiter nach den vorigen Entwicklungen

$$\frac{2BC}{\lambda'} - \frac{BE}{\lambda} = \frac{2\varDelta \,.\, \cos i'}{\lambda'}$$

$$A^2 = a^2 \left\{(d\delta + \varrho^2 d\delta)^2 - 4\varrho^2 d^2 \delta^2 \sin^2 \frac{\varDelta \,.\, \cos i'}{\lambda'} \cdot 2\pi\right\}.$$

In diesem Ausdrucke erhält A seinen grössten Werth

$$A^2 = a^2 (d\delta + \varrho^2 d\delta)^2, \text{ wenn } \sin \frac{\varDelta \,.\, \cos i'}{\lambda'} \cdot 2\pi = 0,$$

seinen kleinsten

$$A^2 = a^2 (d\delta - \varrho^2 d\delta)^2, \text{ wenn } \sin \frac{\varDelta \,.\, \cos i'}{\lambda'}\, 2\pi = \pm 1.$$

Man sieht, im durchgelassenen Lichte treten an den Stellen die dunklen Ringe auf, wo im reflectirten die hellen auftreten und umgekehrt; um die helle Mitte legt sich zunächst ein dunkler, um diesen ein heller Ring u. s. f.

Im weissen Lichte müssen daher alle Ringe complementär zu denjenigen gefärbt sein, welche man beim Hinabsehen auf die Vorrichtung wahrnimmt. Die sonstigen Sätze über Lage und Ausdehnung der Ringe bleiben genau dieselben.

Auch dieses Resultat übersieht man sofort, da hier durch die Reflexion zweimal der Verlust einer halben Wellenlänge, oder wenn man die Antheile der folgenden Strahlen mit beachtet, 4, 6 . . überhaupt $2n$ mal ein solcher Verlust eintritt; die durch die verschiedenen Reflexionen eintretenden Phasendifferenzen betragen also immer eine Anzahl ganzer Wellenlängen oder sind gleich Null.

Die Interferenzen hängen also lediglich von den Wegeunterschieden der Strahlen ab; die Strahlen müssen sich demnach vernichten, wenn diese ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge sind oder wenn

$$\Delta \cdot \cos i' = (2n + 1) \frac{\lambda}{4},$$

sie müssen sich dagegen verstärken, wenn

$$\Delta \cdot \cos i' = 2n \frac{\lambda}{4}.$$

Wir bemerkten vorhin, dass sich die Farben im durchgelassenen Licht von denen im reflectirten Lichte dadurch unterscheiden, dass sie weniger intensiv und brillant sind. Gleiches zeigt sich bei der Anwendung homogenen Lichtes, die reflectirten dunkeln Ringe sind ganz dunkel, die durchgelassenen nicht. Auch dieses lässt sich aus der Undulationstheorie ableiten. Es lässt sich nämlich über die Werthe der Schwächungscoefficienten r, ϱ, d, δ nachweisen (man sehe das folgende Kapitel §. 72 und 73), dass

$$r = \varrho, \quad d = \delta$$

und ferner, dass

$$1 - r^2 = d^2.$$

Setzen wir diese Werthe für ϱ und d in die Gleichungen für die Amplituden ein, so erhalten wir für die Intensität der Ringe im reflectirten Lichte

$$A^2 = a^2 \left\{ \left(r - r\,(1 - r^2)\right)^2 + 4r^2\,(1 - r^2) \sin^2 \frac{\Delta \cdot \cos i'}{\lambda'} \cdot 2\pi \right\}$$

$$A^2 = a^2 \left\{ r^6 + 4r^2 \cdot \sin^2 \frac{\Delta \cdot \cos r}{\lambda'} \cdot 2\pi - 4r^4 \cdot \sin^2 \frac{\Delta \cdot \cos i'}{\lambda'} \cdot 2\pi \right\}$$

und wenn wir die sechste und vierte Potenz von r als zu klein vernachlässigen

$$A^2 = 4a^2 r^2 \cdot \sin^2 \frac{\Delta \cos i'}{\lambda'} \cdot 2\pi.$$

Das Minimum dieses Ausdruckes ist 0, das Maximum $4a^2 r^2$.

Für die Intensität der im durchgehenden Licht erzeugten Ringe erhalten wir

$$A^2 = a^2 \left\{ \left(1 - r^2 + r^2\,(1 - r^2)\right)^2 - 4r^2\,(1 - r^2)^2 . \sin^2 \frac{\Delta \cdot \cos i'}{\lambda'} \cdot 2\pi \right\}.$$

Mit Vernachlässigung der vierten und höhern Potenzen von r wird dieser Ausdruck

$$A^2 = a^2 \left(1 - 4r^2 \sin^2 \frac{\Delta \cdot \cos i'}{\lambda'}\, 2\pi\right).$$

Das Minimum dieses Ausdruckes ist $a^2\,(1 - 4r^2)$, die Lichtintensität kann also niemals Null sein. Es zeigen sich also hier nicht helle und dunkle, sondern helle und weniger helle Ringe.

Gegen diese letztere Ableitung, dass die dunklen Ringe im reflectirten Lichte ganz dunkel seien, machte Poisson[1]) den Einwand, dass dieselbe nur

---

1) *Poisson* a. a. O.

die beiden ersten Strahlen berücksichtige, dass aber in der That sämmtliche Strahlen, welche auf die obere Fläche der Schicht fallen, einen Theil an der Stelle der dunklen Ringe reflectiren. Diesen Einwurf hat Fresnel[1]) widerlegt und auf folgende sehr einfache Weise nachgewiesen, dass an der Stelle der dunklen Ringe durch das Zusammenwirken aller Strahlen die Lichtbewegung vollständig Null wird.

Die dunklen Ringe entstehen dort, wo die Wegedifferenz der Strahlen ein gerades Vielfaches einer halben Wellenlänge ist, für die beiden ersten und somit auch für alle folgenden Strahlen, da jeder folgende hinter seinen vorhergehenden gerade soviel zurück ist, als der zweite Strahl hinter dem ersten. Durch die Verschiedenheit der durchlaufenen Wege tritt also keine Phasendifferenz ein. Duch die verschiedenen Reflexionen sind aber alle Strahlen gegen den ersten um eine ungerade Anzahl halber Wellenlängen verschoben.

Der zweite Strahl ist durch einmalige innere Reflexion gegen den ersten um $\frac{1}{2}\lambda'$, der dritte durch dreimalige um $\frac{3}{2}\lambda'$, der vierte durch fünfmalige um $\frac{5}{2}\lambda'$ verschoben u. s. f. Wenn aber zwei oder mehrere Strahlen mit entgegengesetzter Phase zusammentreffen, ist die resultirende Amplitude einfach die algebraische Summe der Theilamplituden, in der wir die entgegengesetzten Phasen mit verschiedenem Vorzeichen einführen. Die Theilamplituden sind nun in diesem Falle

$$ra,\ \varrho d\delta a,\ \varrho\varrho\varrho d\delta a,\ \varrho\varrho\varrho\varrho d\delta a,\ \ldots$$

jede folgende ist von der vorhergehenden dadurch verschieden, dass ϱ^2 hinzutritt, da jeder folgende Strahl zweimal mehr im Innern reflectirt ist als der vorhergehende.

Die resultirende Amplitude ist demnach

$$A = ra - \varrho d\delta a - \varrho^3 d\delta a - \varrho^5 d\delta a - \cdots$$

oder da

$$\varrho = r,\quad d = \delta,$$

$$A = ra\left\{1 - d^2\,(1 + r^2 + r^4 + \cdots)\right\}.$$

Die Reihe in der Klammer ist eine unendliche Reihe, die sehr rasch convergirt, da r ein nicht grosser echter Bruch ist. Die Reihe lässt sich demnach summiren, und wir wissen, dass ihre Summe Σ gleich ist

$$\Sigma = \frac{1}{1 - r^2}.$$

Demnach ist

$$A = ra\left(1 - d^2\,\frac{1}{1 - r^2}\right).$$

Nun ist aber, wie bereits vorhin erwähnt wurde,

$$d^2 = 1 - r^2,$$

---

1) *Fresnel* a. a. O. Annal. de chim. et de phys. 23. Oeuvres complètes. T. II. p. 247.

demnach

$$A = ra\left(1 - \frac{1 - r^2}{1 - r^2}\right) = 0.$$

Die Resultirende sämmtlicher Strahlen ist also in der That vollständig gleich Null, oder die dunklen Ringe sind vollkommen dunkel.

§. 59.

Farben dicker Platten. Interferentialrefractoren. Aehnliche Interferenzerscheinungen, wie sie dünne Blättchen liefern, kann man unter gewissen Umständen auch durch dicke Platten erhalten; so erhielt Newton [1] solche, als er in den Mittelpunkt eines gläsernen Hohlspiegels, der auf der Rückseite, also der convexen Fläche belegt war, und dessen Glasdicke mehr als zwei Centimeter betrug, einen Schirm aufstellte, welcher an der Stelle des Mittelpunktes eine kleine Oeffnung hatte, und dann durch diese Oeffnung ein Bündel Sonnenstrahlen auf den Spiegel fallen liess. Er beobachtete dann auf der dem Spiegel zugewandten Seite des Schirms ein die Oeffnung umgebendes System farbiger Kreise, ganz ähnlich den Ringen im durchgegangenen Licht. Brewster [2]) beobachtete Interferenzstreifen denen ähnlich, welche bei dem Fresnel'schen Spiegelversuch auftreten, als er zwei gleich dicke Glasplatten unter einem sehr kleinen Winkel gegen einander neigte und dann durch dieselben eine enge Oeffnung betrachtete, welche diffuses Tageslicht auf die Platte fallen liess. Die Theorie dieser Erscheinungen hat Herschel [3] gegeben. Es würde zu weit führen, wollten wir dieselben hier besprechen; wir wollen nur etwas ausführlicher auf die Modification des Brewster'schen Versuches eingehen, welche Jamin [4]) angegeben hat, da dieselbe die Construction eines Apparates möglich gemacht hat, mit Hülfe dessen man die geringsten Unterschiede in der Brechbarkeit zweier verschiedener Körper constatiren und messen kann.

Wenn man eine etwa drei Centimeter dicke Glasplatte, deren Flächen möglichst eben und genau parallel geschliffen sind, in zwei Stücke schneidet, die eine dann fest aufstellt und auf sie Licht von einer breiten Lichtquelle, etwa Wolkenlicht fallen lässt, die andere dann in einer beliebigen Entfernung von der ersten so aufstellt, dass sie von dem Lichte getroffen wird, welches von der ersten Platte reflectirt wird, und zugleich, dass ihre Flächen sehr wenig gegen einander geneigt sind, so erhält man eine Reihe von Interferenzstreifen, welche parallel der Linie sind, in welcher die Plattenebenen bei hinreichender Verlängerung sich schneiden würden. Man sieht diese Interferen-

1) *Newton*, im 2. Buche der Optik. *Herschel*, On light. art. 676 ff.

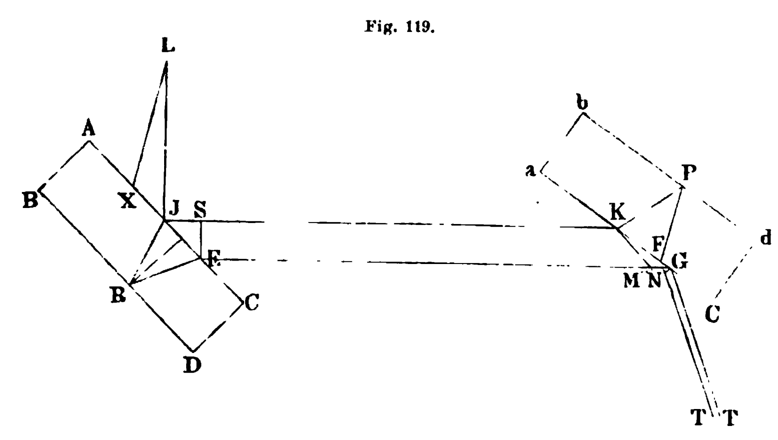
2) *Brewster*, Edinburg Philos. Transactions. vol. VIII. p. 435. *Herschel*. On light. art. 688 ff.

3) *Herschel*, On light. III. Abschn. §. V. art. 676—694.

4) *Jamin*, Comptes Rendus. XLII. p. 482. Poggend. Annal. Bd. XCVIII. Man sehe auch *Quincke*, Poggend. Annal. Bd. CXXXII. p. 50 ff.

streifen schon mit freien Augen das von der zweiten Platte gelieferte Spiegelbild der Lichtquelle durchschneiden. Besser sieht man sie aber, wenn man mit einer Lupe in der Richtung des reflectirten Lichtes auf die zweite Platte sieht. Fig. 119 zeigt die Anordnung der Platten, und deutet an, in welcher Weise

Fig. 119.



die Strahlen getheilt werden, welche zur Interferenz kommen. Ist LJ ein die Vorderfläche der ersten Platte treffender Strahl, so wird derselbe zum Theil bei J reflectirt, nach JK, zum Theil in die Platte hineingebrochen nach JR, dann bei R nach E reflectirt, und bei E nach EG gebrochen, von wo er schliesslich nach T' zurückgeworfen wird. Der bei J nach JK reflectirte Strahl wird dann bei K in die zweite Platte nach P gebrochen, von dort nach F reflectirt, wo er dann nach FT austritt. Jeder Strahl LJ wird also so in zwei zerlegt FT und GT', welche die zweite Platte verlassen, von denen der erste an der vordern Fläche der ersten und der Hinterfläche der zweiten Platte, der zweite an der Hinterfläche der ersten und der Vorderfläche der zweiten Platte reflectirt ist, von denen der eine zwischen den Platten den Weg JK, der andere den Weg EG zurückgelegt hat. Ausser diesen beiden Strahlen treten noch weitere auf, welche vielfache Reflexionen erfahren haben; dieselben sind indess so lichtschwach, dass sie vernachlässigt werden dürfen. Wenn die Platten gegen einander geneigt sind, so sind die Wege, welche die Strahlen, bis sie nach der zweiten Reflexion sich parallel fortpflanzen, zurücklegen, nicht gleich; die Strahlen FT und GT haben demnach eine bestimmte Phasendifferenz, die wir aus der Wegedifferenz ableiten können.

Der Strahl GT' hat den Weg $JR + RE + EG$, der Strahl FT den Weg $JK + KP + PF$ und dann bis er in die durch G zu den Strahlen gelegte senkrechte Ebene GN eintritt den Weg FN zurückgelegt. Die Wegedifferenz der Strahlen ist somit

$$JK + KP + PF + FN - JR - RE - EG.$$

Um aus dieser Wegedifferenz die Phasendifferenz $\varDelta$ zu erhalten, ist zu beachten, dass die Wege JR, RE, KP, PF nicht in der Luft, sondern in

Glas zurückgelegt sind. Bezeichnen wir den Brechungsexponent des Glases mit n, so verhält sich die Anzahl der Wellen auf der Längeneinheit in Glas zu der in Luft wie $n : 1$; der in Glas zurückgelegte Weg enthält also soviel Wellen wie der $n$fache in der Luft zurückgelegte Weg. Wir müssen somit, um den Unterschied in Wellenlängen zu erhalten, die im Glas zurückgelegten Wege mit n multipliciren. Die Phasendifferenz wird demnach, wenn wir zugleich beachten, dass $RE = JR$ und $KP = PF$,

$$\Delta = JK + 2n \,.\, KP + FN - 2n\, JR - EG$$

und legen wir $KM \parallel AC$, so dass $EM = JK$,

$$\Delta = 2n\, KP + FN - 2n\, JR - MG.$$

Bezeichnen wir nun die Dicke der Platten mit d, den Einfallswinkel an der ersten Platte mit i, an der zweiten mit i', den Brechungswinkel in der ersten Platte mit r, in der zweiten mit r' und den Winkel MKG mit α, so erhalten wir zunächst

$$KP = \frac{d}{\cos r'},\; JR = \frac{d}{\cos r}.$$

Zur Bestimmung von MG haben wir in dem Dreieck MGK

$$MG : KM = \sin MKG : \sin MGK.$$

Darin ist

$$KM = JE = 2d \,.\, \operatorname{tang} r,\; MKG = \alpha$$

$$MGK = EMK - MKG = CEM - MKG = 90 - i - \alpha,$$

somit wird

$$MG = 2d \,.\, \operatorname{tang} r \frac{\sin \alpha}{\cos (i + \alpha)}.$$

Für FN haben wir zunächst

$$FN = FG \,.\, \cos NFG = FG \,.\, \sin i'$$

$$FG = GK - FK = GK - 2d \,.\, \operatorname{tang} r'.$$

Den Werth von GK erhalten wir wieder aus dem Dreieck GKM

$$GK = 2d \,.\, \operatorname{tang} r \frac{\cos i}{\cos (i + \alpha)}$$

und damit

$$FN = 2d \left\{ \operatorname{tang} r \frac{\cos i}{\cos (i + \alpha)} - \operatorname{tang} r' \right\} \sin i'.$$

Darnach wird dann Δ

$$\Delta = 2d \left\{ n\left(\frac{1}{\cos r'} - \frac{1}{\cos r}\right) + \operatorname{tang} r \frac{\cos i \sin i'}{\cos (i + \alpha)} - \operatorname{tang} r' \sin i' - \operatorname{tang} r \frac{\sin \alpha}{\cos (i + \alpha)} \right\}$$

$$\Delta = 2d \left\{ n\left(\frac{1}{\cos r'} - \frac{1}{\cos r}\right) + \frac{\sin r}{\cos r} \cdot \frac{\cos i \,.\, \sin i' - \sin \alpha}{\cos (i + \alpha)} - \frac{\sin r' \,.\, \sin i'}{\cos r'} \right\}.$$

Wenn nun, wie wir bisher angenommen, die Einfallsebenen beider Flächen zusammenfallen, ist $i' = i + \alpha$, wo dann α den Neigungswinkel der beiden Platten bedeutet. Das mittelste Glied der Klammer können wir dann schreiben

$$\frac{\sin r}{\cos r} \cdot \frac{\cos i \sin (i+\alpha) - \sin \alpha}{\cos (i+\alpha)} = \frac{\cos i \cdot \sin i \cdot \cos \alpha + \cos^2 i \sin \alpha - \sin \alpha}{\cos (i+\alpha)} \cdot \frac{\sin r}{\cos r}$$

$$\frac{\sin r}{\cos r} \cdot \frac{\sin i (\cos i \cos \alpha - \sin i \sin \alpha)}{\cos (i+\alpha)} = \frac{\sin r}{\cos r} \cdot \sin i.$$

Damit wird dann $\varDelta$

$$\varDelta = 2d \left\{ \frac{n - \sin r' . \sin i'}{\cos r'} - \frac{n - \sin r \sin i}{\cos r} \right\}.$$

Beachten wir nun, dass

$$\sin r = \frac{\sin i}{n}, \quad \cos r = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - \sin^2 i}$$

und dass dieselbe Beziehung zwischen r' und i' besteht, so erhält man leicht schliesslich

$$\varDelta = 2d \cdot \left\{ \sqrt{n^2 - \sin^2 i'} - \sqrt{n^2 - \sin^2 i} \right\}.$$

Die Phasendifferenz der aus einem einfallenden Strahl sich ergebenden Strahlen hängt also ausser von der Dicke der Platten von dem Einfallswinkel des Strahls an der ersten und zweiten Platte und mit dem letztern von dem Neigungswinkel der Platten ab. Für einen Strahl LX ist sie also eine ganz andere als für den Strahl LA.

Wir haben bisher vorausgesetzt, dass die Einfallsebenen beider Strahlen zusammenfallen. Wenn indess, wie wir annahmen, von einer ausgedehnten Lichtquelle Licht auf die erste Platte fällt, so ist das nicht für alle Strahlen der Fall. Ein Strahl LA z. B., für den der Punkt L vor der Ebene der Zeichnung liegt, würde so reflectirt, dass der Punkt K hinter der Ebene der Zeichnung liegt; da E, der Punkt, wo der an der Hinterfläche reflectirte Strahl die Platte verlässt, dann ebenfalls hinter der Ebene der Zeichnung liegt, so ist der Punkt G noch weiter hinter die Ebene der Zeichnung verschoben, und KG würde von vorn nach hinten gegen die Einfallsebene geneigt sein. Da nun aber die Einfallslothe der beiden Flächen nicht parallel sind, fällt dann die Einfallsebene an der zweiten Fläche nicht mit der Ebene $JKGE$ zusammen, der Punkt F rückt weniger weit hinter die Ebene der Zeichnung, so dass KF mit KG einen gewissen Winkel β bildet. Auch dann führt die Berechnung der Phasendifferenz zwischen den beiden aus einem einfallenden entstehenden Strahlen zu genau demselben Ausdruck, den wir oben ableiteten. Wenn man sich die Lage der Ebenen im Raume construirt, sind die Rechnungen nicht schwierig; wir übergehen sie hier als zu weitläufig, da wir aus dem Bisherigen bereits das Verständniss der Erscheinung erhalten können [1]).

Gerade so nämlich, wie jeder einfallende Strahl in zwei zerlegt wird, deren Phasendifferenz die soeben berechnete ist, so pflanzen sich in der Richtung jedes austretenden Strahles zwei fort, welche die soeben bestimmte

1) Man sehe *Ketteler,* Farbenzerstreuung der Gase. Bonn 1865.

Phasendifferenz haben, und welche die erste Platte in benachbarten Punkten treffen. Man erkennt das sofort, wenn man sich in Fig. 119 die eben als zweite Platte betrachtete als erste denkt, und TF resp. $T'G$ als einfallende Strahlen annimmt. Es pflanzt sich dann in der Richtung AL der Theil des Strahles $T'G$ fort, der in der ersten Platte an der vordern, in der zweiten an der hintern Fläche reflectirt ist, von TF der in der ersten Platte an der hintern, in der zweiten an der vordern Fläche reflectirte Theil. Gleiches gilt von allen Strahlen LX, welche die zweite Fläche verlassen. Denken wir uns deshalb in L ein Auge, so wird das in jeder Richtung LX die aus der Phasendifferenz der in der betreffenden Richtung gleichzeitig sich fortpflanzenden Wellen resultirende Intensität wahrnehmen. Da nun bei gegebenem Neigungswinkel der Platten die Phasendifferenz von den Winkeln i und i' abhängt, so müssen sich helle und dunkle Streifen zeigen. Die Gestalt dieser Streifen ist, wenn man sie vollständig verfolgt, eine ziemlich verwickelte [1]); wenn man aber das Auge in der Ebene der beiden Einfallslothe hält, und dann, wie es meist geschieht, nur einen kleinen Theil des ganzen Systems übersieht, so erscheinen dieselben als geradlinige Streifen, welche parallel sind der Schnittlinie der beiden Platten. Stehen also die Flächen beider Platten vertical, und ist die zweite Platte um eine verticale Axe gegen die erste gedreht, so sind die Streifen vertical; steht die erste Platte vertical und ist die zweite um eine horizontale Axe gegen die erste geneigt, so sind die Streifen horizontal. Man sieht also je nach der Neigung der Platten das Spiegelbild der Lichtquelle von horizontalen oder verticalen Interferenzstreifen durchsetzt.

Ein wesentlicher Umstand dieser Methode, Interferenzen hervorzurufen, ist der, dass die interferirenden Strahlen zwischen den beiden Platten in einem ziemlich weiten Abstande sich von einander befinden. Dieser Abstand ist

$$ES = EJ \,.\, \sin EJS = 2d \operatorname{tang} r \,.\, \cos i,$$

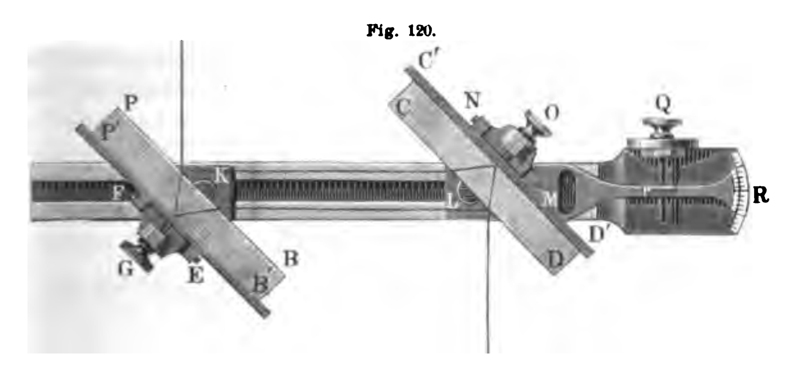
er ist also proportional der Dicke der Platten. Gerade dieser Umstand macht diese Methode zu manchen Untersuchungen besonders brauchbar, indem man die interferirenden Strahlen durch verschiedene Medien gehen lässt, und die Phasendifferenz misst, welche den Strahlen auf diesen Wegen ertheilt wird. Dieselbe gibt sich durch eine Verschiebung der Interferenzstreifen zu erkennen. Erhalten z. B. die Strahlen auf den verschiedenen Wegen die Differenz einer halben Wellenlänge, so treten an Stelle der vorher hellen Streifen jetzt dunkle und umgekehrt, und der Effect ist, dass das ganze beobachtete System um den halben Abstand der dunklen Streifen verschoben erscheint. Wird dann durch irgend eine Manipulation die Phasendifferenz stetig vergrössert, so werden die Streifen immer weiter verschoben, ist die Differenz eine ganze Wellenlänge, so ist das System um den ganzen Abstand der dunklen Streifen verschoben, indem jetzt wieder an derselben Stelle die Streifen erscheinen und so fort.

---

1) *Ketteler* a. a. O.

Die Form, welche Jamin dem zu solchen Untersuchungen dienenden Apparate, dem Interferentialrefractor gab [1]), zeigt Fig. 120. Auf einer mit

Fig. 120.



Schienen versehenen eisernen Fussplatte sind die beiden Platten PB und CD aufgestellt, so dass man dieselben beliebig einander nähern oder von einander entfernen kann. Die Platten sind mit ihren hintern Flächen auf geschwärzten Messingplatten befestigt. Die erste wird fest so aufgestellt, dass ihre Ebene senkrecht zur Verschiebungsebene der Platten und um 45^0 gegen die Axe des Instruments geneigt ist. Sie ist um eine horizontale Axe drehbar, und die Schraube G dient dazu, sie genau aufzustellen. Die zweite Platte CD ist um eine horizontale Axe NM durch die Schraube O und um eine verticale Axe L drehbar, so dass man sie in jede beliebige kleine Neigung gegen die erste Platte bringen kann. Die Bewegung um die Axe L geschieht mit der Schraube Q, welche auf die mit der Platte CD fest verbundene Alhidade MR einwirkt. Man beobachtet die entstehenden Interferenzstreifen dann mit einer Lupe, welche mit einem Fadenkreuz versehen ist, an welchem man einen bestimmten Streifen einstellt.

Jamin hat diesen Apparat unter andern benutzt, um den Brechungsexponenten von Wasser in verschiedener Temperatur mit einander zu vergleichen [2]). Zwischen die beiden Spiegel wurden genau gleich lange Röhren, deren Länge L gemessen wurde, gelegt, so dass der eine der interferirenden Strahlen durch die eine, der andere durch die andere Röhre hindurchging. Beide Röhren wurden zunächst mit Wasser von 0^0 gefüllt, und das Fadenkreuz der Lupe auf einen Streifen eingestellt. Dann wurde die eine der Röhren erwärmt und die Verschiebung der Streifen beobachtet. Trat bei einer bestimmten Temperaturdifferenz eine Verschiebung um μ Streifenbreiten ein, und ist die Wellenlänge des angewandten Lichtes in der Luft gleich l, so ist die in Folge der Temperaturdifferenz eingetretene Phasendifferenz gleich $\mu \, . \, l$.

1) *Jamin,* Cours de physique. T. III. p. 544. Duboscq in Paris verfertigt die Apparate in dieser Form.

2) *Jamin,* Comptes Rendus. XLIII. p. 1191. Poggend. Annal. Bd. C.

Ist nun die Wellenlänge des Lichtes im kalten Wasser λ_1, im warmen Wasser λ_2, so ist die Anzahl der auf die Länge der Röhre kommenden Wellen im kalten Wasser $\frac{L}{\lambda_1}$, im warmen Wasser $\frac{L}{\lambda_2}$, und die Differenz dieser Zahlen ist gleich der Anzahl der verschobenen Streifen oder

$$L\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = \mu.$$

Multipliciren wir auf beiden Seiten mit l, so wird

$$L\left(\frac{l}{\lambda_1} - \frac{l}{\lambda_2}\right) = \mu\, l.$$

Wie wir sahen, ist $\frac{l}{\lambda_1}$, der Brechungsexponent des Wassers von 0°, gleich n_0, $\frac{l}{\lambda_2}$, der des warmen, gleich n, somit wird

$$n = n_0 - \frac{\mu\, l}{L}.$$

Auf diese Weise erhielt Jamin den früher angegebenen Werth von n

$$n = n_0 - 0{,}000\,012\,573\, t - 0{,}000\,001\,929\, t^2.$$

Ebenso hat Jamin nach dieser Methode die Brechungsexponenten des Wassers unter gewöhnlichem und verstärktem Drucke verglichen. Sind die Brechungsexponenten des Wassers bei dem Drucke einer Atmosphäre n', bei verstärktem Drucke n, und ist die Dichtigkeit des Wassers im ersten Falle 1, im zweiten d, so fand er

$$\frac{n^2 - 1}{d} = n'^2 - 1,$$

also das specifische Brechungsvermögen im Sinne der Emissionstheorie constant. Ist μ der Compressionscoefficient des Wassers für eine Atmosphäre, so ist bei einem Drucke von P Atmosphären

$$d = 1 + \mu\,.\,P.$$

Er konnte deshalb aus der Gleichung

$$\frac{n^2 - 1}{n'^2 - 1} = 1 + \mu\, P$$

den Werth von μ berechnen, und erhielt so den von Grassi gefundenen Werth[1]).

Dieselbe Methode benutzte Ketteler zu seinen §. 27 mitgetheilten Versuchen über die Brechungsexponenten der Gase. In die eine der zwei Röhren wurde Gas unter dem Drucke einer Atmosphäre gefüllt und in die andere dasselbe Gas unter grösserem oder geringerem Drucke. Nachdem nun zunächst constatirt war, dass für Gase die Beziehung

$$\frac{n - 1}{d} = \text{const.}$$

1) *Jamin*, Comptes Rendus. XLV. p. 892.

besteht, wie wir bereits §. 27 erwähnten, berechnete er aus den Beobachtungen zunächst den Brechungsexponenten beim Uebergange des Lichtes aus Luft von der Dichtigkeit der Atmosphäre in Luft von der Dichtigkeit d und aus diesen dann in der p. 154 angegebenen Weise den absoluten Brechungsexponenten. Die von Ketteler erhaltenen Resultate haben wir §. 27 mitgetheilt.

§. 60.

Interferenz bei grossen Gangunterschieden. Bei allen den bisher besprochenen Interferenzerscheinungen haben wir die Interferenzen immer nur bei einem Gangunterschiede der interferirenden Strahlen von einer geringen Anzahl Wellenlängen wahrgenommen; bei den Farben dünner Blättchen zeigen sich die Newton'schen Ringe nur in begrenzter Zahl, und in einiger Entfernung von der dunklen Mitte im reflectirten Licht verschwinden auch bei Anwendung von fast homogenem Lichte die Ringe und machen einer gleichmässigen Beleuchtung Platz. Bei den Newton'schen Ringen verlangt aber unser Ausdruck für die Lichtstärke

$$A^2 = 4a^2 r^2 . \sin^2 \frac{\Delta \cos r}{\lambda} \cdot 2\pi$$

bei homogenem Lichte die Periodicität der Erscheinung, welches auch der Werth von Δ sei. Aehnlich ist es in allen Fällen.

Der Grund dieser scheinbaren Abweichung der Erscheinung von den Forderungen der Undulationstheorie liegt darin, dass im Allgemeinen auch das homogenste Licht, welches wir zu derartigen Versuchen benutzen, nicht aus Licht von in der That nur einer Wellenlänge besteht; es ist vielmehr zusammengesetzt aus Wellen, deren Länge zwischen λ und $d\lambda$ liegen, worin zwar der Werth von $d\lambda$ sehr klein, aber nicht gleich 0 werden kann. Ist nun bei den Newton'schen Ringen z. B. Δ gleich einem nur kleinen Vielfachen von $^1/_4\ \lambda$, so ist es auch noch ein Vielfaches von $^1/_4\ (\lambda + d\lambda)$. Die Wellen gleicher Farbe werden sich also alle noch gleichzeitig stärken und schwächen. Wird aber $\Delta = m \cdot \frac{\lambda}{4}$, worin m einen grossen Werth hat, so erhält auch $m \cdot \frac{d\lambda}{4}$ einen merklichen Werth und es wird die Dicke ein anderes Vielfaches von $\frac{\lambda + d\lambda}{4}$, oder

$$\Delta = m\,\frac{\lambda}{4} = n\,\frac{\lambda + d\lambda}{4},$$

worin m eine andere Zahl ist als n. Dabei tritt dann auch der Fall ein, dass wenn m eine gerade Zahl, n eine ungerade wird, so dass die Wellen von der Länge λ an der Stelle sich schwächen, wo die von der Länge $\lambda + d\lambda$ sich verstärken; an nebenliegenden Stellen tritt das Umgekehrte ein, so dass an allen Stellen unter den Strahlen, die auf das Auge den gleichen Eindruck machen, solche sind, welche das Maximum der Intensität haben; deshalb müssen die hellen und dunklen Ringe aufhören.

Ist diese Erklärung richtig, so muss man z. B. bei dem Fresnel'schen Spiegelversuch die Interferenzen wieder sichtbar machen können, wenn man eine Stelle neben den Streifen, wo sie in Folge des eben bemerkten Umstandes aufhören sichtbar zu sein, mit dem Prisma betrachtet. In dem von dem Prisma entworfenen Spectrum müssen alle die Farben, für welche die Wegedifferenz an der betrachteten Stelle ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge ist, verschwunden sein; es muss deshalb an der betreffenden Stelle eine, den Fraunhofer'schen Linien ähnliche, dunkle Linie auftreten, welche sich von den eigentlichen Fraunhofer'schen Linien dadurch unterscheidet, dass von der Mitte der dunklen Linie die Helligkeit nach beiden Seiten allmählich zunimmt.

In der That haben Fizeau und Foucault [1]) auf diese Weise nachweisen können, dass die Interferenzen noch bei einer Phasendifferenz von 4000 Wellenlängen des blauen Lichtes stattfinden. Sie erzeugten zu dem Ende die Interferenzstreifen auf einem Schirm, der einen schmalen Spalt hatte, und dirigirten sie zunächst so, dass der mittlere weisse Streifen auf den Spalt fiel. Darauf wurde der eine der beiden Spiegel mit einer Mikrometerschraube in der Richtung seiner Normale vorwärts geschoben, aber so, dass seine Ebene der ursprünglichen Lage immer parallel blieb. Da auf diese Weise der Weg der von diesem Spiegel reflectirten Wellen kürzer wurde, so wurden die Streifen dadurch verschoben, und je weiter der Spiegel vorgeschoben wurde, ein um so weiter von der Mitte entfernter Theil des Interferenzbildes fiel auf den Spalt. Indem man dann an einer bestimmten Stelle des Spectrums, z. B. im Roth beobachtete, wie oft ein Interferenzstreifen auftrat und verschwand, konnte man die Phasendifferenz, welche ein bestimmtes Mal den Streifen hervorrief, erhalten. Wenn der Streifen zum ersten Male auftritt, ist die Phasendifferenz eine halbe Wellenlänge, beim zweiten Auftreten $^3/_2$, beim $n$ten $\frac{2n+1}{2}\lambda$.

Bei dem nächstfolgenden Interferenzstreifen im Spectrum gegen die brechbare Seite hin ist dann die Phasendifferenz, da die Wellenlänge dort kleiner ist, um eine Wellenlänge grösser und so bei jedem folgenden Streifen, so dass wenn zwischen zwei bestimmten Streifen p andere liegen, die Phasendifferenz des mit der kleinern Wellenlänge p Wellenlängen mehr beträgt, als des Streifens mit der grössern Wellenlänge. Diese Bemerkung gestattet auch direkt, wenn die Wellenlänge der beiden Streifen bekannt ist, aus der Zählung der zwischenliegenden Streifen die Phasendifferenz zu bestimmen. Nennen wir die Wegedifferenz zu dem Punkte des Interferenzbildes, welches gerade auf den Spalt fällt, d, die grössere Wellenlänge λ, die kleinere λ', so ist für beide Streifen die Phasendifferenz in Wellenlängen

---

1) *Fizeau* und *Foucault*, Ann. de chim. et de phys. III. Sér. T. XXVI. Poggend. Annal. Ergänzungsband II.

$$\frac{d}{\lambda} = m + \frac{1}{2}; \quad \frac{d}{\lambda'} = n + \frac{1}{2},$$

da die Wegedifferenz jedenfalls einer ungeraden Anzahl von halben Wellenlängen gleich sein muss. Die eben gemachte Bemerkung liefert dann weiter die Beziehung

$$n - m = p.$$

Aus diesen Gleichungen folgt unmittelbar

$$m = p \frac{\lambda'}{\lambda - \lambda'} - \frac{1}{2}; \quad n = p \frac{\lambda}{\lambda - \lambda'} - \frac{1}{2}.$$

Man kann daraus auch direkt die Wegedifferenz d und aus dieser dann die Wellenlänge an andern Linien des Spectrums bestimmen.

Noch in anderer Weise hat Fizeau [1]) gezeigt, dass bei einer Phasendifferenz von 50000 Wellenlängen noch die Interferenzen ganz ungestört auftreten. Wir haben im §. 41 gezeigt, dass eine Alkoholflamme, deren Docht mit Kochsalz eingerieben ist, oder welche von verbrennendem Alkohol geliefert wird, welche Kochsalz aufgelöst enthält, die sogenannte Brewster'sche Lampe nur Licht von der Wellenlänge der Doppellinie D, also von zwei ganz bestimmten Wellenlängen aussendet, die nur sehr wenig von einander verschieden sind. Ruft man daher mit einer solchen Lichtquelle das Phänomen der Newton'schen Ringe hervor, so müssen dieselben noch bei sehr grossen Dicken der Schicht auftreten, sie können erst dann verschwinden, wenn die Dicke der Schicht Δ so gross geworden ist, dass

$$\Delta = m \frac{\lambda}{4} = (m + 1) \frac{\lambda'}{4}$$

wird, wenn wir mit λ die Wellenlänge der weniger brechbaren, mit λ' die der brechbarern der beiden Linien bezeichnen. Denn erst dann fallen die Maxima der einen mit den Minimis der andern Welle zusammen. Wenn man aber dann die Dicke der Schicht noch weiter vergrössert, so müssen, da wir hier in der That nur zwei Wellen haben, die Maxima und Minima der einzelnen Wellen wieder neben einander fallen, es müssen wieder Ringe auftreten, welche wieder dieselbe Schärfe haben müssen als bei geringer Dicke, also aus scharfen hellen und dunkeln Streifen bestehen müssen, wenn

$$\Delta_1 = 2m \frac{\lambda}{4} = 2 (m + 1) \frac{\lambda'}{4}$$

wird, denn dann fallen wieder die Minima beider Wellen auf genau dieselbe Stelle. Bei einer weitern Vergrösserung der Dicke der Schicht müssen die Streifen wieder allmählich mehr verwaschen werden und ist

$$\Delta_2 = 3m \frac{\lambda}{4} = 3 (m + 1) \frac{\lambda'}{4},$$

wieder verschwunden sein u. s. f.

---

1) *Fizeau*, Ann. de chim. et de phys. III. Sér. T. LXVI. Poggend. Annal. Bd. CXIX.

Fizeau stellte nun zwischen einer ebenen Platte und einer schwach convexen Linse, welche mit einer Mikrometerschraube parallel der Axe der Linse von der ebenen Platte entfernt werden konnte, mit Hülfe der Natronflamme Newton'sche Ringe her. Indem er durch eine Lupe auf die Vorrichtung hinsah, konnte er die ganze Fläche der Linse übersehen, und beobachtete, wenn er zunächst Linse und Platte sich berühren liess, die ganze Fläche der Linse mit Kreisen von grösster Schärfe bedeckt. Dreht man nun die Mikrometerschraube so, dass sich die Linse von der Platte entfernt, so ziehen sich die Ringe zusammen, bewegen sich gegen die Mitte hin, verschwinden dort, während vom Rande her immer neue Ringe auftreten, ein Verhalten, welches sich unmittelbar aus der Theorie der Ringe ergibt. Versieht man die Lupe mit einem Fadenkreuz, oder bringt man auf der Linse ein Merkzeichen an, so kann man die Anzahl der vorübergegangenen Streifen zählen. Jedem vorübergegangenen Streifen entspricht dann eine Vergrösserung des Abstandes von Linse und Platte von einer halben Wellenlänge. Vergrössert man nun den Abstand stetig, so fangen die Streifen, nachdem gegen 400 vorübergegangen, an undeutlich zu werden, gegen 500 verschwinden sie fast gänzlich, gegen 600 werden sie wieder deutlich, und wenn etwa 1000 vorübergegangen sind, werden sie wieder mit voller Schärfe sichtbar. Die Erscheinung wiederholte sich in dieser Weise, bis etwa 10000 Ringe vorübergegangen, dann wurden die Interferenzen undeutlich und es liessen sich keine weitern Ringe zählen, ein Beweis, dass die so hergestellte Natronflamme noch nicht lediglich die angenommenen beiden Wellen aussendet, sondern auch noch geringe Mengen anderer mit wenig verschiedenen Wellenlängen. Viel weiter gelang es das Phänomen zu verfolgen mit einer Flamme, welche ein Gemisch von vier Theilen rectificirten käuflichen Methylalkohols mit einem Theil absoluten Alkohols lieferte. Die geringe Menge des in beiden vorhandenen Kochsalzes färbte bei der niedrigen Temperatur die Flamme rein gelb, so dass nur die Wellen λ und λ' darin auftraten, und man konnte so 52 Reihen deutlicher Ringe vorübergehen lassen, ohne dass die Interferenzen aufhörten.

Die Vergrösserung des Abstandes von einem vollen Verschwinden bis zum nächstfolgenden betrug nach mehrfachen Messungen $0^{mm},28945$. Diese Vergrösserung ist mit den vorhin gewählten Zeichen

$$\Delta_2 - \Delta = 2m\,\frac{\lambda}{4},$$

somit

$$m = \frac{2\,(\Delta_2 - \Delta)}{\lambda} = \frac{2\,.\,0,28945}{0,000588} = 983.$$

Der 52. Periode entspricht also eine Differenz von mehr als 50000 Wellenlängen. Für das Verhältniss der beiden Wellenlängen ergibt sich daraus

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{m+1}{m} = 1,00002.$$

Ganz ebenso gelang es Fizeau diese Interferenzstreifen bei Anwendung von Platten fester Körper, wie Glas, Krystalle etc. zu beobachten. Sind solche

Platten auch möglichst eben und parallel geschnitten, so sind doch an einzelnen Stellen immer kleine Unebenheiten vorhanden. Betrachtet man nun solche Platten bei Beleuchtung mit der zuletzt erwähnten Flamme, indem man senkrecht auf dieselbe herabsieht, so sieht man selbst bei Dicken, die nahe ein Centimeter betragen, an diesen Stellen Streifen oder Ringe auftreten, welche je nach der Form der Flächen verschiedene Gestalt haben. Fast stets kann man an einzelnen Stellen geradlinige Streifen wahrnehmen, ein Beweis, dass dort die Platten schwach prismatisch sind.

Diese Beobachtung hat Fizeau in den Stand gesetzt, die äusserst geringen Aenderungen in dem Brechungsvermögen der festen Körper messend zu verfolgen. Man erzeugt bei einer bestimmten Temperatur in einer solchen Platte die Streifen, und versieht die Platte an der Stelle eines Streifens mit einer Marke. Man erwärmt dann die Platte bis zu einer andern höhern Temperatur, und beobachtet die Anzahl Streifen, welche an der Marke vorübergehen. Kennt man dann die Dicke der Platte und den Brechungsexponenten bei der ersten Temperatur, ferner den Ausdehnungscoefficienten der Platte, so kann man aus der Zahl der vorübergegangenen Streifen die Aenderung des Brechungsexponenten bestimmen. Ist die Dicke der Platte gleich E, der Brechungsexponent bei der niedrigern Temperatur gleich n, die Wellenlänge des Lichtes in Luft gleich λ, somit diejenige im Glase gleich $\frac{\lambda}{n}$, so ist nach der Theorie der Newton'schen Ringe an der Stelle, wo wir einen bestimmten dunklen Streifen sehen,

$$E = (2m + 1)\frac{\lambda}{4n}$$

$$4n\,E = (2m + 1)\,\lambda.$$

Wird nun die Platte um t^0 erwärmt, so wird die Dicke der Platte dadurch $E\,(1 + \alpha\,t)$, wenn wir mit α den Ausdehnungscoefficienten der Platte bezeichnen. Ist der Brechungsexponent der Platte dann n' geworden, somit die Wellenlänge in der Platte gleich $\frac{\lambda}{n'}$, so wird, wenn in Folge der Erwärmung f Streifen an der Platte vorübergegangen sind, jetzt

$$4n'\,E\,(1 + \alpha\,t) = (2m + 2f + 1)\,\lambda.$$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$f = \frac{2n'\,E\,(1 + \alpha\,t) - 2n\,E}{\lambda}$$

und weiter

$$n' = \frac{2n\,E + f\,.\,\lambda}{2E\,(1 + \alpha\,t)}.$$

Würde sich der Brechungsexponent nicht ändern, also $n = n'$ sein, so würde die Anzahl der verschobenen Streifen sein müssen

$$f' = \frac{2n\,E\,.\,\alpha\,t}{\lambda}$$

und aus dieser und der Gleichung für f ergibt sich

$$n' - n = \frac{\lambda (f - f')}{2E(1 + \alpha t)}.$$

Für eine Spiegelglasplatte von St. Gobain, deren Dicke $E = 6^{mm},8175$, n bei 18° C. gleich 1,5033 und $\alpha = 0,000008613$ für jeden Grad Temperaturerhöhung war, fand Fizeau für eine Temperaturerhöhung von 38°,82 C. $f = 13,1$. Für f' findet sich aus obigen Angaben $f' = 11,64$. Daraus folgt

$$n' - n = 0,000063$$

oder der Brechungsexponent für gelbes Licht wird mit steigender Temperatur grösser, und zwar, wenn die Temperatur um 38°,82 C. wächst, um sechs Einheiten auf der fünften Decimale. Für eine Temperaturerhöhung von 100° C. folgt daraus

$$(n' - n)_{100} = 0,000162.$$

Für andere Substanzen erhielt Fizeau folgende Werthe:

Anderes Glas von St. Gobain $(n' - n)_{100}$ =	0,0000997
Kronglas (Zinkglas von Maïs)	0,0000000
Flussspath, parallel den Spaltungsfl. geschn. .	0,00136
Flintglas, gewöhnliches	0,00026
Flintglas, schweres	0,000687.

Bei festen Körpern nehmen also die Brechungsexponenten mit steigender Temperatur nicht, wie bei Flüssigkeiten stetig ab, sondern zum Theil sogar zu, ein neuer Beweis, dass die §. 25 besprochene Annahme von Hoek, aus der sich die Constanz des specifischen Brechungsvermögens im Sinne der Emissionstheorie auch nach den Grundsätzen der Undulationstheorie ergab, nicht begründet ist.

Ein weiteres Mittel, um Interferenzen bei grossen Gangunterschieden zu erzeugen, ist zuerst von Talbot angewandt[1]), und später von Esselbach benutzt worden, um die Wellenlängen der ultravioletten Strahlen zu messen[2]). Schiebt man ein Spectrum im Fernrohr betrachtend eine dünne Platte einer durchsichtigen Substanz, etwa ein mikroskopisches Deckgläschen, von der violetten Seite her zwischen Ocular und Auge, bis es die halbe Pupille verdeckt, so sieht man das Spectrum mit Interferenzstreifen bedeckt, in ganz ähnlicher Weise wie bei der ersten Methode von Fizeau und Foucault. Am bequemsten ist es, wenn man das Gläschen vor dem Ocular befestigt, so dass dasselbe zur Hälfte bedeckt ist. Man sieht die Interferenzen auch dann schon.

1) *Talbot*, Philosophical Magazine. Die Theorie dieser Linien nebst Erklärung des Umstandes, dass man bei Betrachtung des Spectrums durch ein Fernrohr die Linien nicht erhält, wenn man das Blättchen von Seite des Rothen vorschiebt, gibt *Airy*, Poggend. Annal. Bd. LIII und LVIII. Man sehe auch den I. Anhang von *Esselbach* in der unten citirten Abhandlung und *Stefan*, Poggend. Annal. Bd. CXXII, der eine Reihe Modificationen des Versuches angibt, bei denen man die Streifen sieht.

2) *Esselbach*, Poggend. Annal. Bd. XCVIII.

wenn man durch ein Prisma direkt auf eine feine Lichtlinie hinsieht und dann das Blättchen vor das Auge hinschiebt.

Diese Streifen entstehen dadurch, dass von den Strahlen gleicher Wellenlänge, welche auf der Retina in einem Punkte vereinigt werden, die eine Hälfte durch das Gläschen, die andere durch Luft gegangen ist. Ist der Brechungsexponent des Glases n, die Wellenlänge einer bestimmten Farbe in Luft gleich λ, so ist die Wellenlänge im Glase gleich $\frac{\lambda}{n}$. Ist nun die Dicke der Glasplatte gleich d, so ist die Phasendifferenz der durch Glas und Luft gegangenen Strahlen

$$\varDelta = n\frac{d}{\lambda} - \frac{d}{\lambda} = \frac{d}{\lambda}(n-1).$$

Mit dieser Phasendifferenz treffen somit die Strahlen auf der Retina zusammen, diejenigen Stellen des Spectrums, für welche dieselbe ein ungerades Vielfaches einer ganzen Wellenlänge ist, müssen somit ausgelöscht werden, es müssen dort dunkle Streifen entstehen. Bei einer Dicke der Platte von etwa $0^{mm},2$ sieht man so im Spectrum gegen 100 Interferenzstreifen.

Geht man von einem Streifen zu dem nächstfolgenden nach der brechbarern Seite über, so ist die Phasendifferenz um eine ganze Wellenlänge gewachsen, gerade so, wie bei den Versuchen von Fizeau und Foucault. Denn ist für eine bestimmte Wellenlänge $\frac{d}{\lambda}(n-1)$ gleich einem ungeraden Vielfachen einer halben Wellenlänge, so wächst mit abnehmendem λ die Phasendifferenz, hat dann aber λ soweit abgenommen, dass jener Ausdruck um den Werth 2 grösser geworden, so löschen sich die Wellen wieder aus, es tritt also wieder ein dunkler Streifen auf. Liegt also zwischen zwei beobachteten Streifen eine Anzahl p Streifen, so ist die Phasendifferenz des zweiten um p Wellenlängen grösser. Man kann demnach nach dieser Methode, wenn zwei Wellenlängen im Spectrum bekannt sind, die übrigen bestimmen.

Diese Methode ist, wie Esselbach hervorhebt, zur Messung der Wellenlängen im Ultravioletten ganz ausgezeichnet. Wenn man nämlich zur Erzeugung des Spectrums Quarzprismen und Quarzlinsen anwendet, und alles fremde Licht abblendet, so kann man das ultraviolette Licht direkt sehen, ohne eine fluorescirende Substanz zu Hülfe zu nehmen. Wendet man dann als dünnes Blättchen ebenfalls eine dünne senkrecht zur krystallographischen Axe geschliffene Quarzplatte an, die von Esselbach benutzte hatte eine Dicke von $0^{mm},195$, so kann man die Interferenzstreifen und mit ihnen die Fraunhofer'schen bis zur dunklen Linie R deutlich sehen. Esselbach setzte bei seinen Versuchen die von Fraunhofer für C und H gegebenen Wellenlängen als bekannt voraus, berechnete aus diesen, den direkt gemessenen Brechungsexponenten für die senkrecht zur Axe durch den Quarz gehenden Strahlen und der Anzahl p der zwischen C und H liegenden Streifen den Werth von d, und dann mit diesem die Werthe der übrigen Wellenlängen. Die Art der Berech-

nung ist folgende. Für einen bei C liegenden dunklen Streifen ist, wenn λ_1 die Wellenlänge von C bedeutet,

$$\frac{d}{\lambda_1}(n_1 - 1) = r + \frac{1}{2}.$$

Für einen bei H liegenden, wenn λ_2 und n_2 Wellenlänge und Brechungsexponenten von H sind,

$$\frac{d}{\lambda_2}(n_2 - 1) = s + \frac{1}{2}.$$

Da nun $s - r = p$, so folgt

$$d = \frac{p}{\frac{n_2 - 1}{\lambda_2} - \frac{n_1 - 1}{\lambda_1}}.$$

Für irgend einen Streifen nun, zwischen dem und C q Streifen liegen, dessen Wellenlänge und Brechungsexponent λ und n ist, haben wir ebenso

$$d = \frac{q}{\frac{n - 1}{\lambda} - \frac{n_1 - 1}{\lambda_1}},$$

woraus

$$\lambda = \frac{n - 1}{\frac{n_1 - 1}{\lambda_1} + \frac{q}{d}} = \frac{(n - 1)\, p}{(p - q)\frac{n_1 - 1}{\lambda_1} + q\,\frac{n_2 - 1}{\lambda_2}}.$$

Die von Esselbach so erhaltenen Resultate werden wir in §. 67 mit den übrigen Messungen zusammenstellen.

§. 61.

Wrede's Theorie der Absorption des Lichtes. Eine interessante Anwendung der im §. 58 entwickelten Sätze über die Interferenz der Strahlen in den durchgelassenen Ringen ist die Theorie der Absorption des Lichtes, welche Baron Wrede aufgestellt hat[1]), besonders um die eigenthümlichen Absorptionserscheinungen aus der Undulationstheorie abzuleiten, welche Brewster beim untersalpetersauren Gase und beim Joddampfe beobachtet hat, und welche dieser für unvereinbar mit der Undulationstheorie hielt. Wrede geht dabei von der Hypothese aus, das Licht werde beim Durchgange durch die Körper in deren Innerm an den Atomen theilweise reflectirt, ehe es aus dem Körper austritt, in ganz ähnlicher Weise, wie an den beiden Grenzen der Schicht bei den Farben dünner Blättchen. Es entsteht somit im Innern eine unendliche Menge von Wellensystemen, und an jeder Stelle der zweiten Grenzfläche treten in der Richtung des austretenden Lichtes eine unendliche Anzahl von Strahlen hervor. Die austretenden Strahlen sind aber verschiedener Phase. Denken wir uns z. B., um die Sache leicht zu übersehen, ein solcher Körper bestehe aus einer Anzahl von n Schichten parallel gelagerter Atome, und der Abstand dieser Schichten sei gleich d. Ein Lichtstrahl, we

1) *Wrede*, Poggend. Annal. Bd. XXXIII.

cher an der vordern Fläche unserer durchsichtigen Platte ankommt, wird dort zum Theil reflectirt, zum Theil dringt er in das Innere ein und pflanzt sich zur zweiten Schicht fort. Dort tritt eine zweite Theilung ein, ein Theil pflanzt sich zur dritten Schicht fort, ein Theil wird reflectirt, und kehrt zur ersten Schicht zurück, dort wieder zum Theil reflectirt, pflanzt sich auch ein Theil dieses Strahles zur dritten Schicht fort. An dieser wird dann ein Theil des ersten Strahles reflectirt, ein Theil geht zur vierten Schicht; der reflectirte Antheil wird an der zweiten Schicht nochmals reflectirt und geht dann durch die dritte Schicht theilweise zur vierten Schicht. Man sieht, wenn wir so fortfahren, dass aus der untern Grenze des durchsichtigen Körpers zunächst ein Theil des einfallenden Lichtes austritt, der keine innere Reflexion erfahren hat. Ferner aber wird eine Gruppe von Strahlen austreten, welche im Innern zweimal reflectirt ist, da von dem an der zweiten und ersten Schicht, an der dritten und zweiten, an der vierten und dritten Schicht etc., zurück und dann wieder in der Richtung des durchgehenden Lichtes reflectirten Antheile wieder ein Theil die folgenden Schichten durchsetzt, ohne reflectirt zu werden. Die Strahlen dieses Antheiles haben einen Weg $2d$ mehr zurückgelegt als das direkt durchgehende Licht. Zu diesen beiden Lichtmengen kommen dann noch eine unendliche Zahl anderer, welche noch mehr Reflexionen erfahren haben. Das zwischen den beiden ersten Schichten hin- und hergesandte Licht erfährt an der zweiten Schicht eine neue Theilung; ein Theil wird nochmals hin- und hergeworfen und dringt dann theilweise ohne weitere Reflexion durch die Platte hindurch, der andere Theil erfährt an der dritten Schicht eine neue Theilung, indem er partiell zur zweiten Schicht und dann wieder theilweise von dieser zurückgeworfen wird, und dann nach vielfachen weitern Theilungen zum Theil ohne neue Reflexion austritt. Aehnliche Strahlen entstehen in allen folgenden Schichten, dieselben sind viermal reflectirt und haben einen um $4d$ weitern Weg als das direkt durchgehende Licht zurückgelegt.

Weiter entstehen Strahlen, die nach

6facher	Reflexion	mit	einer	Wegedifferenz		$6d$
8	„	„	„	„		$8d$
$2n$	„	„	„	„		$2nd$

austreten.

Die Intensität dieser Wellensysteme nimmt mit den vielfachen Reflexionen ab, so dass die beiden ersten die hellsten sind. Die Reflexionen geschehen alle an den Atomschichten, sie sind somit alle gleichartig, es kann also durch diese keine Phasendifferenz oder nur eine Phasendifferenz von ganzen Wellenlängen entstehen, da nur solche Wellensysteme austreten, welche $2, 4 \ldots 2n$ mal reflectirt sind, also, wenn durch die Reflexionen Verluste an Wellenlängen eintreten, immer eine gerade Anzahl von halben Wellenlängen verloren haben.

Die Phasendifferenzen, mit welchen die Lichtstrahlen austreten, sind daher gleich den Wegedifferenzen.

Betrachten wir nun zunächst die beiden ersten Wellensysteme, deren Wegedifferenz $2d$ ist, so sieht man, dass für alle Lichtstrahlen, deren Wellenlänge derart ist, dass

$$d = \frac{\lambda}{4};\quad 3\,\frac{\lambda}{4};\quad 5\,\frac{\lambda}{4}\,\ldots$$

die Phasendifferenz eine halbe Wellenlänge ist, da für diese

$$2d = \frac{\lambda}{2};\quad 3\,\frac{\lambda}{2};\quad 5\,\frac{\lambda}{2}\,\ldots$$

ist. Gleiches gilt für alle folgenden Systeme, denn das dritte und vierte, ebenso das fünfte und sechste haben eine Wegedifferenz $2d$. Für Lichtstrahlen von den angegebenen Wellenlängen schwächen sich also je zwei dieser Systeme am meisten, die resultirende Lichtstärke aller Systeme muss daher ein Minimum sein, das Licht dieser Wellenlängen wird absorbirt.

Ist dagegen für Lichtstrahlen anderer Art

$$d = 2\,\frac{\lambda}{4};\quad 4\,\frac{\lambda}{4};\quad 6\,\frac{\lambda}{4}\,\ldots$$

so ist die Phasendifferenz der beiden ersten Systeme

$$2d = 2\,\frac{\lambda}{2};\quad 4\,\frac{\lambda}{2};\quad 6\,\frac{\lambda}{2}$$

und ebenso aller Systeme eine gerade Anzahl von halben Wellenlängen. Alle Systeme von Lichtwellen dieser Arten verstärken sich somit, sie treten im Maximum der Intensität aus, sie werden nicht absorbirt.

Untersucht man nun die durch die Platte hindurchgegangenen Lichtmengen mittels des Prisma, so müssen in dem Spectrum derselben die Strahlen der ersten Arten fehlen.

Für das diffus zurückgeworfene Licht gelten natürlich ganz ähnliche Schlüsse, und man sieht, wie in demselben eben das Licht absorbirt sein muss, als im durchgegangenen, da hier nur solches Licht interferirt, welches $1, 3, 5, \ldots 2n - 1$ mal an den Atomschichten reflectirt ist, und den Abstand d der Schichten entweder gar nicht oder zweimal oder viermal etc. durchlaufen hat.

Wrede hat nun in der That den Nachweis geliefert, dass bei passender Annahme der Entfernungen d sich die verschiedenen Absorptionserscheinungen, die natürlichen Farben der Körper, sowie die verschiedenen Grade der Durchsichtigkeit ableiten lassen. Er hat ferner gezeigt, dass die eigenthümlichsten Absorptionserscheinungen sich herleiten lassen, wenn man annimmt, dass zugleich Schichten in verschiedenen Abständen in den absorbirenden Mitteln vorhanden sind; so die dunklen Linien im Jodgas durch die Annahme, dass in demselben Schichten vorhanden sind, deren Entfernungen d gleich der

halben und andere, deren Abstände d' gleich der 75fachen Wellenlänge des rothen Lichtes sind. Das Spectrum des durch oxalsaures Chromoxyd-Kali hindurchgegangenen Lichtes wird ebenfalls durch zwei Gruppen von Schichten erklärt, deren Abstände sind $d = \frac{1}{2} \lambda_r$ und $d' = 5 \lambda_r$.

Es gelang Wrede selbst auf künstlichem Wege seiner Theorie gemäss die eigenthümlichsten Absorptionserscheinungen herzustellen. Er bog ein dünnes Glimmerblatt so, dass es einen aufrechtstehenden Cylinder bildete, und liess das Licht einer Kerzenflamme von demselben reflectiren. Die feine im reflectirten Licht entstehende Lichtlinie untersuchte er mit dem Prisma. Ist die Dicke des Glimmerblättchens nicht kleiner als $0^{mm},025$, so erscheint das reflectirte Licht, welches die Summe des an der vordern und hintern Fläche reflectirten ist, weiss; mit dem Prisma untersucht zeigt es aber eine Reihe von schwarzen Streifen, die um so zahlreicher sind, je grösser d ist. Mit zwei Glimmerblättchen verschiedener Dicke, und indem er auf das zweite das vom ersten reflectirte Licht fallen liess, erzeugte er Spectra, die den Brewster'schen des Jodgases ganz ähnlich waren.

So vollständig indess die Theorie des Baron Wrede die Erscheinungen der Absorption auch zu erklären scheint, eine Thatsache widerspricht ihr, wie Stokes[1]) und schon Rudberg[2]) bemerkte, auf das entschiedenste und gibt der Theorie von Stokes den Vorzug. Bei dem Durchgange des Lichtes durch einen durchsichtigen Körper wird alles Licht geschwächt, es geht in der That Licht verloren, es wird eine gewisse Quantität von Bewegung zurückgehalten. Das dürfte nach der Theorie von Wrede nicht der Fall sein. Denn durch Interferenz geht in der That niemals ein Antheil der Lichtbewegung verloren, durch diese tritt nur eine andere Vertheilung der Lichtintensitäten ein. Wird durch Interferenz die Bewegung des Aethers an einer Stelle geschwächt, so wird sie dafür an einer andern verstärkt, die lebendige Kraft der resultirenden Bewegung ist immer gleich derjenigen der Theilbewegungen. Es scheint daher berechtigt zu sein, die Theorie von Wrede gegenüber der Stokes'schen fallen zu lassen, besonders da diese, wie wir sahen, Stokes in den Stand setzte, die wichtigste neuere Entdeckung in der Optik, die Kirchhoff'schen Beobachtungen, vorauszusagen.

Es bleibt indess Wrede's unleugbares Verdienst, zuerst die Möglichkeit gezeigt zu haben, jene räthselhaften Erscheinungen der Absorption in Gasen aus der Undulationstheorie zu erklären, in denen Brewster den unüberwindlichsten Einwurf gegen dieselbe erblickte.

1) *Stokes*, Poggend. Annal. Ergänzungsband IV.

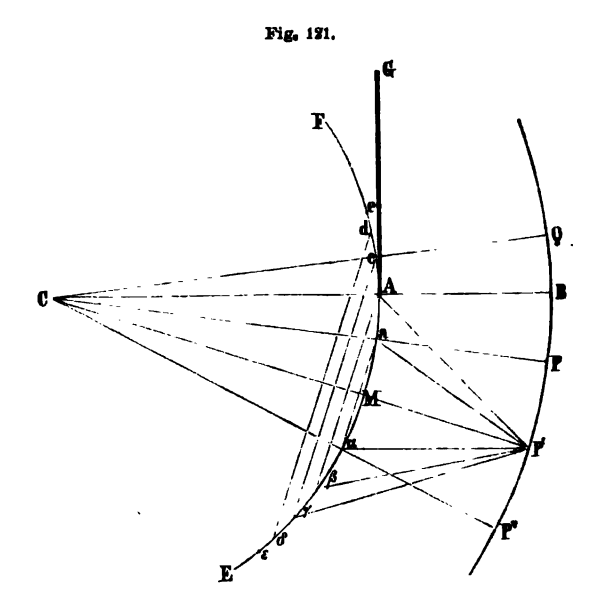
2) Ebendort Anmerkung von Poggendorff zu Stokes' Einwürfen gegen Wrede. Man sehe auch *Wüllner*, Die Absorption des Lichtes in isotropen Medien. Marburg 1862.

§. 62.

Beugung des Lichtes[1]). Bei der Darstellung der Principien der Wellenbewegung haben wir den Nachweis geliefert, dass bei ungestörter Ausbreitung eine Wellenbewegung in einem isotropen Punktsystem sich auf den Radien einer Kugel fortpflanzen muss, deren Mittelpunkt der Ursprung der Wellenbewegung ist. Die geradlinige Ausbreitung hat ihren Grund darin, dass die von den verschiedensten Punkten einer Welle nach dem Huyghen'schen Princip zu einem ausserhalb derselben liegenden Punkte sich fortpflanzenden Wellenbewegungen durch Interferenz sich so aufheben, dass nur die Bewegung übrig bleibt, welche von dem Elemente der ursprünglichen Welle ausgeht, das auf dem Radius liegt, der den Mittelpunkt der Welle mit dem ausserhalb liegenden Punkte verbindet.

Ist C (Fig. 121) der Mittelpunkt einer Welle FAE, so ist die Bewegung in den Punkten P, P', P'' einer abgeleiteten Welle überall gleichmässig so, als hätte sich die Bewegung in der Richtung CAB, CaP, CMP' .. von FAE

Fig. 121.



aus zur abgeleiteten Welle fortgepflanzt, als wäre nur von dem unmittelbar um A, a .. liegenden Elemente der primären Welle Bewegung nach B, P .. übertragen.

Denn denken wir uns die primäre Welle z. B. von einem Punkte M aus in einzelne Zonen zerlegt, so dass die von dem Zonenrande $\alpha\alpha$ nach P

1) *Fresnel*, Mémoire sur la diffraction de la lumière. Mémoires de l'Acad. franç. Tome V. Poggend. Annal. Bd. XXX. Oeuvres complètes. T. I.

gezogenen Geraden um eine halbe Wellenlänge grösser sind als MP', und ebenso dass

$$\beta P' \text{ oder } AP' = \alpha P' + {}^1/_2\, \lambda$$

und weiter $\gamma P'$ oder cP' gleich $\beta P' + {}^1/_2 \lambda$ ist u. s. f., so haben alle Elementarwellen, welche von einer Zone $\alpha\beta$ nach P' gelangen, eine Phasendifferenz von einer halben Wellenlänge gegen die Wellen der vorhergehenden Zone αa und der nachfolgenden Zone $\beta\gamma Ac$. Da nun die Grösse der Zone $\alpha\beta aA$ gleich ist der halben Summe der Zone αa und $\beta\gamma Ac$, somit von ihr halb soviel Wellen nach P' gelangen als von jenen beiden zusammen, so wird die von dieser Zone nach P gelangende Wellenbewegung zerstört durch die halbe Summe der von αa und von $\beta\gamma Ac$ nach P' gelangenden Wellen. Gleiches gilt von allen übrigen weiter von M entfernten Zonen; es werden vernichtet die Bewegungen, welche ausgehen:

von $\alpha\beta aA$ durch die halbe Summe derjenigen von αa und $\beta\gamma Ac$
„ $\gamma\delta cd$ „ „ „ „ „ „ $\beta\gamma Ac$ und $\delta\varepsilon de$

und so, wenn die Welle unbegrenzt ist, bis ins Unendliche fort, so dass nur die von der halben um M liegenden Zone αa nach P' gelangende Bewegung in der That übrig bleibt.

Damit also die Bewegung sich geradlinig fortpflanze, ist nöthig, dass dieselbe sich ungestört fortpflanze, denn nur dann treten diese Interferenzen auf. Wird aber die Fortpflanzung der Welle gestört, wird ein Theil durch einen vorgestellten, für die Wellenbewegung undurchdringlichen Schirm AG aufgehalten, so muss auch in der Bewegung der abgeleiteten Welle eine Störung eintreten, die Bewegung der Punkte B, P, P', .. zu denen sich der eine Theil der Welle ungestört ausbreiten kann, muss eine andere werden, als wenn die ganze Welle sich ungehindert ausbreiten kann.

Betrachten wir z. B. die Bewegung des Punktes P'. Dadurch, dass der Schirm AG ungefähr die Hälften aller Zonen von der dritten $\beta\gamma Ac$ an gerechnet auffängt, wird bewirkt, dass die Bewegung, welche von der Zone $\alpha\beta aA$ ausgeht, nicht zur Hälfte von der folgenden Zone geschwächt wird, während die Bewegung der folgenden alle nahe zur Hälfte fortgenommenen Zonen gerade so sich aufhebt wie früher. Der übrigbleibende Theil der zweiten Zone wird daher mehr als die halbe Zone αa compensiren, oder die Bewegung P' muss schwächer sein wie vorhin. Beschränken wir zur deutlichern Uebersicht unsere Deduction auf den in der Abbildung gezeichneten Durchschnitt durch die Wellen, so sieht man die Bewegung, welche ausgeht von den Bögen

$\alpha\beta$, wird vernichtet durch die halbe Summe $M\alpha + \beta\gamma$
$\gamma\delta$, „ „ „ „ „ „ $\beta\gamma + \delta\varepsilon$;

und so nach dieser Seite ins Unendliche fort. Dagegen wird von dem Bogen aA kein Theil durch einen folgenden compensirt, da von A an die Welle an der Fortpflanzung gehindert wird. Jede von aA nach P' gelangende Wellenbewegung hat aber gegen die von Ma dorthin kommenden Bewegungen

die Phasendifferenz einer halben Wellenlänge. Da nun die Bögen $M\alpha$ und aA merklich gleiche Grösse haben, so hebt sich die Wirkung der Bögen $M\alpha$ und aA auf P' ganz auf. Während also bei ungehinderter Verbreitung der Wellen die Bewegung in P' durch die Hälfte der von $a\alpha$ ausgehenden Bewegung bestimmt ist, wird sie jetzt nur durch die Hälfte von $M\alpha$ oder $^1/_4\, a\alpha$ erregt, sie muss also schwächer sein als bei ungestörter Ausbreitung. Anders verhält es sich bei P, welches auf dem Radius Ca liegt.

Haben jetzt die Punkte A, c, d; M, α, β die Lage, dass

$$AP - aP = cP - AP = MP - aP = \alpha P - MP \cdots\cdots = {}^1/_2\, \lambda$$

ist, so sind jetzt nach der einen Seite von a alle Zonen ausser der ersten fortgenommen. An der untern Seite von a interferiren die von den verschiedenen Bögen ausgehenden Bewegungen gerade wie bei ungestörter Verbreitung der Wellen, es bleibt also in P die Hälfte der von aM ausgehenden Bewegung. Die von dem Bogen aA ausgehende Bewegung wird, da von A an die ganze Welle aufgefangen ist, gar nicht gestört, dieselbe erregt den Punkt P vollständig. In diesem Falle wird also die Bewegung des Punktes P durch $aA + {}^1/_2\, aM$ oder $^3/_4\, MA$ veranlasst, sie ist stärker als bei P' und auch stärker, als wenn die Welle sich ungestört verbreitet hätte.

Nach P'' gelangt, wie man auf ähnliche Weise findet, bei ungehinderter Ausbreitung der Welle nur Bewegung von $^1/_2\, M\beta$, nach Vorsetzung des Schirmes AG aber von

$$^1/_2\, M\beta + {}^1/_2\, \alpha A$$

und da die von αA ausgehenden Wellen mit den von $M\beta$ ausgehenden eine Phasendifferenz von einer ganzen Wellenlänge haben, so wird die Bewegung in P'' wieder stärker sein, als wenn der Schirm nicht da wäre.

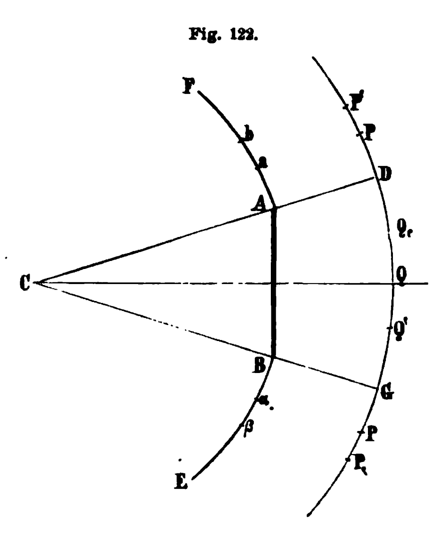
Bei weiterer Ausführung findet man allgemein, dass von B an die Bewegungen auf der abgeleiteten Welle bald stärker bald schwächer werden, dass sie von B an gerechnet erst wachsen bis zu einem Maximum, dann abnehmen bis zu einem Minimum bei P', wieder wachsen bis zu einem Maximum u. s. f. Die Maxima werden aber schwächer, je weiter man sich von B entfernt, weil die Neigungen der verstärkenden gegen die direkten Strahlen immer stärker werden. In einem gewissen Abstande von B hören sie daher auf bemerkbar zu sein.

Auch auf der andern Seite von B, z. B. bei Q, wohin nach Vorsetzung des Schirmes direkt keine Bewegung sich fortpflanzt, gelangt von dem unterhalb A liegenden Theile der Welle Bewegung, welche jetzt nicht durch Interferenz vernichtet wird, wie es der Fall sein würde, wenn der Schirm AG nicht vorgestellt wäre. Diese Bewegung zeigt jedoch keine Maxima und Minima, sondern von B an eine stetige Abnahme.

Man sieht leicht, dass von dem halben Bogen Aa, der jedoch für die verschiedenen Punkte Q verschiedene Werthe hat, Bewegung dorthin gelangt, welche immer schwächer wird, weil die Neigung der Strahlen immer stärker wird.

Anders verhält sich jedoch die Bewegung hinter dem Schirme, wenn derselbe nur schmal ist und so nur einen schmalen Theil aus der primären Welle ausschneidet, also an beiden Seiten Bewegung fortgepflanzt wird. Ist AB ein solcher Schirm, den wir uns als einen kleinen Kreis denken wollen, und der aus der Welle $FABE$ ein Stück fortnimmt, so wird die Bewegung in G, P, $P_{,}$, ferner in D, P, P', also ausserhalb des Raumes, für welchen der Schirm AB die direkt fortgepflanzte Bewegung fortnimmt, dieselbe sein wie in dem vorigen Falle. In den Raum DG gelangen aber jetzt Bewegungen von der halben Zone Aa, welche eine von D nach G abnehmende Bewegung hervorbringt, und von der halben Zone $B\alpha$, welche eine von G nach D abnehmende Bewegung erzeugt. Die Bewegung irgend eines Punktes Q' hinter dem Schirme muss daher die Resultirende aus diesen beiden dorthin gelangenden Bewegungen sein. Da nun die Phase der von den beiden Bogen ausgehenden Bewegung dieselbe und zwar nahezu eines von ihrer Mitte ausgehenden Strahles sein wird, so hängt die Resultirende aus beiden nur ab von der Wegedifferenz, mit welcher die Bewegungen zusammentreffen. In der Mitte des Raumes Q haben beide gleiche Strecken zurückgelegt, dort werden sich daher die Bewegungen stets summiren. Von der Mitte an nach beiden Seiten nehmen die Wege verschiedene Werthe an, und in einem gewissen Abstande bei Q' oder $Q_{,}$ wird die Differenz derselben gerade eine halbe Wellenlänge sein, die Bewegung wird ein Minimum sein.

Fig. 122.

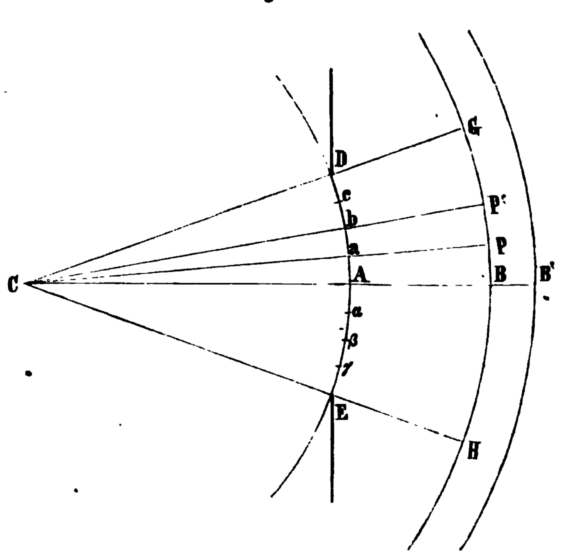


Bei andern Punkten wird die Wegedifferenz gleich λ, $^3/_2\lambda$, 2λ etc. sein; dort muss sich also die Bewegung abwechselnd stärken oder schwächen. Im Innern des Raumes, für welchen der Schirm AB die direkte Bewegung aufhält, muss demnach die Bewegung von der Mitte Q an abwechselnd ein Minimum und ein Maximum werden.

Noch ein dritter Fall der Störung ist möglich, der nämlich, dass wir nicht nur vor die eine Hälfte der primären Welle einen Schirm AG setzen, sondern auch vor die andere und zwischen den Schirmen nur einem kleinen Theile der Welle den Durchgang gestatten. In diesem Falle müssen ebenfalls in dem Raume, welcher direkt Bewegung erhält und in denen, für welche die direkte Bewegung durch die Schirme fortgenommen wird, Maxima und Minima auftreten, die Gruppirung derselben ist aber verwickelter als in dem vorigen Falle.

Die Mitte B Fig. 123 des Raumes, welcher direkte Bewegung erhält, kann je nach ihrem Abstande von DE ein Maximum oder Minimum der Bewegung zeigen, und dem entsprechend können daneben erst Minima dann

Fig. 123.



Maxima, oder umgekehrt erst Maxima dann Minima auftreten. Ist die durch DE dringende Welle in Bezug auf B wie früher getheilt, und sind bei dieser Theilung $2n$ Zonen (in der Zeichnung 4) entstanden, so wird die zweite von der halben ersten und halben dritten, die vierte aber von dem Reste der dritten nur ungefähr zur Hälfte aufgehoben. Nun ist die Phasendifferenz der ersten und vierten Zone in B $^3/_2\lambda$, die Bewegung in B also die Differenz der von der ersten und der vierten Zone nach B gelangenden Bewegung; dieselbe ist also ein Minimum. Für P findet man dann nach beiden Seiten, dass die Bewegung ein Maximum wird, bei P' wieder ein Minimum und so über G und H hinaus mit allmählicher Abnahme der Lichtstärke und der Unterschiede zwischen Minimis und Maximis.

Für weiter von A entfernte Punkte B' stellt sich die Sache anders. Je weiter B' rückt, um so weiter rücken auf DE die Punkte α, a; β, b; ... auseinander, für welche die Wegedifferenz $aB' - AB' = bB' - aB'$ gleich einer halben Wellenlänge wird. Es werden daher bei einer Theilung der Welle DE in der vorhin angewandten Weise für B' weniger Zonen entstehen. Es seien für B' gerade $2n - 1$, in unserer Zeichnung also drei Zonen. Dann würde die Wirkung der 2, 4, 6 durch die halbe Summe der ersten und dritten, dritten und fünften, fünften und siebenten vernichtet, also die halbe erste und halbe $(2n - 1)$ übrigbleiben. Die Phasendifferenz beider ist in B' eine gerade Anzahl halber Wellenlängen, die resultirende Bewegung also

die Summe der von beiden Zonen ausgehenden Bewegungen. In B' entsteht also ein Maximum der Bewegung, daneben dann ein Minimum, weiter ein Maximum u. s. f.

In der Entfernung AB' haben also gegen AB die Maxima und Minima ihre Stellen vertauscht; die Lage der Maxima und Minima hängt also wesentlich ab von der Entfernung AB des betrachteten Punktes von der Oeffnung. Sie hängt aber noch in einer andern Weise davon ab, denn überdies werden auch die Entfernungen der Maxima und Minima von einander andere. Letzteres findet auch in den frühern beiden Fällen statt, und eine genauere mathematische Betrachtung, welche die Lage der einzelnen Maxima und Minima kennen lehrt, zeigt, dass dieselben in verschiedenen Entfernungen von dem aufhaltenden Schirme auf Hyperbeln liegen müssen.

§. 63.

Fresnel'sche Beugungserscheinungen. Wenden wir die vorigen Betrachtungen auf das Licht an, so fordert die Undulationstheorie, dass an den Rändern des Schattens eines in einen Lichtkegel gestellten Schirmes Aenderungen der Beleuchtung sich zeigen müssen und zwar abwechselnde Maxima und Minima der Helligkeit, es müssen bei Anwendung homogenen Lichtes helle und dunkle Streifen parallel dem Rande des geometrischen Schattens auftreten. Denn unsere Deduction, welche wir nur auf einen Horizontaldurchschnitt durch die Welle beschränkten, gilt ebenso für alle ähnlichen Durchschnitte, und die in dem betrachteten Falle auftretenden hellen und dunklen Stellen müssen sich zu hellen und dunklen Streifen zusammenfügen, welche der Begrenzung des schattengebenden Körpers parallel sind.

Diese Erscheinungen lassen sich leicht beobachten; zuerst wurden sie beobachtet von dem Pater Grimaldi [1]) zu Bologna, er fand, dass, wenn ein schmaler undurchsichtiger Körper in den Lichtkegel gestellt wurde, welchen man durch eine sehr kleine Oeffnung in ein finsteres Zimmer treten liess, sein Schatten bedeutend grösser war als seine geometrische Projection, so dass das Licht eine Abweichung von seinem geradlinigen Laufe erlitt, wenn es am Rande des Körpers vorbeiging. Bei genauerer Untersuchung fand er, dass der Schatten von drei regenbogenfarbigen Fransen eingefasst war, welche dem Rande des Schattens parallel und von denen die dem Schatten zunächst liegenden am hellsten und breitesten waren.

Die ausführlichsten Untersuchungen verdanken wir dem französischen Physiker Fresnel [2]), der in einer musterhaften theoretischen Untersuchung die Lage der einzelnen Maxima und Minima der Lichtstärke für Licht ver-

1) *Grimaldi*, Physico Mathesis de Lumine. Bologna 1665.

2) *Fresnel*, Mémoire sur la diffraction de la lumière. Mémoires de l'Acad. franç. Tome V. Poggend. Annal. Bd. XXX.

schiedener Wellenlänge berechnete und durch genaue Messungen die vollkommene Uebereinstimmung der Theorie und Erfahrung nachwies.

Den Gang der theoretischen Untersuchung können wir nur in grossen Zügen andeuten. Ist A Fig. 124 ein leuchtender Punkt, von dem eine Welle ausgeht, welche durch den Schirm MN zum Theil aufgehalten wird, so können wir die Welle im Momente, in welchem sie die Ebene des Schirmes MS passirt, als den Ausgangspunkt der Lichtbewegung betrachten, welche zu irgend einem Punkte B diesseits des Schirmes gelangt. Die von einem bei F liegenden Elemente do der Welle nach B gesandte Bewegung ist dann, wenn wir do so klein voraussetzen, dass die Verbindungslinien seiner Punkte mit B alle gegen das Element gleich geneigt sind, der Grösse des Elements proportional; wir erhalten deshalb für die Bewegung zur Zeit t bei B

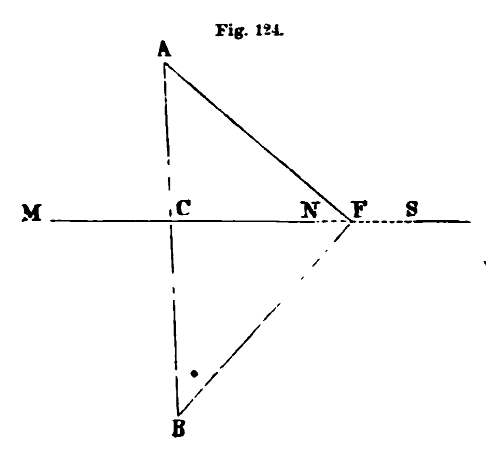


Fig. 124.

$$y = kdo \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{AF + BF}{\lambda}\right),$$

worin k die Amplitude bedeutet, welche die Flächeneinheit der Welle in MS bei B erregen würde. Setzen wir nun

$$AF = AC + \varDelta, \quad BF = BC + \varDelta',$$

so wird

$$y = kdo \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{AB}{\lambda} - \frac{\varDelta + \varDelta'}{\lambda}\right)$$

oder

$$y = kdo \cdot \cos 2\pi \frac{\varDelta + \varDelta'}{\lambda} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{AB}{\lambda}\right)$$
$$- kdo \cdot \sin 2\pi \frac{\varDelta + \varDelta'}{\lambda} \cdot \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{AB}{\lambda}\right).$$

Um nun die Lichtbewegung im Punkte B, welche von der ganzen übrigbleibenden Welle erregt wird, zu erhalten, haben wir den entsprechenden Ausdruck für jedes Element der Oeffnung zu bilden und dann alle diese Ausdrücke zu summiren. Wir können diese Summe schreiben:

$$Y = \left(\int kdo \cdot \cos 2\pi \frac{\varDelta + \varDelta'}{\lambda}\right) \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{AB}{\lambda}\right)$$
$$- \left(\int kdo \cdot \sin 2\pi \frac{\varDelta + \varDelta'}{\lambda}\right) \cdot \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{AB}{\lambda}\right).$$

Die Bewegung im Punkte B können wir hiernach auffassen als die Resultirende zweier im Punkte B zusammentreffender Wellen, deren Amplitude durch die

in Klammern eingeschlossenen Factoren auf der rechten Seite gegeben ist, und deren Phasendifferenz, da

$$-\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{AB}{\lambda}\right)=\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{AB}{\lambda}-{}^1/_4\right)$$

ist, eine Viertel Wellenlänge beträgt. Die resultirende Intensität ist aber, wie wir früher nachgewiesen haben, bei der Interferenz solcher Wellen gleich der Quadratsumme der Amplituden. Wir erhalten somit für dieselbe

$$J=\left(\int kdo\,.\cos 2\pi\frac{\Delta+\Delta'}{\lambda}\right)^2+\left(\int kdo\,.\sin 2\pi\frac{\Delta+\Delta'}{\lambda}\right)^2.$$

Der Werth dieser Summen hängt für einen bestimmten Punkt B ab von der Ausdehnung und Gestalt des übrigbleibenden Wellenstückes, bei gegebener Welle von der Lage des Punktes B, denn mit der Lage desselben ändert sich sowohl Δ als Δ'.

Eine Darstellung dieser Summe in geschlossener Form ist nicht möglich. Fresnel berechnete deshalb für die hauptsächlichsten Fälle die numerischen Werthe dieser Summe, und zeigte, dass je nach der Lage des Punktes B der Werth von J zwischen Minimis und Maximis hin und herschwankt, somit dass im Allgemeinen helle und dunkle Streifen auftreten müssen. Indem er die Lage der dunklen Streifen berechnete und sie dann durch den Versuch bestimmte, konnte er die Uebereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung nachweisen.

Um die Erscheinungen zu erhalten, leitet man mittels des Heliostaten in ein dunkles Zimmer ein Bündel Sonnenstrahlen und stellt in dieses eine Linse kurzer Brennweite, um in dem kleinen im Brennpunkte der Linse gebildeten Sonnenbildchen einen leuchtenden Punkt zu erhalten. In den von diesem ausgehenden Lichtkegel stellt man dann in einiger Entfernung, etwa zwei Meter, einen weissen Schirm, auf dem dann eine runde beleuchtete Fläche entsteht. Bringt man dann zwischen den Lichtpunkt und den Schirm, etwa in die Mitte, einen undurchsichtigen Körper, der vielleicht die Hälfte der beleuchteten Fläche verdunkelt, so sieht man der Grenze des Schattens parallel, also wenn diese Grenze eine verticale Linie ist, eine Anzahl verticaler farbiger Streifen, deren Färbung derjenigen der Newton'schen Ringe analog ist. Wenn man durch ein vorgehaltenes möglichst homogenes Glas das Licht färbt, so werden die Streifen einfach hell und dunkel; der Abstand der hellen und dunklen Streifen ändert sich aber je nach der Farbe des vorgehaltenen Glases, er ist am grössten, wenn das Glas roth, am kleinsten, wenn es violett ist. Die Farben im weissen Licht rühren also daher, dass die Maxima und Minima der verschiedenen Farben an verschiedenen Stellen auftreten. Das dem Schatten am nächsten liegende Maximum ist das des violetten Lichtes, das am weitesten entfernte das des rothen; die Streifen sind daher an dem dem Schatten zugewandten Rande violett oder blau, an dem abgewandten roth gesäumt.

Innerhalb des Schattens nimmt man keine Streifen wahr, man erkennt jedoch, dass er nicht lichtlos ist, sondern dass auch in den Schatten Licht hineingebeugt ist, welches sehr rasch an Intensität abnimmt, wenn man sich von dem Rande des Schattens nach dem Innern entfernt.

Zur Messung der Lage der dunklen Streifen ist die bereits §. 56 erwähnte Diffractionsbank von Duboscq ganz vorzüglich geeignet. Anstatt der Fresnel'schen Spiegel setzt man zwischen Lichtlinie und Lupe den Schirm, der einen Theil der Welle auffängt, oder einen dünnen Draht, oder Schirme mit verschiedenen Oeffnungen, wie sie von Duboscq zu diesem Apparate geliefert werden. Man beobachtet dann die Lage der dunklen Streifen ganz in derselben Weise wie bei dem Fresnel'schen Spiegelversuch.

Um eine genauere Einsicht in die Erscheinung zu geben, folgt hier eine Reihe von Fresnel's Messungen der dunklen Streifen, bei Anwendung eines rothen Lichtes, dessen Wellenlänge nach dem Versuche mit zwei geneigten Spiegeln gleich $0^{mm},000638$ war, zugleich mit den Werthen, welche die Rechnung nach einer weitern Ausführung der im Vorigen angedeuteten Theorie ergab.

Abstand des schattenwerfenden Körpers vom		Ordnung des dunklen Streifens	Abstand des dunklen Streifens vom Rande des geometr. Schattens		Unterschied zwischen Beobachtung und Rechnung
leuchtenden Punkte	Schirme		Berechnet	Beobachtet	
Meter	Meter		Millimeter	Millimeter	
		1	0,92	0,92	0,00
		2	1,35	1,34	— 0,01
	0,502	3	1,68	1,66	— 0,02
		4	1,93	1,93	0,00
		5	2,15	2,16	+ 0,01
		1	1,49	1,49	0,00
		2	2,18	2,18	0,00
1,011	0,996	3	2,70	2,69	— 0,01
		4	3,12	3,13	+ 0,01
		5	3,51	3,51	0,00
		1	2,59	2,59	0,00
		2	3,79	3,79	0,00
	2,010	3	4,68	4,69	+ 0,01
		4	5,45	5,45	0,00
		5	6,10	6,11	+ 0,01

Der erste dunkle Streifen entspricht dem Punkte P' Fig. 121. Man sieht, mit welcher Genauigkeit Rechnung und Beobachtung einander entsprechen.

Ebenso genaue Uebereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung zeigt sich bei den Fresnel'schen Messungen der Beugungserscheinungen der zweiten Art. Wendet man anstatt des Schirmes in dem vorigen Versuche einen dünnen geraden Draht an, den man vertical und der Schirmebene parallel hält, so sieht man auf dem Schirme ausser den Streifen am Rande des Schattens auch deren im Innern desselben. In der Mitte des Schattens erscheint immer ein scharfbegrenzter heller Streifen, an seinen beiden Seiten zwei dunkle, dann wieder helle; und es gelingt leicht, an jeder Seite des mittlern hellen Streifens mit homogenem Lichte noch zwei helle Streifen zu erhalten. Der schattenwerfende Körper muss recht dünn genommen werden, wegen der grossen Kleinheit der Lichtwellen.

Ein eigenthümlicher Fall dieser Beugungserscheinungen ist der, dass man als schattengebenden Körper einen kleinen kreisrunden Schirm anwendet. Die Helligkeit in der Mitte des Schattens muss dann genau dieselbe sein, als wenn das Licht ganz ohne Schirm dorthin gelangt sei. Man übersieht das leicht mit Hülfe der Entwicklungen des vorigen Paragraphen. Wir sahen, dass die an den Schirm grenzende letzte halbe Zone Licht in den Schatten sendet; bei einem kreisrunden Schirme, der aus der kugelförmigen Lichtwelle ein Stück herausschneidet, sendet nun in der That diese halbe Zone ihr Licht vollständig in den Schatten. Die Grösse der Zonen bei der von uns angenommenen Theilung der Welle ist nun merklich gleich, also die Grösse dieser halben gleich derjenigen der halben Centralzone, welche ohne Schirm die Mitte des Schattens beleuchten würde. Ist nun der Schirm klein genug, so dass die Neigung der Strahlen nicht zu gross ist, dann muss die Mitte des Schattens ebensoviel Licht erhalten, als wenn der Schirm nicht da wäre. Um den Versuch anzustellen, klebt man ein konisch zugedrehtes Metallscheibchen mit ein wenig Wachs auf eine von genau parallelen Wänden begrenzte ebene Platte ganz reinen streifenlosen Glases und stellt dasselbe anstatt des Drahtes in den erwähnten Lichtkegel.

Um die Beugungserscheinungen durch eine enge Oeffnung zu erhalten, ersetzt man den Draht bei den vorigen Versuchen durch eine enge Spalte. Man kann sich dieselbe, um den Einfluss der Weite der Oeffnung zugleich kennen zu lernen, leicht aus zwei Metallstreifen herstellen, die man auf einem Stativ verschiebbar so neben einander befestigt, dass zwischen ihnen nur eine schmale Spalte bleibt. Um überhaupt nur die Erscheinungen wahrzunehmen, genügt es, auf eine Glasplatte ein Staniolblättchen zu kleben und in dieses mit einem Messer oder einer Nadel einen Spalt zu ritzen. Man sieht dann bei Anwendung homogenen Lichtes eine Anzahl heller und dunkler, bei Anwendung weissen Lichtes dagegen eine Anzahl farbiger Streifen in dem Raume, welcher durch den Spalt Licht erhält, und an beiden Seiten in dem Schatten der

Schirme. Bei einer vorsichtigen Aenderung des Abstandes von Schirm und Spalte kann man sich von der Umkehr der Maxima und Minima überzeugen. So fand Fresnel bei einer Breite der Spaltöffnung von $1^{mm},5$ und einem Abstande derselben von der Lichtquelle von $2^{m},010$ die Mitte hell, wenn der Schirm $0^{m},492$ von der Spaltöffnung entfernt war und das erste Minimum in einem Abstande von $0^{mm},42$ von der Mitte. Dagegen war die Mitte dunkel, als der Schirm $0^{m},276$ von der Spaltöffnung entfernt war. Die Wellenlänge des zu diesen Versuchen angewandten Lichtes war wie bei den frühern $0^{mm},000638$.

Bei diesen Versuchen ist die Benutzung einer kleinen kreisförmigen Oeffnung ebenso interessant als die eines kreisförmigen Schirmes in dem vorigen.

Ein Punkt B (Fig. 123), der so vor der Mitte der Oeffnung liegt, dass die in Bezug auf ihn vorgenommene Theilung der durch die kreisförmige Oeffnung dringenden Welle in Zonen, deren Randstrahlen in B die Phasendifferenz einer halben Wellenlänge haben, eine ungerade Anzahl von Zonen ergibt, erhält Licht von der halben Centralzone und der halben Randzone. Die Strahlen haben eine Phasendifferenz einer geraden Anzahl halber Wellenlängen; die resultirende Amplitude in B ist daher, wenn die Neigung der Randstrahlen nicht zu gross ist, die doppelte, die Lichtstärke also die vierfache, als wenn das Licht durch eine unbegrenzte Oeffnung zu B gedrungen wäre. Ein näherer oder entfernterer Punkt B' ist aber ganz dunkel, denn eine in Bezug auf ihn vorgenommene Theilung der Welle ergibt dann eine gerade Anzahl von Zonen, die von der halben centralen und halben Randzone nach B' gelangenden Strahlen haben eine Phasendifferenz von einer ungeraden Anzahl halber Wellenlängen, sie vernichten sich.

Bei Anwendung des mehrerwähnten rothen Lichtes fand nun Fresnel in der That in den letztern Abständen den Mittelpunkt der kreisrunden Oeffnung wie einen Tintenfleck aussehend, in erstern dagegen sehr hell. Bei Anwendung nicht homogenen Lichtes dagegen war die Mitte anstatt hell und dunkel nach und nach verschieden gefärbt, wie es auch der Fall sein muss, da die Maxima und Minima der verschiedenen Farben in verschiedenen Entfernungen liegen.

§. 64.

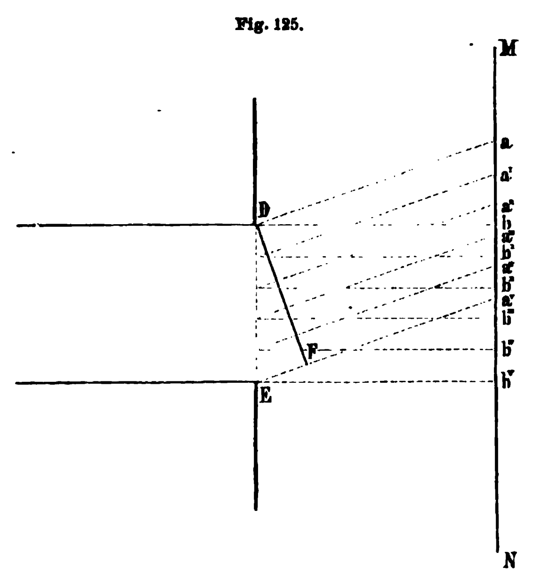
Fraunhofer's Beugungserscheinungen. Eine andere Methode zur Beobachtung der Beugungserscheinungen wurde von Fraunhofer angewandt, welche scheinbar complicirter ist, deren Resultate aber viel einfacher theoretisch bestimmt werden können als die der Fresnel'schen Beugungserscheinungen, und welche überdies, da bei ihnen fast nur Winkelmessungen vorkommen, viel leichter genau messend verfolgt werden können. Fraunhofer[1])

1) *Fraunhofer,* Neue Modificationen des Lichtes in den Denkschriften der Münchner Academie. Bd. VIII.

untersuchte hauptsächlich die Beugungserscheinungen durch enge Oeffnungen, indem er dieselben vor das Objectiv eines Fernrohrs befestigte, welches auf einen entfernten leuchtenden Punkt eingestellt war.

Der Unterschied dieser beiden Methoden wird leicht aus Folgendem klar sein. Ist DE der Durchschnitt durch eine enge Oeffnung, z. B. einen schmalen Spalt, und kommt zu demselben eine Lichtwelle, die wir der Einfachheit wegen als eben voraussetzen wollen, so erhält man nach der Fresnel'schen Methode auf einem der Oeffnung gegenüber gestellten Schirme in jedem Punkte die Resultirende aller Lichtwellen, welche von allen Punkten der die Oeffnung treffenden Lichtwelle nach dem betrachteten Punkte hin convergiren. Gehen wir daher von dem vor der Mitte der Oeffnung liegenden Punkte nach den

Fig. 125.



beiden Seiten, so wird die Beleuchtung eines bestimmten Punktes nicht allein von seinem Abstande von der Mitte abhängen, sondern auch von der Entfernung des Schirmes von der Oeffnung. Rückt der Schirm nun immer weiter von der Oeffnung weg, so werden die an einer bestimmten Stelle des Schirmes sich schneidenden Strahlen immer weniger convergent sein müssen, und ist schliesslich der Schirm in unendliche Entfernung gerückt, so werden die an einer Stelle zusammentreffenden Strahlen alle parallel sein, da die convergirenden Strahlen sich alle in endlicher Entfernung vor dem Schirme schneiden. In unendlicher Entfernung von der Oeffnung würde daher die Beleuchtung einer Stelle des Schirmes die resultirende der parallel nach dieser Richtung hin gebeugten Strahlen Da, Ea^V oder Db, Eb^V sein.

Was nun eine Entfernung des Schirmes ins Unendliche bewirken würde, das leistet bei der Fraunhofer'schen Methode die Vorsetzung der Spaltöffnung vor das Objectiv eines Fernrohrs. Wie wir sahen, werden alle unter einan-

der parallel auf eine Linse auftreffenden Strahlen gleicher Brechbarkeit hinter der Linse genau in einem Punkte vereinigt, welcher auf der mit der Richtung des einfallenden Lichtes parallelen Haupt- oder Nebenaxe der Linse liegt. Es werden daher in den einzelnen hinter der Linse liegenden Vereinigungspunkten nur die einander parallelen Strahlen zusammenwirken; es wird in der Brennweite des Objectivs ein reelles Beugungsbild entstehen, dessen auf der Hauptaxe liegender Punkt durch die der Hauptaxe, dessen auf den verschiedenen Nebenaxen liegenden Punkte durch das Zusammenwirken der den einzelnen Nebenaxen parallel gebeugten Strahlen erzeugt werden. Dieses im Focus des Objectives erzeugte Beugungsbild ist daher auch unabhängig von dem Abstande der beugenden Oeffnung von dem Objectiv des Fernrohrs, da der Ort, wo die von dem Objectiv aufgenommenen Strahlen vereinigt werden nur von dem Winkel abhängt, den diese Strahlen mit der Axe des Objectives bilden, welches auch der Abstand der beugenden Oeffnung sei. Auf einer bestimmten Nebenaxe des Objectivs tritt nur die resultirende Beleuchtung sämmtlicher parallel dieser Axe gebeugter Strahlen auf.

Um die Beugungserscheinungen nach der Fraunhofer'schen Methode zu beobachten, stellt man das Fernrohr auf den von der convexen Seite eines innen geschwärzten Uhrglases oder eines glänzenden metallischen Knopfes im Sonnenlicht erzeugten Lichtpunkt, wenn man die Beugungserscheinungen kleiner rechteckiger oder parallelogrammatischer Oeffnungen beobachten will, oder auf die von einer innen geschwärzten Röhre im Sonnenlichte erzeugte Lichtlinie ein, wenn man die Beugungserscheinungen durch einen Spalt beobachten will. Die beugende Oeffnung, die man in den meisten Fällen leicht aus Staniol herstellen kann, wird dann in einen passenden Holzring gefasst, und so vor dem Objectiv des Fernrohrs befestigt. Will man messende Versuche machen, so wendet man das Fernrohr eines Theodolithen an, oder befestigt die Oeffnung vor dem Objectiv des Collimatorrohres eines Spectrometers, da wie erwähnt bei dieser Beobachtungsmethode nur Winkel zu messen sind.

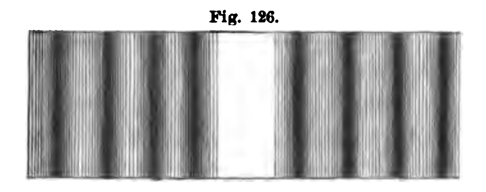
Die nach dieser Methode beobachteten Beugungserscheinungen zeichnen sich durch besondere Schönheit und Regelmässigkeit vor den Fresnel'schen aus; je nach der Gestalt der Oeffnung zeigen sie die mannigfachsten Gestalten. Eine vollständige Beschreibung und Entwicklung derselben ist hier nicht möglich; wir verweisen deshalb auf das klassische Werk von Schwerd [1]), in welchem die durch eine grosse Zahl von Oeffnungen bewirkten Beugungserscheinungen beschrieben und abgebildet und aus der Undulationstheorie entwickelt sind. Wir müssen uns hier darauf beschränken, einen einfachen Fall etwas vollständiger abzuleiten, die Erscheinungen durch einen engen Spalt.

Befestigt man vor dem Objective des Fernrohrs einen engen Spalt, und färbt das Licht, ehe es den Spalt trifft, homogen, so erhält man als Beugungsbild eine Anzahl heller und dunkler Streifen (Fig. 126). Sind die ein-

1) *Schwerd*, Die Beugungserscheinungen. Mannheim 1835.

fallenden Lichtstrahlen senkrecht zur beugenden Ebene, und ist die Fernrohraxe denselben parallel, so sieht man zunächst in der Mitte ein breites helles Feld, welches nach beiden Seiten hin allmählich dunkler wird und in einem gewissen, an beiden Seiten ganz gleichen Abstande einem ganz dunklen Streifen Platz macht. Auf den dunklen Streifen folgen an beiden Seiten wieder helle Felder, welche jedoch nur halb so breit und viel weniger hell sind als das mittlere Feld. Auf die hellen Felder folgen wieder dunkle Streifen und auf diese wieder helle Felder, welche den vorigen an Breite gleich, an Helligkeit aber viel geringer sind. Dann folgen wieder dunkle Streifen, helle Felder u. s. f.

Fig. 126.

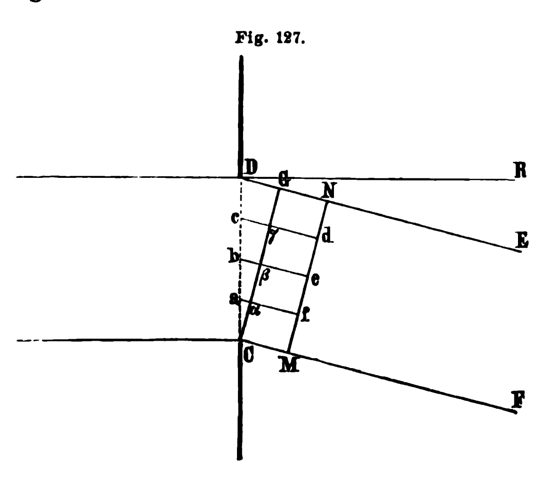


Die Breite der hellen Felder und ihre Abstände ändern sich mit der Wellenlänge des einfallenden Lichtes, und zwar sind die Breiten sowohl wie die Abstände der Felder von einander den Wellenlängen des angewandten Lichtes proportional. Für rothes Licht sind dieselben am grössten, für violettes Licht am kleinsten. Wendet man daher bei dem Versuche anstatt einfarbigen Lichtes weisses Licht an, so erscheinen anstatt der hellen und dunklen Streifen farbige Spectralstreifen, deren violettes Ende der Mitte zugekehrt ist, deren Farbenfolge denen der Newton'schen Ringe im reflectirten Lichte gleich ist.

Aendern wir die Breite der Spaltöffnung, so ändert sich ebenfalls die Breite des Beugungsbildes; die Felder werden breiter und ihre Abstände grösser in demselben Verhältnisse als die Spaltöffnung schmaler wird, zugleich aber wird die ganze Erscheinung lichtschwächer.

Um diese Erscheinungen aus der Undulationstheorie abzuleiten, bedarf es nur einer Bestimmung der Phasendifferenz, mit welcher die nach einer Richtung *DE* (Fig. 127.) gebeugten Strahlen in eine zur Richtung der gebeugten Strahlen senkrechte Ebene *MN* eintreten. Denn von da an pflanzen sich die gebeugten Lichtstrahlen als ein paralleles Strahlenbündel mit constanter Phasendifferenz fort. Und da alle Strahlen bei dem Durchgange durch das Objectiv dieselben Einflüsse erfahren, so interferiren sie mit

Fig. 127.



der Phasendifferenz, welche sie in dieser Wellenebene besitzen. Wir werden daher die resultirende Intensität der nach der Richtung DE gebeugten Strahlen erhalten, wenn wir die Resultirende sämmtlicher zugleich in die Ebene MN eintretenden Strahlen bestimmen, wenn sie alle zugleich dieselbe Stelle beleuchten würden.

Theilen wir nun, um diese Resultirende zu erhalten, die einfallende Wellenebene in eine Anzahl Streifen parallel der Längsausdehnung der Spaltöffnung, deren Durchschnitte durch die Ebene der Zeichnung Ca, ab, bc, cD sind, so dass die Wegeunterschiede der von den Rändern dieser Streifen in die Wellenebene des gebeugten Lichtes gezogenen Strahlen CM, af, be, cd, DN jedesmal eine halbe Wellenlänge betragen, so werden diese Streifen eine ganz gleiche Breite haben, jeder also dieselbe Anzahl von Lichtstrahlen in die Wellenebene MN senden. Denn legen wir durch C die Ebene CG parallel zu MN, so wird wegen Aehnlichkeit der Dreiecke

$$bC : aC = b\beta : a\alpha.$$

Nun ist aber nach unserer Theilung

$$b\beta = 2a\alpha,$$

demnach auch

$$bC = 2aC; \quad ba = aC$$

und ebenso für alle übrigen Streifen.

Jeder Strahl des ersten Streifens hat daher in dem zunächst folgenden einen ihm entsprechenden, und zwar da der erste Strahl des zweiten Streifens gegen den entsprechenden des ersten eine Phasendifferenz von einer halben Wellenlänge hat, ist jeder Strahl des zweiten Streifens gegen den entsprechenden des ersten um eine halbe Wellenlänge verschoben. Bei dem Zusammenwirken werden sich daher diese beiden Streifen, und ebenso der dritte und vierte u. s. f. aufheben, je zwei solcher Streifen werden daher immer zusammen Dunkelheit geben. Wenn demnach die Spaltöffnung in eine gerade Anzahl von Streifen getheilt wird, muss die Wirkung aller durch die Oeffnung dringenden Strahlen Dunkelheit geben. Wenn aber bei einer solchen Theilung der Spaltöffnung eine ungerade Anzahl von Streifen entsteht, wird schliesslich die Wirkung eines solchen Streifens nicht durch einen andern aufgehoben; die Resultirende dieses Streifens bleibt übrig, und die resultirende Intensität aller nach dieser Richtung gebeugten Strahlen ist gleich der resultirenden Intensität dieses Streifens.

Die Anzahl Theile, in welche die Spaltöffnung auf diese Weise zerlegt werden kann, hängt nun ab von der Neigung der gebeugten Strahlen, der Länge der Wellen und der Breite der Oeffnung.

Für die in der Richtung des einfallenden Lichtes sich fortpflanzenden Strahlen zunächst ist eine solche Theilung gar nicht möglich, denn für diese ist die Wellenebene MN der einfallenden Lichtwelle parallel, alle Strahlen treten demnach mit gleicher Phase in die Ebene MN ein. Dort also ist di

resultirende Amplitude einfach die Summe der Amplituden der einzelnen Strahlen. Anders bei den geneigten Strahlen, dort bildet die Wellenebene der gebeugten Strahlen einen Winkel mit der Wellenebene der einfallenden Strahlen, der gleich ist dem Winkel α, den die gebeugten Strahlen mit der Richtung der nicht gebeugten Strahlen bilden. Bei einem gewissen Winkel α wird bei gegebener Breite b der Oeffnung und bei gegebener Wellenlänge λ der Wegeunterschied der Randstrahlen $DG = \frac{1}{2}\lambda$ werden; wächst α, so wächst auch DG, und bei einem andern grössern Werthe von α wird DG gleich λ werden. Dann wird die Spaltöffnung in zwei Streifen der angegebenen Art zerfallen, denn die von der Mitte b der Spaltöffnung auf CG gezogene Senkrechte ist dann $\frac{1}{2}\lambda$.

Ist bei einem andern Winkel α DG gleich $\frac{3}{2}\lambda$, so zerfällt die Spaltöffnung in drei Streifen u. s. f., kurz so viel halbe Wellenlängen DG gross ist, in so viele Streifen zerfällt die Spaltöffnung.

Da nun, wie wir sahen, die resultirende Intensität in MN von der Anzahl der Streifen abhängt, so zwar, dass eine ungerade Anzahl Streifen Helligkeit, eine gerade Anzahl Dunkelheit bewirkt, so gelangen wir zu dem Satze: so oft die Differenz der von den Rändern der Oeffnung in die Wellenebene MN gezogenen Strahlen eine ungerade Anzahl von Wellenlängen beträgt, tritt durch Interferenz der gebeugten Strahlen Helligkeit ein, sobald jedoch die Differenz eine gerade Anzahl von Wellenlängen beträgt, tritt Dunkelheit ein. Der Uebergang von hell und dunkel ist ein allmählicher, da zwischen den betrachteten Extremen Bruchtheile von Streifen entweder verdunkelnd oder lichtbringend einwirken.

Um die Lage der hellen und dunklen Streifen zu erhalten, müssen wir jene Werthe des Winkels α, welchen die gebeugten Strahlen mit den direkt eintretenden bilden, bestimmen, für welche die Wegedifferenz der Strahlen eine gerade oder ungerade Anzahl halber Wellenlängen wird. Denn dieser Winkel gibt uns zugleich die Winkeldistanz der betreffenden Streifen in der Brennebene des Objectives von der hellen Mitte, da die Axen sämmtlicher Strahlenbündel sich in dem Mittelpunkte des Objectives unter eben diesem Winkel α schneiden. Wie man unmittelbar sieht, erhalten wir für die Wegedifferenz der Randstrahlen DG

$$DG = CD \,.\, \sin GCD.$$

Der Winkel GCD, welchen die gebeugte mit der ankommenden Wellenebene bildet, ist nun gleich dem Winkel α, welchen die gebeugten mit den direkt fortgepflanzten Strahlen bilden; bezeichnen wir nun die Breite CD der Oeffnung mit b, so wird

$$DG = b \,.\, \sin \alpha.$$

Die dunklen Streifen im Beugungsbilde finden sich an den Stellen, für welche DG gleich ist

$$\lambda,\ 2\lambda,\ 3\lambda\ \ldots\ n\lambda,$$

für welche also sin α einen solchen Werth hat, dass

$$\frac{b \,.\, \sin \alpha}{\lambda} = 1, 2, 3 \ldots\ldots n$$

ist. Die hellen Stellen ausserhalb der Mitte, für welche DG gleich ist

$$^3/_2\lambda,\ ^5/_2\lambda,\ ^7/_2\lambda \ldots\ldots \frac{2n-1}{2}\lambda,$$

finden sich demnach dort, wo

$$\frac{b \,.\, \sin \alpha}{\lambda} = {}^3/_2,\ {}^5/_2 \ldots\ldots \frac{2n-1}{2}$$

ist.

Die vorhin gemachten Angaben über die Beschaffenheit des Beugungsbildes sind in diesem aus der Undulationstheorie entwickelten Ausdrucke vollständig enthalten. Wir sahen, dass die Breite und der Abstand der einzelnen Felder um so grösser ist, je grösser die Wellenlänge λ des zu den Versuchen angewandten Lichtes ist. Der Abstand eines Streifens, z. B. des ersten dunklen Streifens von der Mitte, wird gemessen durch den Winkel α, welchen die gebeugten Strahlen mit den direkt einfallenden bilden; für den ersten dunklen Streifen muss nun

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{b},$$

der Winkel α also um so grösser sein, je grösser die Wellenlänge λ des Lichtes ist. Bei gegebener Wellenlänge λ muss aber sin α um so kleiner sein, je grösser die Breite b der Oeffnung ist, so dass also die Abstände der einzelnen Streifen um so grösser werden, je kleiner b, die Breite der Oeffnung, ist.

Es lässt sich aus den Ausdrücken für die den hellsten und dunkelsten Stellen des Beugungsbildes entsprechenden Werthe von α eine einzige Gleichung ableiten, welche das periodische Heller- und Dunklerwerden mit wachsendem α darstellt und zugleich die Intensität des Lichtes an jeder Stelle des Beugungsbildes liefert.

Bezeichnen wir die Intensität, welche durch die Interferenz der unter einem bestimmten Winkel α gebeugten Strahlen resultirt, mit J, während wir die Intensität der hellen Mitte als Einheit setzen, so muss die Gleichung für J so beschaffen sein, dass sie Null wird für alle Werthe von α, für welche die Differenz der Randstrahlen eine Anzahl ganzer Wellenlängen ist, dagegen ein Maximum für die Werthe von α, denen eine Wegedifferenz der Randstrahlen von einer ungeraden Anzahl halber Wellenlängen entspricht. Dieser Bedingung wird genügt, wenn wir setzen

$$J = \left(\sin \frac{b \,.\, \sin \alpha}{\lambda} \cdot \pi\right)^2,$$

denn der Ausdruck wird gleich Null, wenn

$$\frac{b \,.\, \sin \alpha}{\lambda} = 1, 2, 3 \ldots$$

also α die den dunklen Stellen entsprechenden Werthe erhält; derselbe erhält zugleich seinen grössten Werth, er wird gleich 1, wenn

$$\frac{b \cdot \sin\alpha}{\lambda} = {}^1/_2,\ {}^3/_2,\ {}^5/_2 \ldots .$$

Indess reicht dieser Ausdruck noch nicht hin, die Intensitätsverhältnisse des Beugungsbildes wiederzugeben, da er zunächst $J = 0$ liefert für α gleich 0, also für die helle Mitte des Bildes, und da nach ihm die Intensität an allen hellen Stellen desselben gleich sein würde. Letzteres kann aber nicht der Fall sein, da dort, wo $DG = 3\frac{\lambda}{2}$ ist, nur ${}^1/_3$ der gesammten ankommenden Lichtbewegung eine Bewegung des Aethers erzeugt, wo $DG = 5\frac{\lambda}{2}$ ist, nur ${}^1/_5$, wo $DG = 7\frac{\lambda}{2}$ ist, nur ${}^1/_7$ und so fort; denn an allen diesen Stellen wird nur ein Streifen der ankommenden Lichtwelle durch Interferenz nicht vernichtet.

Es ist nun unmittelbar klar, dass an den Stellen der Maxima die durch die Interferenz der übrigbleibenden Strahlen resultirende Amplitude der Aetherbewegung proportional ist der Anzahl von Strahlen, welche dort mit der gleichen Phasendifferenz zusammentreffen. Die Anzahl der zusammenwirkenden Strahlen ist nun weiter proportional der Grösse des übrigbleibenden Streifens; und da von dem jedesmal übrigbleibenden Streifen die Strahlen zu den betreffenden Punkten immer unter den gleichen Verhältnissen hinkommen, nämlich so, dass die Differenz der Randstrahlen des übrigbleibenden Streifens eine halbe Wellenlänge ist, so wird die Amplitude der Aetherbewegung an den Stellen der Maxima ausser der Mitte sich einfach verhalten wie die Grösse des dort wirksamen Streifens.

Die Anzahl Streifen, in welche bei gegebener Neigung die eintretende Welle zerfällt, ist nun gleich der Anzahl halber Wellenlängen, welche der Wegedifferenz der Randstrahlen gleich ist; sie verhält sich also bei verschiedenen Neigungen α wie die Werthe des Ausdrucks

$$\frac{2 \cdot b \cdot \sin\alpha}{\lambda} .$$

Die Grösse der Streifen ist somit dem reciproken Werthe dieses Ausdruckes proportional; die resultirende Amplitude an den Stellen der verschiedenen Maxima ist daher ebenfalls diesem reciproken Werthe und die resultirende Intensität dem Quadrate desselben proportional. Multipliciren wir daher den erhaltenen Ausdruck für J mit dem Quadrate des reciproken Werthes jenes Ausdruckes, so wird

$$J = \left(\frac{\sin \frac{b \cdot \sin\alpha}{\lambda} \cdot \pi}{\frac{2 \cdot b \cdot \sin\alpha}{\lambda}} \right)^2$$

die Intensitäten der verschiedenen Maxima wiedergeben, wobei dann jetzt aber

diejenige gleich 1 ist, welche wir dort beobachten; wo

$$\frac{b \cdot \sin \alpha}{\lambda} = {}^1/_2$$

ist, denn für diesen Werth ist $J = 1$.

Für $\alpha = 0$ erhält der Ausdruck für J den Werth $\frac{0}{0}$, indess hat dieser unbestimmte Ausdruck dann einen folgendermassen zu bestimmenden Werth.

Für sehr kleine Werthe von α können wir, was auch der Werth $\frac{b}{\lambda}$ sein mag, setzen

$$\sin \frac{b \cdot \sin \alpha}{\lambda} \pi = \frac{b \cdot \sin \alpha}{\lambda} \pi$$

und zwar mit einem um so geringern Fehler, je mehr sich α der Null nähert. Für einen solchen Werth von α wird dann

$$J = \left(\frac{\frac{b \cdot \sin \alpha}{\lambda} \cdot \pi}{\frac{2\, b \cdot \sin \alpha}{\lambda}} \right)^2 = \left(\frac{\pi}{2} \right)^2.$$

Die Intensität in der Mitte des Beugungsbildes verhält sich also zu derjenigen an der Stelle, wo die Phasendifferenz der Randstrahlen ${}^1/_2\lambda$ ist, wie $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 : 1$. Wenn wir daher von der Intensität in der Mitte des Beugungsbildes als Einheit ausgehen wollen, müssen wir den Ausdruck für J noch durch $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ dividiren, und erhalten schliesslich

$$J = \left(\frac{\sin \frac{b \cdot \sin \alpha}{\lambda} \cdot \pi}{\frac{b \cdot \sin \alpha}{\lambda} \cdot \pi} \right)^2$$

für die resultirende Intensität der unter dem Winkel α gebeugten Strahlen.

Dieser Ausdruck, den man auf mathematischem Wege aus den aufgestellten Principien der Undulationstheorie mit aller Strenge ableiten kann, stellt in der That das Beugungsbild durch eine schmale spaltförmige Oeffnung vollständig dar, er bestimmt die Intensität des nach einer beliebigen Richtung gebeugten Lichtes. Die Intensität nimmt mit wachsendem Winkel α sehr rasch ab; in der Mitte gleich 1 gesetzt, ist sie dort, wo $DG = {}^1/_2\lambda$ ist, nur mehr $\frac{1}{2{,}5}$, wo $DG = {}^3/_2\lambda$ ist, nur mehr $\frac{1}{9 \cdot 2{,}5}$ und von da ab nimmt sie ab, wie die Quadrate der ungeraden Zahlen wachsen.

Hat die Oeffnung eine andere Form, so wird auch das Beugungsbild ein anderes, und eine mathematische Entwicklung gibt einen andern Ausdruck für J, der dasselbe auf das vollständigste darstellt. Wendet man eine kleine quadratische Oeffnung an, so erscheint ein helles Kreuz, dessen Arme senkrecht sind auf den vier Seiten des Quadrates, und welche im homogenen Lichte aus hellen und dunklen, im weissen Lichte aus farbigen, den Quadratseiten

parallelen Streifen bestehen. In den von den Armen gebildeten Winkeln zeigen sich helle Felder. Durch eine dreieckige Oeffnung betrachtet erscheint ein Lichtpunkt als sechsstrahliger Stern, in dessen Winkeln eine Anzahl heller Felder sich finden; durch einen kleinen Kreis angesehen erscheint derselbe Punkt als leuchtender Kreis von einer Anzahl heller und dunkler Streifen umgeben. Alle diese Formen lassen sich durch einen Ausdruck für J aus der Undulationstheorie ableiten, wenn auch die Form der Gleichung zum Theil ziemlich verwickelt wird.

§. 65.

Beugungserscheinungen durch mehrere Oeffnungen. Wenn man vor das Objectiv des Fernrohrs bei der Fraunhofer'schen Methode der Beobachtung einen Schirm bringt, in welchem anstatt einer Oeffnung mehrere sich befinden, so ist der Charakter des Beugungsbildes nicht geändert; dasselbe unterscheidet sich jedoch von dem durch eine einfache Oeffnung erzeugten Bilde dadurch, dass ausser den dunklen Feldern bei einfacher Oeffnung noch neue hinzutreten, an Stellen, welche vorher hell waren, und dadurch, dass die Intensität an den hellen Stellen jetzt eine viel grössere ist. Dass beides der Fall sein muss, lässt sich nach denselben Principien ableiten, aus welchen wir die Beugungserscheinungen einer Oeffnung herleiteten. Nehmen wir an, dass vor dem Objectiv ein Schirm mit zwei parallelen Spalten angebracht sei, und dass Licht von der Wellenlänge λ parallel der Axe des Fernrohrs, also senkrecht zur Ebene des Schirmes, durch die Spaltöffnungen eindringe.

Zunächst ist nun klar, dass an den Stellen des Beugungsbildes, wo die Strahlen, welche durch jede einzelne Oeffnung hindurchdringen, sich vernichten, ebenso Dunkelheit sein muss, als wenn vor dem Objectiv nur eine beugende Oeffnung wäre. Die Minima, welche bei einer Oeffnung auftreten, bleiben also auch bei zweien oder mehreren Oeffnungen ganz ungeändert. Sind demnach CD und EF zwei gleich breite Oeffnungen (Fig. 128), so werden auch jetzt dort Minima auftreten, wo DG oder EH irgend eine Anzahl ganzer, oder eine gerade Anzahl halber Wellenlängen beträgt, wo also, mit Beibehaltung unserer vorigen Bezeichnung

$$\frac{b \, . \sin \alpha}{\lambda} = 1, 2, 3, 4 \dots .$$

An den Stellen aber, wo durch das Zusammenwirken der Strahlen einer Oeffnung Helligkeit ist, kann durch das Zusammenwirken der Strahlen beider Oeffnungen Dunkelheit eintreten. Es wird das dort der Fall sein, wo die Resultirenden beider Oeffnungen eine Phasendifferenz von einer halben Wellenlänge haben. Dies wird nun überall dort eintreten, wo die Phasendifferenz der an entsprechenden Stellen durch jede der Oeffnungen tretenden Strahlen eine halbe Wellenlänge beträgt, wo also die Differenz der von D und von E, der von der Mitte der Oeffnungen und der von C und F ausgehenden Strahlen

gleich $^1/_2\lambda$ oder ein ungerades Vielfaches von $^1/_2\lambda$ ist. Denn die Resultirende der durch jede der Oeffnungen dringenden Strahlen mag sein welche sie will, da die Oeffnungen gleiche Breite haben, wird jeder durch die Oeffnung CD dringende Strahl durch den entsprechenden aus EF hervorgehenden Strahl vernichtet.

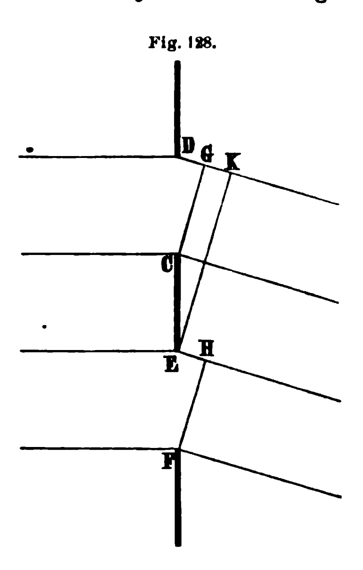


Fig. 128.

Da die Oeffnungen ganz gleich sind, ist die Phasendifferenz aller entsprechenden Strahlen gleich einem ungeraden Vielfachen einer halben Wellenlänge, wenn die Differenz der von den gleichliegenden Rändern D und E ausgehenden Strahlen oder DK ein ungerades Vielfaches von $^1/_2\lambda$ ist. Bezeichnen wir den Abstand DE mit a, so ist

$$DK = a \,.\, \sin \alpha$$

und somit treten die neuen Minima auf, wo α solche Werthe hat, dass

$$a \,.\, \sin \alpha = {}^1/_2\lambda,\ {}^3/_2\lambda,\ {}^5/_2\lambda \ldots . \frac{2n-1}{2}\lambda$$

oder wo

$$\frac{2a \,.\, \sin \alpha}{\lambda} = 1,\ 3,\ 5 \ldots . 2n - 1$$

ist.

An den Stellen der frühern Maxima der Lichtstärke aber, wo zugleich die Phasendifferenz der durch die einzelnen Oeffnungen dringenden Randstrahlen ein ungerades, die Differenz der von D und E ausgehenden Strahlen oder DK ein gerades Vielfaches einer halben Wellenlänge beträgt, wirken jetzt zwei Streifen, einer aus jeder Oeffnung, wo vorhin nur ein Streifen wirkte; die resultirende Aetheramplitude muss also die doppelte, die resultirende Lichtintensität die vierfache sein. Nehmen wir z. B. an, dass der Abstand a der gleichliegenden Ränder gleich $2b$, also der Abstand der einander nächsten Ränder der Spalten gleich ist der Breite der Oeffnung gleich b, so ist in der Mitte des Beugungsbildes die Helligkeit viermal so gross als bei einer Spalte. Die ersten Minima sind dann dort, wo

$$\frac{2a \sin \alpha}{\lambda} = \frac{4b \sin \alpha}{\lambda} = 1,$$

also

$$b \,.\, \sin \alpha = {}^1/_4\lambda.$$

Dann folgt ein Maximum, wo $b \,.\, \sin \alpha = {}^1/_2\lambda$ ist, denn dort ist $DK = 2b \,.\, \sin \alpha = \lambda$, also die Phasendifferenz der durch beide Oeffnungen dringenden Strahlen eine ganze Wellenlänge; die Intensität an dieser Stelle ist die vierfache jener, welche für den gleichen Werth von α bei einfacher Oeffnung sich findet.

Ein ähnliches Maximum zeigt sich dort, wo $b \cdot \sin\alpha = {}^3/_2\lambda,\ {}^5/_2\lambda$ u. s. f. ist, kurz an den Stellen der Maxima bei einfacher Oeffnung, da dort immer zugleich DK gleich einer geraden Anzahl halber Wellenlängen ist; die Intensität an diesen Stellen ist die vierfache derjenigen bei einer Oeffnung. Wir nennen nach Fraunhofer[1]) diese Maxima solche zweiter Klasse, um sie von den viel breitern Maximis erster Klasse bei einer Oeffnung zu unterscheiden.

Zwischen den neuen Minimis, die wir, zum Unterschiede der schon durch eine Oeffnung entstehenden, Minima zweiter Klasse nennen wollen, treten nun auch neue Maxima dritter Klasse auf und zwar immer in der Mitte zwischen einem Minimum erster und einem zweiter Klasse.

Diese Erscheinungen lassen sich durch eine einzige Gleichung darstellen. Da, wie wir sahen, die frühern Minima ungeändert bleiben, die frühern Maxima nur eine vierfache Intensität erhalten, werden wir die Erscheinungen durch zwei Oeffnungen darstellen können, wenn wir den Ausdruck, welcher die durch eine Oeffnung erzeugte Lichtintensität darstellt, mit einem Factor versehen, welcher für die Werthe von α gleich vier wird, welche die Maxima zweiter Klasse liefern, für diejenigen Null wird, welche den Minimis zweiter Klasse entsprechen, und überdies die Maxima dritter Klasse liefert. Ein solcher Factor ist der Ausdruck

$$2\left(1 + \cos\frac{2a \cdot \sin\alpha}{\lambda} \cdot \pi\right) \cdot$$

Denn dieser Factor wird für

$$\frac{2a \cdot \sin\alpha}{\lambda} = 1,\ 3,\ 5 \ldots$$

gleich

$$2\,(1 - 1) = 0,$$

aber für

$$\frac{2a \cdot \sin\alpha}{\lambda} = 0,\ 2,\ 4,\ 6 \ldots.$$

oder für

$$\frac{a \cdot \sin\alpha}{\lambda} = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \ldots.$$

wird derselbe gleich 4.

Bezeichnen wir demnach die Intensität der durch eine Oeffnung unter dem Winkel α gebeugten Strahlen mit A^2, diejenige der durch zwei Oeffnungen unter demselben Winkel gebeugten Strahlen mit J, so ist

$$J = 2\left(1 + \cos\frac{2a\sin\alpha}{\lambda}\,\pi\right) \cdot A^2.$$

Wir können diesem Ausdrucke eine etwas andere Form geben, welche deutlicher die Lage der Maxima zweiter Klasse erkennen lässt. Beachten wir,

---

1) *Fraunhofer,* Neue Modification des Lichtes. Denkschriften der Münchener Akademie. Bd. VIII.

dass

$$1 + \cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

und dass

$$4\cos^2\frac{\varphi}{2} \cdot \sin^2\frac{\varphi}{2} = \sin^2\varphi,$$

also

$$4\cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\frac{\varphi}{2}},$$

so erhalten wir für J zunächst

$$J = 4 \cdot \cos^2\frac{a \cdot \sin\alpha}{\lambda} \cdot \pi \cdot A^2$$

und dann

$$J = \frac{\sin^2\frac{2a\sin\alpha}{\lambda}\pi}{\sin^2\frac{a\sin\alpha}{\lambda}\pi} \cdot A^2$$

oder auch, wenn wir gleichzeitig für A seinen Werth setzen,

$$J = \left(2\frac{\sin\frac{b\sin\alpha}{\lambda}\pi}{b\cdot\frac{\sin\alpha}{\lambda}\pi}\right)^2 \left(\frac{\sin 2\frac{a\sin\alpha}{\lambda}\pi}{2 . \sin\frac{a\sin\alpha}{\lambda}\pi}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad \text{II.}$$

Der Ausdruck wird gleich Null zunächst überall dort, wo A gleich Null ist, also an den Stellen, wo die durch eine Oeffnung gebeugten Strahlen sich schon vernichten. Ferner aber auch dort, wo der Zähler des Factors ohne den Nenner gleich Null wird; dort also liegen die neu hinzutretenden Minima, diejenigen zweiter Klasse.

Es ist das der Fall, wo α einen solchen Werth hat, dass

$$\frac{a \cdot \sin\alpha}{\lambda} = {}^1/_2,\ {}^3/_2,\ {}^5/_2 \ldots .$$

wie wir bereits vorhin fanden.

Die Maxima zweiter Klasse, also die schon bei einer Oeffnung vorhandenen, jedoch jetzt viermal so hellen Stellen, zeigen sich dort, wo der Factor gleich 1 wird; und das ist nur dann der Fall, wenn derselbe die Form $\frac{0}{0}$ erhält.

Diese Form erhält derselbe aber für

$$\frac{a \cdot \sin\alpha}{\lambda} = 1, 2, 3, 4 \ldots$$

oder für

$$\sin\alpha = m\frac{\lambda}{a},$$

wenn wir mit m eine Zahl der Zahlenreihe bezeichnen. Von diesen Maxima fallen aber einige aus, da sie mit den Minimis für jede einzelne Oeffnung zu-

sammenfallen. Wir erhalten nämlich die Intensität dieser Maxima, wenn wir in dem oben allgemein abgeleiteten Ausdruck für J diesen Werth von $\sin\alpha$ einsetzen. Derselbe wird dann

$$J = \left(2\,\frac{\sin m\frac{b}{a}\pi}{m\frac{b}{a}\pi}\right)^2.$$

Jedesmal, wenn $m\frac{b}{a}$ eine ganze Zahl wird, ist aber dieser Ausdruck gleich Null. Ist z. B., wie wir vorhin schon annahmen,

$$a = 2b,$$

so ist für alle geraden m der Werth von $J = o$, es bleiben also entsprechend den obigen Ausführungen nur die Maxima

$$\frac{a\,.\,\sin\alpha}{\lambda} = \frac{2b\,.\,\sin\alpha}{\lambda} = 1, 3, 5 \;\ldots\ldots$$

also die ungeradzahligen.

Ist $a = 3b$, so verschwinden das dritte und sechste, ist es gleich $4b$, das vierte und achte u. s. f.

Dass der Werth des Factors, wenn er die Form $\frac{0}{0}$ hat, gleich 1 sei, bedarf wohl keines weitern Nachweises. Die Maxima dritter Klasse sind dort, wo der Zähler des Factors ohne den Nenner gleich 1 wird; demnach für

$$\frac{a\,.\,\sin\alpha}{\lambda} = {}^1/_4,\ {}^3/_4,\ {}^5/_4,\ {}^7/_4 \ldots\ldots (2n-1)\ {}^1/_4.$$

Denn dort wird der Zähler

$$Z = \sin\,(2n-1)\,\frac{\pi}{2} = \pm 1,$$

der Nenner aber

$$N = 2\,.\,\sin\,(2n-1)\,\frac{\pi}{4} = \pm 2\,.\,\sqrt{{}^1/_2} = \sqrt{2.}$$

Eigentliche Maxima, das heisst zwischen zwei dunklen Streifen eingeschlossen, sind von diesen nur

$$\frac{a\,.\,\sin\alpha}{\lambda} = {}^7/_4,\ {}^9/_4,\ {}^{15}/_4,\ {}^{17}/_4 \ldots$$

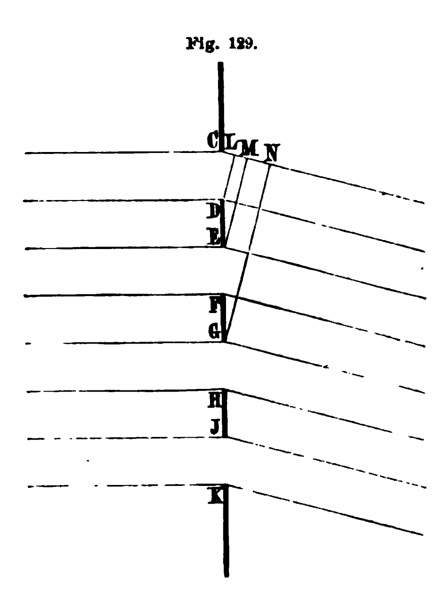
Daraus folgt zugleich, dass diese Maxima äusserst lichtschwach sind, weil sie sehr nahe dem Werthe $A = 0$ liegen.

Vermehrt man die Anzahl der Oeffnungen noch weiter, so treten noch weitere Minima auf, die sich in ähnlicher Weise bestimmen lassen; die Intensität der Maxima wird aber eine noch grössere. Nehmen wir z. B. vier Oeffnungen an, so sieht man leicht, dass die Lichtwirkung der zwei ersten Oeffnungen durch die der beiden andern zerstört werden kann. Bei vier Oeffnungen werden sich daher zunächst alle die Minima zeigen, welche bei zwei Oeffnungen auftreten, es wird zunächst überall dort Dunkelheit eintreten, wo

CL eine gerade und wo *CM* eine ungerade Anzahl halber Wellenlängen ist. Wenn aber nun auch die durch *CD* und *EF*, somit auch die durch *GH* und *JK* gebeugten Strahlen für sich Helligkeit geben, so werden sich doch die Resultirenden der durch je zwei Oeffnungen dringenden Strahlen zerstören, wenn die Phasendifferenz derselben eine halbe Wellenlänge beträgt; und das ist, wie man sieht, der Fall, wenn

$$CN = CG \,.\, \sin\alpha = (2n - 1)\,\frac{\lambda}{2}\,.$$

Fig. 129.



Nehmen wir nun an, dass die Breite aller Oeffnungen gleich b und der Abstand der gleichgelegenen Ränder stets derselbe, also $CE = EG = a$ sei, so werden also jetzt wieder neue Minima auftreten, wo der Beugungswinkel α solche Werthe hat, dass

$$\frac{4a\,.\,\sin\alpha}{\lambda} = 1,\ 3,\ 5\ \ldots.\ 2n - 1,$$

also wo $CM = {}^1/_4,\ {}^3/_4,\ {}^5/_4 \ldots$ Wellenlängen, oder wenn $a = 2b$, *CL* gleich ${}^1/_8,\ {}^3/_8,\ {}^5/_8\ \ldots$ Wellenlängen ist. Zwischen je zwei Minima bei zwei Oeffnungen tritt also ein neues Minimum hinzu.

Die Maxima zweiter Klasse sind dort, wo

$$CG\,.\,\sin\alpha = 2a\sin\alpha = 2m\,\lambda$$

oder $a\,.\,\sin\alpha = m\,\lambda$, also genau an den auch bei zwei Oeffnungen gefundenen Stellen. Denn diese Maxima bilden sich nur an den Stellen, an welchen sich nicht nur die Strahlen der Systeme von je zwei Oeffnungen verstärken, das würde überall dort der Fall sein, wo $2a\sin\alpha = m\,\lambda$, sondern wo auch die Strahlen der beiden Oeffnungen des einzelnen Systems sich verstärken. Sobald nun $a\,.\,\sin\alpha$ ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge ist, vernichten sich die Strahlen zweier auf einander folgenden Oeffnungen, somit fallen von den möglichen Maximis bei der angenommenen Constanz von a, nämlich $2a\sin\alpha = m\,\lambda$, alle mit ungeradem m aus, es bleiben somit nur die, wo $a\,.\,\sin\alpha = m\,\lambda$ ist.

Die Maxima erhalten wieder die vierfache Intensität von derjenigen bei zwei Oeffnungen.

Um die Intensität der nach irgend einer Richtung α gebeugten Strahlen durch eine Gleichung zu erhalten, ist es nur nöthig, den für zwei Oeffnungen gültigen Ausdruck mit einem Factor zu multipliciren, der demjenigen analog ist, welcher den für eine Oeffnung gültigen Ausdruck in den für zwei Oeffnungen gültigen verwandelte, und man sieht leicht, dass der Factor

$$2\left(1+\cos\frac{2a\,.\,\sin\alpha}{\lambda}\cdot 2\pi\right)$$

das verlangte leistet. Beachten wir nun, dass derselbe gleich ist

$$4\cos^2\frac{a\,.\,\sin\alpha}{\lambda}\cdot 2\pi,$$

so wird die Intensität J der durch vier Oeffnungen unter irgend einem Winkel α gebeugten Strahlen

$$J = 4\,.\cos^2\frac{a\,.\,\sin\alpha}{\lambda}\,2\pi\cdot\frac{\sin^2\frac{2a\,.\,\sin\alpha}{\lambda}\cdot\pi}{4\cdot\sin^2\frac{a\,.\,\sin\alpha}{\lambda}\cdot\pi},$$

oder

$$J = (4A)^2\left(\frac{\sin\frac{4a\,.\,\sin\alpha}{\lambda}\cdot\pi}{4\,.\sin\frac{a\,.\,\sin\alpha}{\lambda}\,\pi}\right)^2 \quad \dots \quad \text{IV.}$$

Vergleichen wir die Ausdrücke II. und IV. mit einander, so sehen wir, dass wenn n jedesmal die Anzahl der beugenden Spaltöffnungen bedeutet, dass dann beide Ausdrücke ganz gleich oder

$$J = (nA)^2\left(\frac{\sin\frac{na\,.\,\sin\alpha}{\lambda}\cdot\pi}{n\,.\sin\frac{a\,.\,\sin\alpha}{\lambda}\,\pi}\right)^2$$

werden, worin n die Zahl der Oeffnungen bedeutet.

Betrachten wir nun die Erscheinungen durch eine beliebige Anzahl von Oeffnungen, so wird man finden, dass immer derselbe Ausdruck für J dieselben vollkommen darstellt, wenn wir mit n die Anzahl der Oeffnungen bezeichnen.

Wir erhalten somit die Intensität des nach irgend einer Richtung durch eine beliebige Anzahl von Oeffnungen gebeugten Lichtes, wenn wir die Intensität des durch eine Oeffnung gebeugten Lichtes mit dem Quadrate der Anzahl der Oeffnungen und demjenigen eines Factors multipliciren, dessen Zähler gleich dem Sinus eines $n$fachen Bogens und dessen Nenner der $n$fache Sinus jenes Bogens ist. Jener Bogen ist ein ebensolcher Bruchtheil des halben Kreisumfanges π, als die Phasendifferenz zweier Strahlenbündel, welche durch zwei neben einander liegende Oeffnungen gehen, $CM = a\,.\sin\alpha$, ein Bruchtheil einer ganzen Wellenlänge λ ist [1]).

Wird nun die Zahl der Oeffnungen sehr gross, so wird das Beugungsbild scheinbar ein ganz anderes als bei einer geringen Anzahl von Oeffnungen; man erhält dann bei Anwendung homogenen Lichtes nur eine Anzahl heller den Spaltöffnungen paralleler Linien, welche durch breite fast dunkle Zwischenräume von einander getrennt sind, bei Anwendung weissen Lichtes jedoch

1) *Schwerd*, Die Beugungserscheinungen des Lichtes. 2. Abthlg. Mannheim 1835.

Fresnel[1]) hingewiesen, genauer untersucht sind dieselben zuerst von Quincke[2]) Wir können dieselben analog den bisher betrachteten Erscheinungen in zwei grosse Gruppen theilen, in die nach Fresnel's Methode erzeugten und in die nach der Methode von Fraunhofer dargestellten.

Um die erstere zu erhalten, ersetzt man bei sonst ganz ungeänderter Anordnung des Versuches den zwischen Lichtpunkt und Fresnel'scher Lupe aufgestellten Schirm durch eine ebene Spiegelglasplatte, welche zum Theil mit einer geradlinig begrenzten, recht dünnen Schicht von durchsichtigem Jodsilber bedeckt ist. Die Herstellung einer solchen Schicht ist nicht schwierig. Man überzieht[2]) zunächst die Glasplatte nach dem Liebig'schen Verfahren mit einer dünnen Silberschicht, und schneidet dann mit einem scharfen vorsichtig geführten Messerschnitt die Silberschicht entzwei und entfernt dann an der einen Seite des Schnittes das Silber vom Glase. Das zurückgebliebene Silber verwandelt man dann durch Auflegen von Jod in durchsichtiges Jodsilber. Die so hergestellte Platte stellt man dann so auf, dass der Rand der Schicht dem Faden der Fresnel'schen Lupe parallel ist. Ganz ebenso kann man enge Oeffnungen in durchsichtigen Lamellen, oder schmale Streifen auf der Glasplatte herstellen, entsprechend den drei Arten von Schirmen, welche wir bei den Fresnel'schen Versuchen besprachen.

Wendet man nun zu diesen Versuchen eine zur Hälfte mit einer geradlinig begrenzten Jodsilberschicht bedeckte Glasplatte an, so sieht man mit der Fresnel'schen Lupe in der Nähe des geometrischen Schattens der Lamellengrenze (der durch den leuchtenden Punkt und die Grenzlinie der durchsichtigen Schicht gelegten Ebene) im weissen Lichte eine Reihe schön gefärbter, im homogenen Lichte eine Reihe abwechselnd heller und dunkler Interferenzstreifen, die parallel der Lamellengrenze in verschiedenen Abständen von dieser und von einander verlaufen. Während aber bei Anwendung eines undurchsichtigen Schirmes solche Streifen nur in dem an dem Schirmrande vorübergehenden Lichte, nicht im Schatten des Schirmes sich zeigen, treten dieselben hier an beiden Seiten der Grenze, also auch im Schatten der als undurchsichtig gedachten Schicht auf. Besonders ausgezeichnet unter den verschiedenen Interferenzstreifen ist ein breiter Streifen, der zuweilen mit der geometrischen Grenze des Schattens zusammenfällt, immer aber in dessen Nähe liegt. Quincke bezeichnet denselben als erstes Minimum.

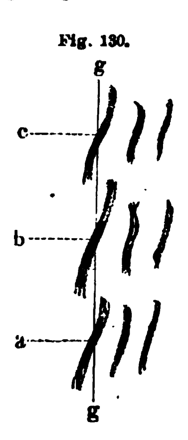
Die Lage der Streifen gegen den geometrischen Schatten der Lamellengrenze hängt ausser von dem Abstand des leuchtenden Punktes und der Fresnel'schen Lupe von der Lamelle wesentlich ab von der Dicke und dem Brechungsexponenten der durchsichtigen Schicht. Sehr deutlich tritt das hervor, wenn man die durchsichtige Schicht anstatt von gleichförmiger Dicke von stetig geänderter Dicke wählt, indem man die Glasplatte mit einer keilförmigen

1) *Fresnel,* Mémoire sur la diffraction. Mémoires de l'Acad. de France. T. V p. 451. Oeuvres complètes. T. I. p. 359. §. 82. Poggend. Annal. Bd. XXX.

2) *Quincke,* Poggend. Annal. Bd. CXXXII. p. 321 ff.

Silberschicht bedeckt und nun den Schnitt senkrecht zur Schärfe des Keiles führt, so dass längs der Grenze der Schicht etwa von oben nach unten die Dicke der Schicht stetig und regelmässig abnimmt. Die Gestalt, welche dann die im Schatten der Schicht liegenden Streifen annehmen, zeigt Fig. 130. An gewissen Stellen, a, b, c, sind die Interferenzstreifen am dunkelsten und liegen fast genau in der geometrischen Grenze des Schattens, von da aus nehmen sie nach oben und unten an Dunkelheit ab und krümmen sich gegen die Seite, nach welcher die Schicht dicker wird, gleichzeitig etwas von der Grenze fort, bis sie in einiger Entfernung von den Punkten a, b, c vollständig verschwinden.

Fig. 130.



Die Lage der Punkte a, b, c hängt ab von der Wellenlänge des angewandten Lichtes; wendet man deshalb statt des homogenen weisses Licht an, so ist die Grenze des Schattens verschieden gefärbt, die Farben folgen sich beim Fortschreiten zu dickern Stellen, wie die Farben der Newton'schen Farbenringe im durchgelassenen Licht. Das erste Minimum bildet breite, in der Mitte dunkel, an den Enden matter gefärbte Interferenzstreifen, welche gegen den geometrischen Schatten der Lamellengrenze geneigt sind.

Die Abhängigkeit der Lage der im Schatten liegenden Interferenzstreifen von der Dicke der durchsichtigen Schicht beweist unmittelbar, dass dieselben durch die Wellen erzeugt werden, welche in der Nähe der Grenze durch Luft einerseits und andererseits durch die durchsichtige Schicht hindurchgegangen sind. Betrachten wir zunächst die Entstehung des ersten Minimums. Wenn wir die nach einem vor dem Schirme im geometrischen Schatten der Schirmgrenze liegenden Punkt sich fortpflanzende Lichtwelle, welche durch die Grenze halbirt wird, von dem betrachteten Punkte aus in Zonen zerlegt denken, welche gegen einander die Phasendifferenz einer halben Wellenlänge haben, so werden auch jetzt alle Zonen ausser der halben Centralzone sich auslöschen, indem dasselbe, was von den ganzen Zonen bei ungestörter Ausbreitung gilt, auch von den halben Zonen gilt, welche einerseits an dem Schirm vorbeigehen, andererseits den Schirm durchdringen. In dem betreffenden Punkte wird also Licht nur von dieser halben Centralzone erregt, deren Schwingungen aber zur Hälfte durch Luft, zur Hälfte aber durch eine durchsichtige Schicht von der Dicke d hindurchgegangen sind. Dadurch ist aber zwischen den gleichzeitig in dem betrachteten Punkte ankommenden Schwingungen eine Phasendifferenz entstanden, und wenn dieselbe eine halbe Wellenlänge beträgt, so muss der betreffende Punkt dunkel erscheinen. Die Phasendifferenz ist, wenn wir den Brechungsexponent der Schicht mit n bezeichnen, gerade wie bei den Talbot'schen Linien

$$\Delta = n \frac{d}{\lambda} - \frac{d}{\lambda} = \frac{d}{\lambda} (n - 1).$$

Stets also, wenn dieser Ausdruck ein ungerades Vielfaches von $\frac{\lambda}{2}$ wird, wenn also

$$\frac{2d}{\lambda}(n-1) = 2m + 1,$$

$$d = (2m + 1)\frac{\lambda}{2(n-1)},$$

muss der geometrische Schatten dunkel sein. Bei einer keilförmigen Lamelle, bei der die Dicke der Schicht längs des Randes stetig wächst, muss also der geometrische Rand des Schattens abwechselnd hell und dunkel sein.

Ist die Dicke der Schicht etwas grösser, als dem eben angegebenen Werthe entspricht, so müssen die Streifen sich etwas von dem Rande entfernen, sie bilden sich dort, wo das in den Schatten, wie bei undurchsichtigem Schirme, gebeugte Licht und das durch die Schicht hindurchgegangene Licht die Differenz einer halben Wellenlänge hat. Gleichzeitig muss, da die Intensität des in den Schatten gebeugten Lichtes dann kleiner ist als die Intensität des durch die Schicht gegangenen, der Interferenzstreifen immer heller werden, bis er gegen die Stelle hin, wo die Phasendifferenz eine ganze Wellenlänge ist, verschwindet.

Ist die Dicke der Schicht etwas kleiner als ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge, so rückt der Streifen vom Rande aus nach der entgegengesetzten Seite, also von der Schicht fort, er bildet sich, wo das Licht, welches nach dem Durchtritt durch die Schicht aus dem Schatten der Schicht gebeugt ist, mit dem direkt fortgepflanzten die Phasendifferenz einer halben Wellenlänge hat.

Wie man sieht, muss bei einer keilförmigen Schicht darnach die Gestalt des ersten Minimums die vorhin beschriebene werden, dasselbe muss längs des Randes in mehrere Theile zerfallen, deren dunkelste Stellen mit dem Schatten des Randes zusammenfallen, deren Enden gegen die dickere Seite hin nach dem Innern der Schicht, gegen die dünnere Seite hin etwas nach aussen gebogen sind. An den dunkelsten Stellen muss die Dicke der Schicht gerade der Wegedifferenz eines ungeraden Vielfachen einer halben Wellenlänge entsprechen. Letzteres hat Quincke durch seine Messungen bewiesen. Da die Jodsilberschicht, wenn man durch sie gegen eine weisse Wolke sieht, Farben dünner Blättchen zeigt, oder im homogenen Licht Interferenzstreifen, welche senkrecht zum Spaltrande stehen, so konnte er mit Hülfe derselben die Dicke der Schicht an den verschiedensten Stellen bestimmen, so auch für die dunkelsten Stellen der Interferenzstreifen. Ist die Wellenlänge des Lichtes im Jodsilber gleich λ_1, somit in der Luft $n \,.\, \lambda_1$, so muss für die dunkelsten Stellen

$$d = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\lambda_1}{2},\ 3\,\frac{n}{n-1} \cdot \frac{\lambda_1}{2},\ 5 \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\lambda_1}{2} \dots$$

oder setzen wir für n, den Brechungsexponenten des Jodsilbers, seinen Werth 2,25 für mittlere Strahlen ein,

$$d = 1{,}8\,\frac{\lambda_1}{2},\ \ 5{,}4\,\frac{\lambda_1}{2},\ \ 9{,}0\,\frac{\lambda_1}{2}$$

sein. Die von Quincke gefundenen Werthe sind

$$d = 2{,}04\,\frac{\lambda_1}{2},\ 5{,}63\,\frac{\lambda_1}{2},\ 8{,}79\,\frac{\lambda_1}{2},$$

Zahlen, die mit den berechneten fast vollständig übereinstimmen.

Auch die übrigen im Schatten der Schicht liegenden Streifen werden durch das in den Schatten derselben gebeugte und durch das durch die Schicht direkt hindurchgegangene Licht gebildet, ihre Lage, sowie die Veränderung der Lage der Streifen ausserhalb des Schattens gegenüber denen, welche bei undurchsichtigem Schirm entstehen, lässt sich ohne verwickelte Rechnungen nicht bestimmen. Eine vollständige Theorie dieser Erscheinungen hat Jochmann gegeben [1]).

In ähnlicher Weise wie die Fresnel'schen Beugungserscheinungen werden die Fraunhofer'schen durch durchsichtige Schirme geändert [2]). Man kann sich durchsichtige Beugungsgitter leicht in der Weise herstellen, dass man eine planparallele Glasplatte nach der erwähnten Liebig'schen Methode mit einer dünnen Silberschicht bedeckt, in diese ein Gitter eintheilt, und dann durch Auflegen von Jod das Silber in Jodsilber verwandelt. In welcher Weise sich die Erscheinungen bei solchen Gittern von den früher angewandten unterscheiden, wird sich am besten übersehen lassen, wenn wir zunächst den Ausdruck für die Intensität des gebeugten Lichtes bei solchen Gittern ableiten. Wir gehen dabei aus von der Beugung in einer Oeffnung. Ein Spalt von der Breite $2b$ sei zur Hälfte mit einer durchsichtigen Schicht von der Dicke d und dem Brechungsexponenten n bedeckt. Die durch den unbedeckten Theil der Oeffnung dringende Welle gibt dann nach §. 64 Anlass zu einem Beugungsbild, dessen Insensität in einer Richtung, die mit der Schirmnormale den Winkel α bildet, gegeben ist durch

$$J = \left(\frac{\sin \frac{b \,.\, \sin\alpha}{\lambda}\pi}{\frac{b \,.\, \sin\alpha}{\lambda}\,.\,\pi}\right)^2 .$$

Die durch den bedeckten Theil des Spaltes hindurchdringenden Strahlen modificiren nun das Beugungsbild so, dass wenn die Phasendifferenz der in gleichem Abstande von dem Rande der unbedeckten Oeffnung einerseits und dem entsprechend liegenden Rande andererseits einem ungeraden Vielfachen einer halben Wellenlänge gleich ist, Dunkelheit entsteht, dagegen an den Stellen, wo diese Phasendifferenz eine ganze Wellenlänge beträgt, die Helligkeit die vierfache ist. Gerade nun wie wir bei undurchsichtigen Schirmen das Beugungsbild für zwei Oeffnungen aus dem für eine Oeffnung erhielten, in-

1) *Jochmann,* Poggend. Annal. Bd. CXXXVI.
2) *Quincke,* Poggend. Annal. Bd. CXXXII. p. 361 ff.

dem wir den Ausdruck für eine Oeffnung mit einem Factor multiplicirten, welcher von der Phasendifferenz der durch die verschiedenen Oeffnungen dringenden Strahlen abhängig war, so werden wir auch jetzt das modificirte Beugungsbild erhalten, wenn wir obigen für den unbedeckten Theil der Oeffnung erhaltenen Ausdruck mit einem Factor multipliciren, der von der Phasendifferenz der entsprechend liegenden Strahlen in dem bedeckten und unbedeckten Theile der Oeffnung abhängig ist, und gleich Null wird jedesmal, wenn die Phasendifferenz der entsprechenden Strahlen ein ungerades, gleich 4 wird, wenn sie ein gerades Vielfaches von einer halben Wellenlänge ist. Gerade wie oben ist nun die Phasendifferenz der durch die Schicht gegangenen Wellen gegen die nicht durch dieselbe getretenen in Folge der Verzögerung in der Schicht

$$\Delta = \frac{d}{\lambda}(n-1);$$

da nun der Abstand der in gleicher Entfernung von den entsprechend liegenden Rändern des bedeckten einerseits, des unbedeckten Theiles andererseits durch die Oeffnung gehenden Strahlen gleich b ist, so ist die Phasendifferenz der in der Richtung α gebeugten Strahlen in Folge der Wegedifferenz

$$\Delta' = \frac{b \,.\, \sin\alpha}{\lambda}.$$

Die ganze Phasendifferenz zwischen den durch den unbedeckten und bedeckten Theil hindurchgegangenen Lichtwellen ist somit $\Delta + \Delta'$. Multipliciren wir nun den Ausdruck für das Beugungsbild des unbedeckten Theiles mit dem Factor

$$2\left\{1 + \cos\left(\frac{d}{\lambda}(n-1) + \frac{b\sin\alpha}{\lambda}\right) \cdot 2\pi\right\},$$

so erhalten wir das Beugungsbild der ganzen Oeffnung, denn wenn

$$\frac{d}{\lambda}(n-1) + \frac{b \,.\, \sin\alpha}{\lambda} = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \ldots.$$

ist, wird der Cosinus jenes Factors gleich $+1$, derselbe somit gleich 4. Wenn aber

$$\frac{d}{\lambda}(n-1) + \frac{b \,.\, \sin\alpha}{\lambda} = {}^1/_2,\ {}^3/_2,\ {}^5/_2 \ldots.$$

ist, wird der Cosinus gleich -1, somit der Factor gleich $2\,(1-1) = 0$. Da nun

$$2\left\{1 + \cos\left(\frac{d}{\lambda}(n-1) + \frac{b \,.\, \sin\alpha}{\lambda}\right) 2\pi\right\} = 4\cos^2\left\{\frac{d}{\lambda}(n-1) + \frac{b \,.\, \sin\alpha}{\lambda}\right\}\pi.$$

so erhalten wir schliesslich für das Beugungsbild

$$J_1 = J \,.\, 4 \,.\, \cos^2\left\{\frac{d}{\lambda}(n-1) + \frac{b \,.\, \sin\alpha}{\lambda}\right\}\pi.$$

Haben wir nun anstatt einer solchen halbbedeckten Oeffnung n solche, die unmittelbar an einander grenzen, also ein in der durchsichtigen Substanz

getheiltes Gitter, so erhalten wir den Ausdruck für die Intensität der gebeugten Strahlen ganz genau auf demselben Wege wie in §. 65. Da hier die Phasendifferenz der entsprechend liegenden Strahlen in je zwei Oeffnungen gleich

$$\delta = \frac{2b \cdot \sin \alpha}{\lambda},$$

somit $a = 2b$ ist, so haben wir in dem von der Zahl der Oeffnungen abhängigen Factor der allgemeinen Intensitätsgleichung nur $a = 2b$ zu setzen. Schreiben wir deshalb wie früher $J = A^2$, so wird

$$Jn = (n\, A)^2 \cdot 4 \cos^2 \left\{ \frac{d}{\lambda}(n-1) + \frac{b \cdot \sin \alpha}{\lambda} \right\} \pi \cdot \left(\frac{\sin^2 \frac{nb \cdot \sin \alpha}{\lambda} \pi}{n \cdot \sin^2 \frac{b \cdot \sin \alpha}{\lambda} \pi} \right)^2.$$

Der Ausdruck ergibt unmittelbar, dass das Beugungsbild solcher Gitter im Wesentlichen dasselbe ist, wie bei Gittern mit undurchsichtigen Zwischenräumen, dass indess in Folge des Factors, welcher die Dicke der Schicht enthält, neue Minima zu den frühern hinzukommen, während die Maxima eine grössere Intensität haben; bei Anwendung von weissem Licht werden deshalb an manchen Stellen des Beugungsbildes die Farben geändert.

Untersuchen wir zunächst die Mitte des Beugungsbildes; dort ist $\alpha = 0$, und nach den Bemerkungen des §. 65 wird dann

$$J\, n = (n\, A)^2 \cdot 4 \cdot \cos^2 \frac{d}{\lambda}(n-1)\, \pi.$$

Der Factor von $(n\, A)^2$ verschwindet dann für solche Werthe von d, welche gleich sind

$$d = \frac{\lambda}{2}\, \frac{1}{n-1},\ 3\, \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{1}{n-1},\ 5\, \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{1}{n-1} \cdots$$

Sieht man deshalb durch ein solches Gitter nach einer schmalen Lichtquelle, dessen Licht die Wellenlänge λ hat, etwa nach einer schmalen Flamme mit vorgesetztem homogen gefärbtem Glase, so erscheint die Mitte des Gesichtsfeldes dunkel, an beiden Seiten dagegen, wo $\sin \alpha$ von Null verschieden ist, treten Maxima zweiter Klasse hervor.

Bei Anwendung weissen Lichtes fehlen in der Mitte alle jene Farben, deren Wellenlänge so ist, dass d einen jener obigen Werthe hat; die Mitte ist also gefärbt. Die Farbe ist dieselbe wie bei den Newton'schen Ringen im durchgelassenen Licht, an den Stellen, wo die Dicke der Luftschicht D gleich ist

$$D = {}^1/_2\, (n-1)\, d;$$

denn dort fehlten auch alle die Farben, für welches $2D$ ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge ist, und die übrigen Farben werden in derselben Weise verstärkt oder geschwächt.

Ganz dasselbe gilt für die Aenderung der Farbe in den Seitenspectren, wo also sin α nicht gleich Null ist, dort fehlen gegenüber einem gewöhnlichen Gitter alle Farben, für welche

$$d(n-1)+b\,.\,\sin\alpha = \frac{\lambda}{2},\ 3\frac{\lambda}{2},\ 5\frac{\lambda}{2}\ldots\ldots$$

Die Färbung ist also an der betreffenden Stelle gerade so, wie wenn das in der betreffenden Richtung gebeugte Licht bei den Newton'schen Ringen durch eine Luftschicht gegangen wäre, deren Dicke D gegeben ist durch

$$D = \tfrac{1}{2}\,(d\,(n-1) + b\,.\,\sin\alpha).$$

Nur ist die Färbung hier reiner wie bei den Ringen im durchgelassenen Licht, da hier die dort störende Beimengung von weissem Licht fehlt.

Alle diese Erscheinungen hat Quincke beobachtet und ihre vollständige Uebereinstimmung mit der Theorie gezeigt.

Sehr bequem sind diese durchsichtigen Lamellen oder Gitter auch, um Beugungserscheinungen im reflectirten Lichte zu erhalten. Lässt man von einer dünnen auf Glas liegenden Lamelle, welche durch einen geradlinigen Rand begrenzt ist, oder von einem solchen Gitter Licht reflectiren, so interferirt das in verschiedener Tiefe auf der Vorderfläche der Lamelle oder auf dem Glase reflectirte Licht, und liefert Beugungserscheinungen, welche den vorhin beschriebenen analog sind. Wegen der Details dieser Erscheinungen verweisen wir auf die Arbeiten von Quincke und Jochmann.

§. 67.

Messung der Wellenlängen. Bei allen den in diesem Kapitel besprochenen Interferenzerscheinungen hängt die Lage der Interferenzstreifen wesentlich ab von der Wellenlänge des angewandten Lichtes; alle die vorgeführten Methoden, Interferenzen hervorzurufen, sind daher mehr oder weniger geeignet, um die Länge der Lichtwellen zu messen. Wir haben bereits bei Besprechung des Fresnel'schen Spiegelversuchs die Messung erwähnt, welche Fresnel die Wellenlänge eines rothen Lichtes ergab. Ganz in derselben Weise kann man die Wellenlängen mit dem Interferenzprisma oder den Billet'schen Halblinsen messen. Auch die Newton'schen Farbenringe liefern uns die Wellenlängen aus den Dicken der Schicht, in welcher für eine bestimmte Farbe ein dunkler Ring sich bildet. Auf diesem Wege hat Fresnel aus den p. 344 angeführten Messungen die Wellenlängen der verschiedenen Farben berechnet.

Die Bestimmung der Wellenlängen auf diesen Wegen hat jedoch den Nachtheil, dass man bei ihnen kein Mittel hat, die Art des angewandten Lichtes direkt zu bestimmen, das heisst, dessen Lage im Spectrum genau wiederzugeben, da bei diesen Methoden keine Fraunhofer'schen Linien erscheinen. Sie sind deshalb nur geeignet, die Wellenlängen von homogenem

Licht zu bestimmen, dessen Stelle im Spectrum man schon auf andere Weise kennt, wie des Natriumlichtes.

Bei den Versuchen mit Fresnel'schen Spiegeln kann man die Lage der Interferenzstreifen nach den Fraunhofer'schen Linien orientiren, wenn man nach der Methode von Fizeau und Foucault irgend eine Stelle des Interferenzbildes mit dem Prisma untersucht. Ebenso erhält man die Interferenzstreifen zwischen den Fraunhofer'schen Linien bei der Methode von Talbot. Beide Methoden gestatten deshalb die Länge der Wellen von Lichtarten, welche durch ihre Stellung im Spectrum in ganz bestimmter Weise definirt sind, zu messen. Wir haben gesehen, wie sie in sehr einfacher Weise zum Ziele führen, wenn man die Wellenlängen an zwei Stellen des Spectrums als durch anderweitige Messungen gegeben voraussetzt. In dieser Weise, sahen wir, hat Esselbach die Talbot'schen Linien sehr fruchtbar verwerthet, um die Wellenlängen der ultravioletten Strahlen des Spectrums zu bestimmen.

Beide Methoden gestatten aber auch ohne diese Voraussetzung die Wellenlängen zu messen. Bei der ersten hat man nur alle die Grössen, welche in die die Lage der Interferenzstreifen bestimmenden Gleichungen eingehen, zu bestimmen, also den Abstand der Lichtlinie von der Schnittlinie der beiden Spiegel, die Neigung der beiden Spiegel gegen einander und den Abstand des betrachteten Interferenzstreifen von den beiden Spiegelbildern der Lichtquelle. Bei Anwendung der Talbot'schen Linien hat man die Dicke des angewandten Blättchens und dessen Brechungsexponenten für die verschiedenen Strahlen des Spectrums zu bestimmen, und dann den Versuch mit einem zweiten Blättchen anderer Dicke zu wiederholen. Denn der einzelne Versuch gibt nach §. 60 für eine bestimmte Wellenlänge nur eine Gleichung mit zwei Unbekannten, er sagt nur aus, dass

$$\frac{d}{\lambda_1}(n_1 - 1) = r + {}^1/_2,$$

also ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge ist, ohne den Werth von r zu geben.

Bei der Schwierigkeit, die zu messenden Grössen mit grosser Genauigkeit zu bestimmen, wie bei den Versuchen mit den Spiegeln besonders die immer nur äusserst geringe Neigung der Spiegel, bei den Talbot'schen Linien die Dicke der Platten und die Brechungsexponenten der einzelnen Strahlen, sind diese Methoden doch wenig geeignet, vollkommen sicher die absoluten Werthe der Wellenlängen zu liefern.

Die beste Methode zur Bestimmung der Wellenlänge ist diejenige mit Hülfe der Beugungsgitter; denn mit diesen erhält man, wie wir §. 65 nachwiesen, Spectra mit Fraunhofer'schen Linien, kann also direkt die Wellenlängen genau definirter Lichtarten des Spectrums messen, und hat ausserdem nur zwei Grössen, welche in die Gleichung für die Wellenlänge eingehen, zu messen. Denn bei einem Gitter, bei welchem die Abstände der gleichgelege-

nen Ränder der Oeffnungen constant und gleich a sind, ist die Lage des ersten Maximums zweiter Klasse bestimmt durch die Gleichung

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{a}.$$

Man hat also zur Bestimmung der Wellenlänge nur die Abstände a der Gitteröffnungen und den Winkel α zu messen, um welchen eine bestimmte Fraunhofer'sche Linie von der Richtung der ungebeugten Strahlen abgelenkt ist. Indem man diese Messung an beiden Seiten ausführt, hat man sofort eine Controle des gefundenen Werthes von α. Eine weitere Controle hat man durch Beobachtungen im zweiten Seitenspectrum. Die Lage einer bestimmten Lichtart von der Wellenlänge λ ist bestimmt durch

$$\sin \alpha_2 = 2 \frac{\lambda}{a}$$

und so bei jedem weitern Seitenspectrum, so weit sie mit Sicherheit zu beobachten sind.

Deshalb sind die Gitterspectra auch vorwiegend zur Bestimmung der Wellenlängen angewandt, zunächst von Fraunhofer[1]), dann später, um außer den von Fraunhofer gemessenen Längen noch andere zu bestimmen, von Ditscheiner[2]), van der Willigen[3]), Mascart[4]) und ganz besonders von Ångström[5]). Mascart und Eisenlohr[6]) haben die Gitterspectra auch zur Messung der ultravioletten Strahlen angewandt.

Die Messung der Spaltbreite a geschieht mit einer Theilmaschine, indem man die Breite des ganzen Gitters misst und dieselbe durch die Anzahl der Spaltöffnungen dividirt. Bei den ausgezeichneten Gittern von Nobert in Barth in Pommern, welcher die Gitter durch Diamant auf planparallelen Glasplatten oder auch in Silber, welches nach der Liebig'schen Methode auf Glas niedergeschlagen ist, theilt, ist die Breite der Gitter und die Anzahl der Oeffnungen stets angegeben. Zur Controle misst man die Breite des Gitters. Kennt man so den Werth von a, so wird das Gitter auf dem mittlern Tische eines Spectrometers so aufgestellt, dass seine Ebene senkrecht ist auf der Axe des Collimatorrohres und des Beobachtungsrohres, welche man vorher, wenn der Theilkreis auf 0 steht, in der §. 24 angegebenen Weise in eine gerade Linie gebracht hat. Man benutzt dazu auch hier die Reflexion des Fadenkreuzes; hat aber, wenn die beiden Ebenen der Glasplatte genau parallel sind, das noch einfachere Mittel der Orientirung, dass das mittlere

1) *Fraunhofer,* Neue Modification des Lichtes. Denkschriften der Münchener Akademie. Bd. VIII. Gilbert's Annalen. Bd. LXXIV.

2) *Ditscheiner,* Berichte der Wiener Akademie. Bd. L und LII.

3) *van der Willigen,* Mémoires d'Optique physique 2. Harlem 1868.

4) *Mascart,* Comptes Rendus. LVIII. p. 1111. Annales scientifiques de l'école normale supérieure. T. IV.

5) *Ångström,* Recherches sur le spectre solaire. Berlin 1869.

6) *Eisenlohr,* Poggend. Annal. Bd. XCVIII.

Beugungsbild dann am Fadenkreuz des Beobachtungsfernrohrs erscheint. Zur Controle, wenn man auf diese Weise eingestellt hat, dient dann die Messung einer bestimmten Linie im ersten Seitenspectrum an beiden Seiten. Der auf beiden Seiten gemessene Winkel α muss dann ganz genau derselbe sein. Ist das nicht der Fall, so beweist das, dass die Flächen der Platte nicht genau parallel sind, und dass deshalb das ungebeugte Licht nicht vollständig parallel der Gitternormale austritt. Ist der Unterschied der Winkel nur klein, so genügt es, als Werth von α zur Berechnung die halbe Summe der beiden beobachteten Werthe zu nehmen; ist der Unterschied indess beträchtlich, so muss man ihn in anderer Weise in Rechnung ziehen. Die vollständig durchgeführte Theorie der Beugung liefert dann für die Lage des ersten Maximums folgenden Ausdruck. Ist φ der Winkel, den die ungebeugten Strahlen mit der Gitternormale bilden, α_1 die Ablenkung des am stärksten abgelenkten Maximums, es liegt auf derselben Seite der Normalen, auf der die ungebeugten Strahlen liegen, α_2 die Ablenkung des weniger abgelenkten auf der andern Seite, so ist

$$\sin(\alpha_1 + \varphi) - \sin\varphi = \frac{\lambda}{a},$$

$$\sin(\alpha_2 - \varphi) + \sin\varphi = \frac{\lambda}{a}.$$

Hat man das Gitter durch Reflexion des Fadenkreuzes orientirt, so beobachtet man φ direkt, indem man die Richtung der ungebeugten Strahlen bestimmt, sonst erhält man φ aus der Gleichung

$$\tang\varphi = \frac{\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2}{2 - (\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)},$$

die sich unmittelbar aus den beiden obigen Gleichungen ergibt. Zur Controle des Werthes von φ kann man eine Reihe von Werthen α für verschiedene λ im ersten Spectrum messen, kann aber auch die folgenden Seitenspectra benutzen, denn für das zweite, dritte etc. Seitenspectrum tritt nur auf die rechte Seite beider obigen Gleichungen anstatt $\frac{\lambda}{a}$ ein $2\frac{\lambda}{a}$, $3\frac{\lambda}{a}$ ...., von denen, wie im §. 65 gezeigt wurde, nur die Spectra ausfallen, für welche, wenn b die Breite der Oeffnungen ist, $m\frac{b}{a}$ eine ganze Zahl ist. Würde also zufällig $a = 2b$ sein, so würden das 2, 4, 6 .. Seitenspectrum ausfallen und nur die ungeradzahligen übrig bleiben. Man erkennt das Verhältniss $\frac{b}{a}$ leicht aus dem Sprung in den für dieselbe Linie in den verschiedenen Spectren gefundenen Werthen von $\sin\alpha$, welche eine arithmetische Progression bilden, deren Differenz der $\sin\alpha$ für das erste Seitenspectrum ist. Fehlt in derselben das m. Glied, so ist $mb = a$.

Die Messung der Wellenlängen des ultravioletten Lichtes ist auf diese Weise direkt nicht möglich, da man das Spectrum nicht direkt sehen kann. Zur Bestimmung derselben benutzte deshalb Eisenlohr die Fluorescenz; er

stellte vor ein in Russ getheiltes Gitter, welches in einer Breite von 54 Millimeter 1440 Linien hatte, eine achromatische Sammellinse, und liess ein schmales von einem Heliostaten reflectirtes Strahlenbündel senkrecht auf das Gitter auffallen. In der Brennweite der Linse befand sich ein mit Chininlösung getränkter Papierschirm; auf diesem stellte sich dann das Beugungsbild objectiv dar, und an den durch die Wellenlängen λx der unsichtbaren Strahlen bestimmten Stellen

$$\sin \alpha = \frac{\lambda x}{2b}$$

wurden dieselben durch Fluorescenz sichtbar. Der Winkel α wurde dann durch Messung des Abstandes des Schirmes vom Gitter und des Abstandes der betreffenden dunklen Linie des Spectrums von dem Punkte des Schirmes, wo er von den ungebeugten Strahlen getroffen wurde, bestimmt. Ist z der Abstand des Schirmes vom Gitter und x der Abstand auf dem Schirme der betreffenden Linie von der Mitte des Beugungsbildes, so ist

$$\tan \alpha = \frac{x}{z}, \quad \sin \alpha = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + z^2}}$$

$$\lambda x = 2b \cdot \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + z^2}}.$$

Mascart benutzte die chemische Wirkung der ultravioletten Strahlen, indem er in der §. 46 angegebenen Weise das Beugungsspectrum photographirte, und die Lage der dunklen Linien in dem photographirten Spectrum bestimmte.

Wir geben in folgenden beiden Tabellen eine Zusammenstellung der verschiedenen Messungen der hauptsächlichsten Strahlen des Spectrums, und zwar in Tabelle I die der sichtbaren Strahlen nach Fraunhofer, van der Willigen, Ditscheiner, Ångström und Stefan [1]), welche sämmtlich absolute Messungen ausgeführt haben, welche also die Werthe a ihrer Gitter und c gemessen haben. Die von Stefan erhaltenen Werthe sind nach einer andern Methode erhalten, welche derjenigen der Talbot'schen Linien ähnlich ist, und welche wir im letzten Kapitel besprechen werden.

Die zweite Tabelle enthält die Messungen von Mascart und Esselbach, welche nur relative sind. Esselbach nahm die Fraunhofer'schen Werthe für C und H als gegeben an, Mascart ging von dem von Fraunhofer gegebenen Werthe für D aus.

Die Anordnung der Tabellen ist wohl ohne Weiteres verständlich, nur in Betreff der Bezeichnung der Streifen sei bemerkt, dass in der ersten Columne der ersten Tabelle die Bezeichnung nach Fraunhofer, in der zweiten nach Kirchhoff gegeben ist. In der zweiten Tabelle sind die Linien so bezeichnet, wie sie von Mascart und Esselbach bezeichnet sind. Die Wellenlängen sind sämmtlich in zehntausendstel Millimeter gegeben.

[1]) *Stefan*, Berichte der Wiener Akademie. LIII. Man sehe §. 90.

Tabelle der Wellenlängen der hauptsächlichsten Strahlen im sichtbaren Spectrum.

Bezeichnung der Strahlen nach		Wellenlängen in $0^{mm},0001$ nach				
Fraunhofer	Kirchhoff	Fraunhofer	van der Willigen	Ditscheiner	Ångström	Stefan
A	—	—	7,609	—	7,604	—
a	—	—	7,189	—	7,183	—
B	593	6,878	6,871	6,883	6,867	6,873
C	694	6,564	6,565	6,571	6,562	6,578
D_1	1002,8	5,888	5,898	5,905	5,895	5,893
D_2	1006,8		5,896	5,899	5,889	
E	1523	5,265	5,272	5,278	5,269	5,271
b_1	1634	—	5,186	5,192	5,183	—
b_2	1648,8	—	5,175	5,181	5,172	—
F	2080,1	4,851	4,864	4,868	4,860	4,869
$H\gamma$	2797	—	4,342	4,346	4,340	—
G	2854,7	4,292	4,311	4,317	4,307	4,291
H_1	—	3,945	3,971	3,974	3,968	3,959
H_2	—		3,938	3,940	3,933	

Die Fraunhofer'schen Zahlen sind das Mittel aus den drei sehr wenig von einander verschiedenen Angaben Fraunhofer's. $H\gamma$ ist die dritte Linie des Wasserstoffspectrums, dessen beide ersten mit C und F zusammenfallen.

Tabelle der Wellenlängen im unsichtbaren Theile des Spectrums.

Bezeichnung der Strahlen	Wellenlängen in $0^{mm},0001$	
	Esselbach	Mascart
B	6,874	6,867
C	6,564	6,561
D	5,886	5,888
E	5,260	5,268
F	4,845	4,860
G	4,287	4,307
H	3,929	3,967
L	3,791	3,819
M	3,657	3,729
N	3,498	3,580
O	3,360	3,440
P	3,290	3,360
Q	3,232	3,286
R	3,091	3,177

Von O ab stimmen die Zahlen nicht besonders überein, es scheint fast als wenn Mascart als O einen zwischen N und O nach Esselbach liegenden Streifen genommen, und dann das Esselbach'sche O als P u. s. f. bezeichnet hat.

Schliesslich mögen noch die ebenfalls vielfach benutzten Wellenlängen des Lithiumlichtes, roth, und des Thalliumlichtes, grün, angegeben werden, wie sie Ketteler[1]) mit Zugrundelegung der Fraunhofer'schen Zahl für D erhielt. Ketteler benutzte dazu die Newton'schen Ringe bei grossen Gangunterschieden, wie sie Fizeau zuerst dargestellt hat; er beleuchtete eine der Fizeau'schen ähnliche Vorrichtung gleichzeitig mit Lithium- und Natriumlicht oder mit Thallium- und Natriumlicht, und zählte die Anzahl der verschieden gefärbten Ringe, welche zwischen je zwei Coincidenzen lagen, das heisst zwischen zwei Stellen, wo die verschieden gefärbten Ringe auf einander fielen. Die Wellenlängen verhalten sich dann umgekehrt wie die Anzahl der Ringe zwischen je zwei Coincidenzen. In dieser Weise erhielt Ketteler für die Verhältnisse

$$\frac{\lambda_L}{L_N} = 1,138953; \quad \frac{\lambda_N}{\lambda_{Th}} = 1,101570$$

und daraus

$$\lambda_L = 6,706; \quad \lambda_{Th} = 5,345.$$

Zweites Kapitel.

Die Polarisation des Lichtes.

§. 68.

Polarisation des Lichtes. Bei den bisher beschriebenen Erscheinungen der Reflexion und Brechung, sowie bei denen der Interferenz und Beugung des Lichtes nahmen wir an, dass die Richtung und Intensität der verschiedenen Theile, in welche an irgend einer Stelle das ankommende Licht zerlegt wird, nur abhängig seien von der Richtung, in welcher das Licht an jener Theilungsstelle, also z. B. an der brechenden Fläche ankommt. Ebenso nahmen wir an, dass die Resultirende bei der Interferenz jener Theile des ankommenden Lichtes nur abhängig sei von der Wegedifferenz der Strahlen oder der Phasendifferenz, welche ihnen auf diesen Wegen ertheilt ist. Dadurch wird angenommen, dass ein Lichtstrahl in keiner Beziehung zum Raume steht, ausgenommen diejenige, durch welche seine Fortpflanzungsrichtung bestimmt ist; dass der Lichtstrahl rings um seine Fortpflanzungsrichtung sich ganz gleichmässig verhalte, so zwar, dass eine Drehung des Strahles um die Rich-

1) *Ketteler*, Beobachtungen über die Farbenzerstreuung der Gase. Bonn 1865.

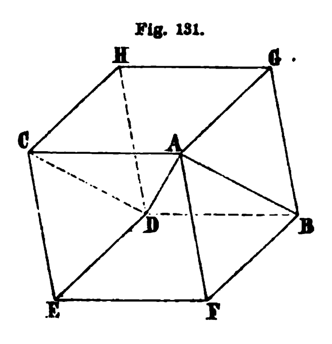
tung der Fortpflanzung als Axe durchaus keine Aenderung in den Lichterscheinungen veranlasse. Es gibt jedoch eine Anzahl von Fällen, wo das nicht mehr der Fall ist.

Unter gewissen Verhältnissen gebrochen oder reflectirt ändern sich die Lichterscheinungen, wenn man den Strahl um seine Fortpflanzungsrichtung als Axe dreht; in der einen Lage reflectirt oder gebrochen, wird er es nicht, wenn man ihn um 90° dreht. Man nennt das so modificirte Licht polarisirt.

Der erste, welcher ein verschiedenes Verhalten der Lichtstrahlen bei einer Drehung derselben um sich selbst als Axe beobachtete, war Huyghens[1]). Er fand, dass ein durch einen isländischen Doppelspath hindurchgegangener Lichtstrahl im Allgemeinen in zwei Lichtstrahlen von gleicher Intensität getheilt werde, ausser wenn der Lichtstrahl parallel der Richtung der krystallographischen Hauptaxe hindurchtritt. Lässt man nun einen der beiden aus dem Krystall austretenden Strahlen neuerdings auf einen Kalkspathkrystall fallen, so zeigt sich, dass der Lichtstrahl auch dann noch im Allgemeinen in zwei zerlegt wird, dass aber die beiden Strahlen eine verschiedene Intensität haben, und dass es jetzt, wie auch die Neigung des durchtretenden Strahles gegen die krystallographische Hauptaxe des zweiten Krystalles ist, immer zwei Lagen des letztern gibt, in welchen einer der beiden Strahlen verschwindet, in welchen also der auf den Krystall auftreffende Strahl durch den Krystall hindurchtritt ohne in zwei zerlegt zu werden. Achtet man auf die relative Lage der beiden Krystalle, so zeigt sich dabei eine innige Beziehung zwischen einer gewissen durch den Lichtstrahl gelegten Ebene und einer bestimmten Ebene des Krystalles.

Der Kalkspath (kohlensaurer Kalk) findet sich in der Natur in der Gestalt von klaren Krystallen, welche eine parallelepipedische Form haben. Die Seitenflächen dieser Krystalle sind Parallelogramme (Fig. 131), deren stumpfe Winkel 101° 53′ und deren spitze Winkel 78° 5′ betragen. Weil diese Flächen Structurflächen sind, nach welchen der Krystall vollkommen spaltbar ist, so kann man durch Spaltung leicht ein Rhomboeder (Fig. 131) herstellen, ein von 6 Rhomben mit den angegebenen Winkeln begrenztes Parallelepiped. Das Rhomboeder ist eine Hemiedrie der doppelt sechsseitigen Pyramide, und die Hauptaxe geht durch die beiden Ecken A und D, in welchen drei stumpfe Winkel zusammenstossen. Legt man daher durch die kurzen Diagonalen zweier gegenüberstehender Rhomben z. B. $AFBG$ und $CEDH$ eine Ebene, so nimmt diese die Axe des Krystalles AD in sich auf. Eine solche Ebene, sowie alle mit ihr parallelen, nennt man einen Haupt-

Fig. 131.



1) *Huyghens,* Traité de la lumière. Leiden 1690.

schnitt des Krystalles. Alle diese Ebenen nehmen die Hauptaxe des Krystalles in sich auf, denn diese ist in optischer Beziehung keine bestimmte durch den Krystall gehende Linie, sondern nur eine Richtung, welche durch die Richtung der krystallographischen Hauptaxe *AD* bestimmt ist. Deshalb sind ebenso auch Ebenen, welche durch *AHDF* oder *AEGD* gelegt sind, Hauptschnitte der Krystalles. Wir bezeichnen nun in optischer Beziehung vorzüglich die Ebene als Hauptschnitt, welche durch das Einfallsloth des eintretenden Lichtstrahles und die Axe, das heisst also durch eine der Richtung *AD* parallele Richtung, gelegt ist.

In Bezug auf die Ebene des Hauptschnittes und die Richtung der Hauptaxe lassen sich die Erscheinungen am Krystall am besten fixiren. Alle parallel der Axe *AD* durch den Kystall hindurchgehenden Strahlen werden nicht doppelt gebrochen. Schleifen wir daher an den Krystall zwei Endflächen senkrecht zu *AD*, und lassen senkrecht zu diesen Ebenen ein Lichtbündel durch den Krystall hindurchgehen, so wird es nicht in zwei zerlegt.

Lassen wir aber auf die natürlichen Grenzflächen des Krystalles, und zwar der Einfachheit wegen unter senkrechter Incidenz, ein Lichtbündel fallen, so zerfällt es bei seinem Eintritte in den Krystall in zwei. Das eine geht den Brechungsgesetzen gemäss ungebrochen durch den Krystall hindurch, wir wollen es das ordentlich gebrochene nennen; das andere wird abgelenkt und zwar im Hauptschnitt gegen seine ursprüngliche Richtung verschoben. Die Grösse der Verschiebung hängt ab von der Dicke des Krystalles; das austretende Lichtbündel ist dem eintretenden parallel. Wir nennen das zweite Bündel das ausserordentlich gebrochene Bündel.

Mit den Erscheinungen der Doppelbrechung werden wir uns später beschäftigen; hier betrachten wir nur die Eigenschaften des durch den Krystall getretenen Lichtes.

Lassen wir den ordentlichen Strahl, der also dem gewöhnlichen Brechungsgesetze folgt, auf ein zweites Kalkspathrhomboeder fallen, so zwar, dass er auch dort wieder auf eine natürliche Fläche mit senkrechter Incidenz auffällt, so zeigt sich das durch den ersten Krystall hindurchgegangene Licht von dem einfallenden wesentlich verschieden. Liegt der zweite Krystall so, dass sein Hauptschnitt dem des ersten parallel ist, so wird das auf den zweiten Krystall fallende Licht nicht getheilt, es geht einfach und ungebrochen den gewöhnlichen Brechungsgesetzen gemäss hindurch. Drehen wir nun aber den zweiten Krystall um den einfallenden Lichtstrahl als Axe, so dass nach und nach der Hauptschnitt desselben mit dem Hauptschnitt des ersten Krystalles immer grössere Winkel bildet, so zeigen sich nach dem Durchtritt des Lichtes durch den zweiten Krystall wieder zwei Strahlen: ein ordentlich und ein ausserordentlich gebrochener Strahl; der im Hauptschnitt verschobene ausserordentliche Strahl ist aber von geringer Helligkeit, so lange der Winkel, den die beiden Hauptschnitte mit einander bilden, nur klein ist. Mit

dem Wachsen des Winkels nimmt die Helligkeit des ausserordentlichen Strahles zu, des ordentlichen ab, und beide Strahlen haben gleiche Helligkeit, wenn der Winkel der beiden Hauptschnitte 45⁰ beträgt. Wird der Winkel noch grösser, so überwiegt die Helligkeit des ausserordentlichen Strahles; und ist er ein Rechter geworden, stehen die beiden Ebenen senkrecht auf einander, so verschwindet der ordentliche Strahl ganz und der ausserordentliche hat eine Helligkeit, welche derjenigen des ordentlichen gleich ist, welche er bei paralleler Stellung der Hauptschnitte zeigte. Bei weiterer Drehung treten wieder zwei Strahlen auf; der verschobene Strahl nimmt an Helligkeit ab, der ordentliche nicht verschobene nimmt zu, bei 135⁰ haben beide Strahlen gleiche Helligkeit, und bilden die beiden Ebenen einen Winkel von 180⁰, d. h. stehen sie wieder parallel, so tritt der ordentliche nicht verschobene Strahl wieder allein auf. Bei weiterer Drehung von 180⁰ bis 360⁰, bis der Krystall wieder seine erste Stellung einnimmt, wiederholen sich die Erscheinungen genau auf dieselbe Weise.

Lassen wir anstatt des ordentlichen den im ersten Kalkspath ausserordentlich gebrochenen also im Hauptschnitt verschobenen Strahl durch den zweiten Krystall hindurchgehen, so sind die sich zeigenden Erscheinungen den vorigen ganz ähnlich. Sind die beiden Hauptschnitte parallel oder senkrecht, so erscheint nur ein Bild, in allen übrigen Lagen zwei Bilder, welche, ausser wenn die Hauptschnitte einen Winkel von 45⁰ mit einander bilden, eine ungleiche Helligkeit besitzen. Der Unterschied zwischen diesen und den vorigen Erscheinungen ist nur der, dass bei paralleler Stellung der Hauptschnitte im zweiten Krystalle nicht wie vorher das ordentliche, sondern das ausserordentliche, verschobene, Bild auftritt; erst bei einer Drehung tritt das ordentliche Bild auf, nimmt an Helligkeit zu und ist bei einer Drehung von 90⁰ allein vorhanden. Drehen wir von da an weiter, so sind die sich jetzt darbietenden Erscheinungen genau dieselben, als wenn wir bei Anwendung des ordentlichen Strahles von der Parallelstellung der Hauptschnitte ausgehen. Es treten also in diesem Falle die mit den vorigen identischen Lichterscheinungen auf, wenn wir von einer Stellung ausgehen, bei welcher die Krystalle ursprünglich um 90⁰ gedreht sind.

Bei Anwendung des ordentlichen aus dem ersten Kalkspathe austretenden Strahles zeigt also der ordentliche aus dem zweiten Krystalle austretende Strahl folgendes. Bei paralleler Stellung der Hauptschnitte ist er fast ebenso hell als das auf den zweiten Krystall auffallende Licht; bei einer Drehung der Hauptschnitte nimmt seine Intensität immer mehr und mehr ab, und stehen die Hauptschnitte senkrecht auf einander, so ist seine Intensität gleich 0, es tritt kein ordentlicher Strahl aus dem zweiten Krystalle aus. Es zeigt sich somit, dass das aus dem ersten Krystall hervortretende Licht in demselben eine bestimmte Veränderung erfahren hat, welche es von dem einfallenden Licht unterscheidet. Dieselbe besteht darin, dass das Licht nicht unter allen Umständen im zweiten Krystall in zwei Strahlen zerfällt und nur unter ganz be-

stimmten in zwei Strahlen gleicher Intensität. Man nennt daher das aus dem Krystall austretende Licht **polarisirt**.

Die Modification lässt sich am besten dahin charakterisiren, dass das polarisirte Licht nicht rings um die Fortpflanzungsrichtung sich gleich verhält, sondern dass an ihm sich jetzt ein Rechts oder Links von einem Oben und Unten unterscheiden lässt. Denken wir uns durch den aus dem ersten Krystall austretenden Strahl eine dem ersten Hauptschnitte parallele Ebene gelegt, so können wir diese Ebene als für den Strahl charakteristisch betrachten. Ist der zweite Hauptschnitt mit dieser durch den Strahl gelegten festen Ebene parallel, so geht das Licht als ordentlicher Strahl durch den zweiten Krystall; bildet der Hauptschnitt mit dieser durch den polarisirten Strahl gelegten festen Ebene einen Winkel, so kann der Strahl immer weniger als ordentlicher durch den zweiten Krystall hindurchgehen, und steht er senkrecht zu jener festen Ebene, so kann der polarisirte Strahl gar nicht als ordentlich gebrochner durch den zweiten Krystall hindurchtreten. In Bezug auf diese feste Ebene verhält sich der Strahl ferner ganz symmetrisch; denn sobald der zweite Hauptschnitt mit dieser Ebene denselben Winkel bildet, sei es, dass er nach der einen oder nach der andern Seite gedreht sei, so ist die Intensität des aus dem zweiten Krystall austretenden ordentlichen Strahles immer dieselbe. Wir nennen daher diese Ebene die Polarisationsebene des Strahles, und den aus dem ersten Krystall austretenden ordentlichen Strahl im Hauptschnitte polarisirt.

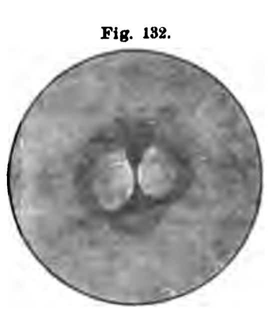
Auch der ausserordentliche aus dem ersten Krystall austretende Strahl ist polarisirt, aber jene charakteristische Ebene, mit welcher der zweite Hauptschnitt parallel sein muss, damit der Strahl ungeschwächt als ordentlicher durch den zweiten Krystall hindurchgehen kann, steht zu derjenigen im ordentlichen Strahle senkrecht; denn der zweite Hauptschnitt muss zu dem ersten Hauptschnitte senkrecht stehen, wenn der aus dem ersten Krystall austretende ausserordentliche Strahl als ordentlicher durch den zweiten Krystall hindurchtreten soll. Der aus dem ersten Kalkspath austretende ausserordentliche Strahl ist demnach der angenommenen Bezeichnung gemäss in einer Ebene polarisirt, welche senkrecht ist zum Hauptschnitt des Krystalles, also auch senkrecht zur Polarisationsebene des ordentlichen Strahles. Man nennt daher diesen Strahl senkrecht zum Hauptschnitte des ersten Krystalles polarisirt.

Aus diesen Thatsachen folgt somit, dass das auf einen Kalkspath fallende und in denselben eindringende Licht in zwei Strahlen zerlegt wird, welche senkrecht zu einander polarisirt sind. Das polarisirte Licht unterscheidet sich für das Auge kaum merkbar von dem unpolarisirten gewöhnlichen Lichte; nur bei sehr genauer Beobachtung lässt sich mit dem Auge direkt schon polarisirtes Licht erkennen, wie zuerst Haidinger[1]) gefunden hat. Sieht

1) *Haidinger*, Poggend. Annal. Bd. LXIII, LXVII, LXVIII, LXXXV, XC, XCIII, XCVI.

man durch einen Polarisationsapparat, etwa einen Kalkspath, dessen ausserordentlichen Strahl man abblendet, nach einer hellen Wolke, so sieht man im Fixationspunkt eine eigenthümliche Figur, die von Haidinger sogenannten Polarisationsbüschel. Fig. 132 zeigt dieselben nach der Zeichnung von Helmholtz [1]), wenn die Polarisationsebene vertical ist. Parallel der Polarisationsebene erscheint eine gelblich gefärbte 8, welche dunkler ist als die Umgebung, und deren schmalste Stelle im Fixationspunkt liegt; senkrecht zu dieser sieht man ähnlich geformt eine bläuliche Figur, welche heller ist als die Umgebung. Die Erscheinung dauert nur wenige Sekunden, sieht man länger bei ruhiger Haltung des Kalkspathes nach der Wolke, so verschwindet sie bald; um sie wieder hervorzurufen, hat man dann den Kalkspath um das einfallende Licht als Axe zu drehen. Die Erscheinung ist wenig markirt, und deshalb wird sie häufig übersehen; hat man sie aber einmal wahrgenommen, so sieht man sie leicht wieder. Mir erscheint die gelblich gefärbte dunkle 8 viel deutlicher als die bläuliche hellere, so dass die Zeichnung nach meinem Auge etwas anders sein würde als nach Helmholtz, der verticale Theil müsste dunkler, der horizontale weniger hell sein.

Fig. 132.



Wegen der kurzen Dauer dieser Erscheinung und der daraus entspringenden Unsicherheit der Beobachtung muss man das polarisirte Licht, um es als solches zu erkennen, mit einem Apparate untersuchen, welcher dem natürlichen Lichte selbst Polarisation ertheilt. Mit dem Kalkspathe untersucht, zerfällt das natürliche Licht stets in Bündel gleicher Helligkeit, wie man sich leicht überzeugt, und wie Malus [2]) durch photometrische Vergleichungen überdies nachwies. Polarisirtes Licht zerfällt dagegen in zwei Bündel verschiedener Helligkeit, ausser wenn der Hauptschnitt des zweiten Kalkspathes mit der Polarisationsebene des Strahles einen Winkel von 45° bildet. Durch photometrische Vergleichung des ordentlich und des ausserordentlich gebrochenen Bündels fand Malus, dass sich die Intensitätsänderung beider durch folgendes einfache Gesetz darstellen liess. Ist J^2 die Intensität des auf den Kalkspath fallenden polarisirten Lichtes, und bildet der Hauptschnitt desselben mit der Polarisationsebene des einfallenden Lichtes den Winkel α, so ist die Intensität des ordentlich gebrochenen Strahles J^2_o gleich

$$J^2_o = J^2 . \cos^2 \alpha ,$$

diejenige des ausserordentlich gebrochenen Bündels J^2_e aber

$$J^2_e = J^2 \sin^2 \alpha .$$

1) *Helmholtz*, Physiol. Optik. p. 421. Man sehe dort auch die Erklärung der Büschel aus dem Baue der Netzhaut.

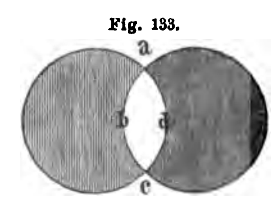
2) *Malus*, Théorie de la double réfraction. Paris 1810. Man sehe über dieses Gesetz: *Wild*, Poggend. Annal. Bd. CXVIII. p. 222 ff.

Es ist schwierig, durch direkte photometrische Messung dieses Gesetz nachzuweisen, für die Richtigkeit kann man aber einen Beleg auf sehr einfache Weise erhalten. Aus demselben folgt nämlich, dass die Summe der Intensitäten des ordentlich und ausserordentlich gebrochenen Strahles constant, und gleich der Intensität des in den Kalkspath eintretenden Lichtes sein muss, denn

$$J^2_o + J^2_e = J^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = J^2.$$

Wendet man nun als zweiten Kalkspath einen Krystall von geringer Dicke an, so fallen die beiden Lichtbündel, welche aus dem Krystall austreten, nur zum Theil aus einander. Hat das aus dem ersten Krystall austretende Lichtbündel einen kreisförmigen Querschnitt, so erscheinen auf einem hinter dem zweiten Kalkspath aufgestellten Schirme zwei kreisförmige helle Flecke, welche, wenn der Krystall keine zu grosse Dicke hat, zum Theil wie in Fig. 133 über einander fallen. Der eine dieser Kreise ist das ordentliche, der andere das ausserordentliche Bild des den Krystall durchsetzenden Strahlenbündels; dort, wo sie sich decken, in *abcd*, erscheinen auf dem Schirme beide Bündel zugleich, diese Stelle besitzt also die Summe der Helligkeiten der einzelnen Bündel. Welches nun auch die Stellung des Hauptschnittes zur Polarisationsebene des in den Krystall eindringenden Strahlenbündels ist, diese Stelle hat immer die gleiche Helligkeit; die Helligkeit dieses Fleckes ist zugleich nur wenig von der verschieden, welche sich zeigt, wenn das polarisirte Lichtbündel direkt den Schirm beleuchtet und ist gleich der, welche der eine dieser Kreise, z. B. das ordentliche Bild zeigt, wenn der Hauptschnitt der Polarisationsebene parallel ist. Der Unterschied in der Helligkeit des Fleckes *abcd* und des hellen Kreises, der auf dem Schirme erscheint, wenn das polarisirte Lichtbündel ohne Zwischensetzung des Kalkspathes denselben beleuchtet, rührt her von der geringen Menge des am Kalkspath reflectirten und in demselben absorbirten Lichtes.

Fig. 133.



Die Summe der Intensitäten des durch einen Kalkspath von unpolarisirtem Lichte erzeugten ordentlichen und ausserordentlichen Strahles ist ebenfalls bis auf diesen Unterschied gleich der Intensität des einfallenden unpolarisirten Lichtes. Daraus folgt der für das Verständniss der Polarisationserscheinungen wichtige Satz, dass durch die Polarisation nicht ein Theil des einfallenden Lichtes fortgenommen wird, sondern dass der Kalkspath das durchtretende Licht nur in zwei zu einander senkrecht polarisirte Strahlenbündel zerlegt.

§. 69.

Erklärung der Polarisation; Querschwingungen. Der Name polarisirtes Licht rührt her von der Vorstellung, welche Malus nach der Emissionstheorie von dem Wesen desselben bildete. Er nahm an, dass die Moleküle in einem unpolarisirten Strahle alle möglichen, in einem polarisirten Strahle das-

gegen nur eine bestimmte Richtung haben könnten. Der Akt der Polarisation bestand dann eben in der Gleichrichtung der Moleküle. Die Undulationstheorie hat diesen einmal eingeführten Namen beibehalten.

Das Phänomen der Polarisation galt lange Zeit für die Undulationstheorie als unerklärlich, und dieses war es, was Newton [1]) bestimmte, der Huyghens'-schen Theorie entgegen die Emissionstheorie aufrecht zu erhalten. Diese Unerklärlichkeit besteht aber nur so lange, als man über die Richtung der das Licht erzeugenden Aetherschwingungen eine falsche Annahme machte.

So lange man annahm, die Lichterscheinungen seien longitudinale, war allerdings der Akt der Polarisation sowie der Zustand des polarisirten Lichtes absolut unverständlich, denn dann ist keine Modification denkbar, durch welche eine Seite des Strahles von der andern verschieden sein sollte, dann muss der Strahl rings nach allen Seiten sich ganz gleich verhalten.

Anders jedoch, wenn wir annehmen, dass die Schwingungen des Aethers gegen den Lichtstrahl geneigt seien. Es ist leicht ersichtlich, dass der Lichtstrahl dann eine bestimmte Seitlichkeit haben kann; wir haben nur anzunehmen, dass die Schwingungen des Aethers in einer bestimmten durch die Fortpflanzungsrichtung gelegten Ebene vor sich gehen. Diese oder eine zu ihr senkrechte Ebene wird dann vor allen übrigen Ebenen ausgezeichnet sein, indem die schwingenden Aethertheilchen in der einen fortwährend bleiben, von der andern dagegen sich abwechselnd nach der einen oder andern Richtung entfernen.

Eine dieser beiden Ebenen wird dann die Polarisationsebene sein, welche, das lässt sich hier und bis jetzt überhaupt nicht entscheiden, so dass wir nicht entscheiden können, ob im polarisirten Lichte die Vibrationen des Aethers in der Polarisationsebene oder zu ihr senkrecht erfolgen.

Auch ein nicht polarisirter Lichtstrahl, ein solcher ohne alle Seitlichkeit lässt sich mit der Annahme von Schwingungen, welche gegen die Fortpflanzungsrichtung geneigt sind, verstehen. In dem natürlichen Lichte werden die Schwingungen des Aethers nach allen durch die Fortpflanzungsrichtung gelegten Ebenen vor sich gehen, und zwar in sehr kurzer Zeitfolge nach allen in ganz gleichem Maasse. In einem solchen Strahle kann es keine Seitlichkeit geben; denn in jeder durch den Strahl gelegten Ebene wird sich dann der Aether eine Zeitlang hin und her bewegen, und dann eine unmessbar kleine Zeit später sich von derselben abwechselnd nach der einen abwechselnd nach der andern Richtung entfernen.

Der Akt der Polarisation bestände dann darin, dass die im natürlichen Lichte nach allen Richtungen ohne Unterschied vor sich gehenden Oscillationen nach zwei zu einander senkrechten Richtungen zerlegt werden. Durch den Doppelspath würde dann nur Licht hindurchdringen können, welches entweder im Hauptschnitte oder senkrecht zu demselben seine Schwingungen

1) *Newton*, Optice liber III. quaestio 29.

vollführt. Die ankommenden Schwingungen, nach welcher Richtung sie auch geschehen, werden dann in zwei zu einander senkrechte Componenten zerlegt, deren eine im Hauptschnitt ihre Schwingungen vollführt, die andere dazu senkrecht ist, und welche sich getrennt durch den Krystall fortpflanzen.

Sehr bald nun, nachdem Malus durch seine glänzenden Entdeckungen wieder die Aufmerksamkeit der Physiker auf die Erscheinungen der Polarisation gelenkt hatte, nahmen die Begründer der neuern Undulationstheorie die Hypothese der seitlichen Schwingungen an. Young hatte das Princip der Interferenz, Fresnel die Gesetze der Lichtbeugung noch unter Annahme longitudinaler Schwingungen entwickelt, jetzt kamen beide unabhängig von einander auf die Annahme seitlicher Schwingungen [1]), also zu der Annahme, dass im polarisirten Lichte die Schwingungen des Aethers zur Fortpflanzungsrichtung senkrecht seien. Polarisirtes Licht ist nach dieser Annahme demnach solches, bei dem der ganzen Länge der Strahlen nach die Vibrationen einander parallel, also in einer durch den Strahl gelegten Ebene und zwar senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung des Lichtes vor sich gehen.

Fresnel fügte dann die weitere Annahme hinzu [2]), dass im polarisirten Lichte die Schwingungen senkrecht gegen jene Ebene geschehen, welche wir die Polarisationsebene genannt haben. Die Schwingungen des Aethers im ordentlich gebrochenen durch den Kalkspath tretenden Strahl, dessen Polarisationsebene, wie wir sahen, der Hauptschnitt des Krystalles ist, geschehen nach dieser Annahme senkrecht zum Hauptschnitte, die des ausserordentlich gebrochenen senkrecht zum Hauptschnitt polarisirten Strahlen im Hauptschnitt.

Diese letztere Annahme von Fresnel hat indess nicht allgemeine Annahme gefunden, sie beruht auf einer ganz speciellen Voraussetzung über die Natur des Aethers in doppelbrechenden Krystallen. Ihr gegenüber hat Neumann die Hypothese aufgestellt, dass die experimentell bestimmte Polarisationsebene die Ebene sei, in der die Schwingungen des Aethers im polarisirten Lichte erfolgen [3]), darauf geführt durch eine etwas andere Anschauung über die Beschaffenheit des Aethers in den doppelbrechenden Krystallen. Welche von diesen Annahmen die richtige ist, hat sich bisher nicht entscheiden lassen, da jede der beiden alle optischen Erscheinungen gleich gut erklärt, wenn man mit der Fresnel'schen Anschauung die Annahme verbindet, dass die Ursache der Brechung und Reflexion des Lichtes die verschiedene Dichtigkeit des Aethers in den verschiedenen Medien ist, während man mit der Neumann'schen Hypothese die Annahme verbinden muss, dass die Dichtigkeit des Aethers in allen Medien dieselbe, aber die Elasticität eine verschiedene ist, und zwar

---

1) *Fresnel,* Mémoires de l'Acad. royale de France. T. VII. Poggend. Annal. Bd. XXIII.

2) *Fresnel* a. a. O., P. A. XXIII. p. 387.

3) *Neumann,* Poggend. Annal. Bd. XXV. p. 451.

so, dass sie in den stärker brechenden Medien, in denen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit geringer ist, die kleinere ist. Wir werden bei der Reflexionstheorie auf diese Uebereinstimmung hinweisen.

Auf die verschiedenen Versuche, experimentell über die Frage zu entscheiden[1]), gehen wir nicht ein, da wie vorhin bemerkt wurde kein einziger einwurfsfrei ist. Da wir bisher angenommen, dass die optische Verschiedenheit der verschiedenen Medien in einer verschiedenen Dichtigkeit des Aethers besteht, so werden wir im Folgenden die Annahme Fresnel's beibehalten.

§. 70.

Experimenteller Nachweis der Querschwingungen. Die Annahme, dass das polarisirte Licht aus Schwingungen bestehe, welche zur Fortpflanzungsrichtung des Lichtes senkrecht sind, war zunächst eine Hypothese, welche der ursprünglichen Theorie, dass das Licht aus Schwingungen des Aethers bestehe, hinzugefügt wurde, um die Polarisation des Lichtes verstehen zu können. Bald indess gelangte Fresnel in Gemeinschaft mit Arago dahin, experimentell den Nachweis zu führen, dass, wenn überhaupt das Licht in einer vibrirenden Bewegung des Aethers bestehe, die Schwingungen nur transversale sein könnten, dass also die Annahme derselben nicht eine neue der ursprünglichen Theorie hinzugefügte Hypothese sei, sondern eine nothwendige Folge aus dem einen obersten Grundsatze, dass das Licht eine schwingende Bewegung sei, und aus den beobachteten Thatsachen. Diese Thatsachen sind die Interferenzerscheinungen des polarisirten Lichtes, welche Fresnel und Arago in den vier

---

1) *Nörremberg*, Müller-Pouillet, Lehrbuch der Physik. 7. Aufl. Bd. I. p. 810.
Haidinger, Poggend. Annal. Bd. LXXXVI u. XCVI.
Ångström, Poggend. Annal. Bd. XC.
Stokes, Cambridge Philosophical Transactions. Bd. IX.
Fr. Eisenlohr, Poggend. Annal. Bd. CIV.
Lorenz, Poggend. Annal. Bd. CXI u. CXIV.
Mascart, Comptes Rendus. T. LXIII. p. 1005.
Lallemand, Comptes Rendus. T. LXIX. p. 189 u. 282. p. 917.
Cauchy, Moigno Repertoire d'Optique moderne. T. I.
folgern aus Versuchen oder theoretischen Entwicklungen die Annahme Fresnel's.
Babinet, Comptes Rendus. T. XXIX. p. 514.
Holtzmann, Poggend. Annal. Bd. XCIX.
Jamin, Annales de chim. et de phys. 3. Sér. T. LIX.
Quincke, Poggend. Annal. Bd. CXVIII.
leiten aus ihren Versuchen die Annahme Neumann's als die richtige ab. Die Einwürfe gegen die frühern Versuche gibt kurz Quincke an; dass Quincke's Versuch nicht beweisend ist, geht aus dessen spätern eigenen Versuchen hervor, auf welche wir demnächst noch zurückkommen. Quincke's Beweisführung beruht nämlich auf der Voraussetzung, dass die Reflexion in der geometrischen Grenze zweier Medien stattfinde, während seine spätern Versuche beweisen, dass bei jeder Reflexion ein Eindringen des Lichts in das zweite Medium stattfindet.

nach ihnen benannten Gesetzen aussprachen[1]). Die beiden ersten dieser Gesetze liegen dem Beweise der Querschwingungen zum Grunde. Dieselben sind:

1) Zwei polarisirte Lichtstrahlen, deren Polarisationsebenen einander parallel sind, interferiren wie gewöhnliches Licht.

2) Zwei polarisirte Lichtstrahlen, deren Polarisationsebenen zu einander senkrecht sind, interferiren gar nicht. Sie geben immer dieselbe Intensität bei ihrem Zusammenwirken, die Phasendifferenz mag sein, welche sie will.

Diese beiden Gesetze wurden von Fresnel und Arago im Jahre 1816 entdeckt; der Nachweis derselben ist auf verschiedenste Weise zu führen. Der einfachste ist folgender. Zwischen die Lichtlinie und die Spiegel beim Fresnel'schen Spiegelversuch bringt man einen Kalkspathkrystall, und lässt von den beiden den Krystall verlassenden Strahlenkegeln nur den einen, entweder den ordentlich gebrochenen oder den ausserordentlich gebrochenen auf die Spiegelcombination fallen. Auf einem in der früher angegebenen Weise vor den Spiegeln aufgestellten Schirme erscheinen dann die Interferenzstreifen gerade so wie im gewöhnlichen unpolarisirten Lichte.

Um das zweite Gesetz nachzuweisen, wandten die beiden Physiker einen Turmalinkrystall an. Derselbe besitzt, wie der Kalkspath, die Eigenschaft, das in ihn eintretende Licht in zwei zu einander senkrecht polarisirte Strahlen zu zerlegen; hat dabei aber die Eigenthümlichkeit, von diesen beiden nur einen, nämlich den ausserordentlich gebrochenen Strahl hindurch zu lassen.

Man erhält also durch eine Turmalinplatte nur einen polarisirten Lichtstrahl. Der Turmalin krystallisirt wie der Kalkspath im hexagonalen System; der aus demselben austretende Strahl ist senkrecht zur Axe des Krystalles polarisirt. Aus einer Platte, deren Flächen einander und der Axe des Krystalles parallel sind, schneidet man zwei gleiche Stücke heraus. Man bringt diese beiden Stücke dann vor zwei enge Oeffnungen, durch welche man Licht in ein dunkles Zimmer dringen lässt. Wenn nun die Platten so vor den Oeffnungen angebracht sind, dass die Krystallaxen auf einander senkrecht stehen, wodurch auch die Polarisationsebenen der durch die beiden hindurchgehenden Strahlen zu einander senkrecht werden, so interferiren die durch beide Oeffnungen dringenden Strahlen nicht, es treten nur die jeder einzelnen Oeffnung angehörigen Beugungserscheinungen auf. Sobald aber die Platten etwas gedreht werden, so dass die Axen nicht mehr zu einander senkrecht sind, treten auch wieder die Interferenzstreifen auf, welche von der Einwirkung der durch die verschiedenen Oeffnungen eintretenden Strahlen auf einander herrühren.

„Dieser Versuch lehrt, sagt Fresnel[2]), dass zwei Lichtbündel, die nach unter sich rechtwinkligen Ebenen polarisirt sind, bei ihrer Vereinigung Licht geben von gleicher Intensität, wie viel auch der Unterschied in den Wegen

---

1) *Fresnel* u. *Arago,* Annales de chim. et de phys. Bd. X.

2) *Fresnel,* Mémoires de l'Acad. royale de France. T. VII. Poggend. Annal. Bd. XXIII. Oeuvres complètes. T. I.

betrage, die sie von ihrer gemeinschaftlichen Quelle an durchlaufen haben. Aus dieser Thatsache folgt nothwendig, dass in den beiden Lichtbündeln die Vibrationen gegen einander und gegen die Richtung der Strahlen senkrecht sind."

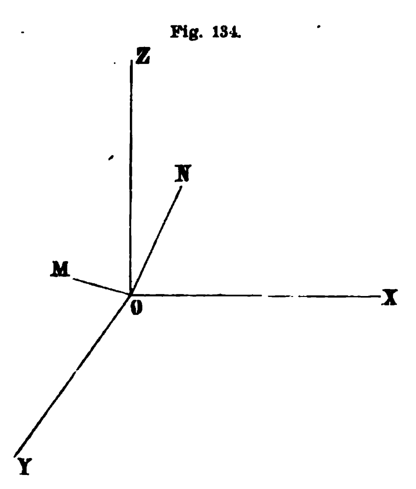


Fig. 134.

Es lässt sich das leicht mit Hülfe der im dritten Abschnitt des ersten Theiles entwickelten Sätze über die Zusammensetzung schwingender Bewegungen nachweisen.

Legen wir, um den Beweis zu führen, durch die den beiden Strahlen gemeinsame Fortpflanzungsrichtung OX (Fig. 134) ein dreiaxiges rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Axe X mit der Fortpflanzungsrichtung der Strahlen zusammenfällt, dessen Axen Y und Z dazu senkrecht sind. Nun soll ferner die Richtung, in welcher die Theilchen oscilliren, bei dem einen Strahle OM mit den Axen die Winkel bilden $MOX = \alpha$, $MOY = \beta$, $MOZ = \gamma$, bei dem zweiten Strahle ON die Winkel $NOX = \alpha'$, $NOY = \beta'$, $NOZ = \gamma'$.

Seien nun die Gleichungen der beiden Strahlen

$$V = A \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),\quad V' = B \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{\delta}{\lambda}\right),$$

so erhalten wir die nach den drei Axen gerichteten Componenten der Verschiebungen für den ersten Strahl durch

$$C_x \;\ldots\ldots\; A \,.\, \cos\alpha \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$C_y \;\ldots\ldots\; A \,.\, \cos\beta \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$C_z \;\ldots\ldots\; A \,.\, \cos\gamma \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

und, für den zweiten Strahl dem entsprechend,

$$C_x \;\ldots\ldots\; B \,.\, \cos\alpha' \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{\delta}{\lambda}\right)$$

$$C_y \;\ldots\ldots\; B \,.\, \cos\beta' \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{\delta}{\lambda}\right)$$

$$C_z \;\ldots\ldots\; B \,.\, \cos\gamma' \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{\delta}{\lambda}\right).$$

Nach dem Interferenzgesetze ist nun die resultirende Verschiebung nach jeder der drei Axen in Folge des Zusammenwirkens der beiden Strahlen einfach die algebraische Summe der Verschiebungen der einzelnen Strahlen.

Nennen wir die der X-Axe parallele resultirende Verschiebung X, so ist

$$X = A \cdot \cos\alpha \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + B \cdot \cos\alpha' \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{\delta}{\lambda}\right).$$

Wir können nun wie früher diese Summe auf die Form bringen

$$X = D_x \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{\Delta}{\lambda}\right)$$

und erhalten dann als resultirende Amplitude

$$D_x^2 = A^2\cos^2\alpha + B^2\cos^2\alpha' + 2AB \cdot \cos\alpha\cos\alpha' \cdot \cos 2\pi\frac{\delta}{\lambda}.$$

Führen wir nun dieselben Rechnungen für die Componenten der Verschiebung nach den andern Axen durch, so erhalten wir ganz entsprechende Ausdrücke für die Amplituden der nach diesen gerichteten Verschiebungen, nämlich

$$D_y^2 = A^2 \cdot \cos^2\beta + B^2\cos^2\beta' + 2AB \cdot \cos\beta\cos\beta' \cdot \cos 2\pi\frac{\delta}{\lambda}$$

$$D_z^2 = A^2 \cdot \cos^2\gamma + B^2 \cdot \cos^2\gamma' + 2AB \cdot \cos\gamma \cdot \cos\gamma' \cdot \cos 2\pi\frac{\delta}{\lambda}.$$

Diese drei nach den Richtungen der Axen stattfindenden Verschiebungen setzen sich nun zu einer Gesammtresultirenden zusammen, deren Amplitude nach §. 10 pag. 50 des ersten Bandes erhalten wird aus der Gleichung

$$R^2 = D_x^2 + D_y^2 + D_z^2.$$

Es ist somit

$$R^2 = A^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) + B^2(\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma') +$$
$$+ 2AB \cdot \cos 2\pi\frac{\delta}{\lambda}(\cos\alpha \cdot \cos\alpha' + \cos\beta \cdot \cos\beta' + \cos\gamma \cdot \cos\gamma').$$

Nach einem Satze aus der analytischen Geometrie des Raumes ist nun die Summe der Quadrate der Cosinus der drei Winkel, welche eine Richtung mit den drei Coordinatenaxen bildet, immer gleich 1, somit ist

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1$$

und deshalb

$$R^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cdot \cos 2\pi\frac{\delta}{\lambda}(\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta \cdot \cos\beta' + \cos\gamma \cdot \cos\gamma').$$

Nach dem zweiten der angeführten Gesetze ist nun die durch das Zusammenwirken zweier nach der gleichen Richtung sich fortpflanzenden senkrecht zu einander polarisirter Strahlen resultirende Intensität unabhängig von der Phasendifferenz der interferirenden Strahlen. Es muss daher

$$R^2 = \text{const.}$$

Das ist aber nur dann möglich, wenn in dem Ausdrucke für R^2 das von der Phasendifferenz δ abhängige Glied gleich 0 ist, welchen Werth auch δ haben mag. Da nun A und B jedenfalls von 0 verschieden sind, so kann das nur dadurch möglich sein, dass

$$\cos\alpha \cdot \cos\alpha' + \cos\beta \cdot \cos\beta' + \cos\gamma \cdot \cos\gamma' = 0.$$

In der analytischen Geometrie des Raumes wird nun bewiesen, dass die Summe dieser drei Producte gleich dem Cosinus des Winkels ist, welchen die beiden Richtungen mit einander einschliessen, die mit den Axen die Winkel α, β, γ resp. α', β', γ' bilden, also gleich dem Cosinus des Winkels MON, den die beiden Schwingungsrichtungen mit einander bilden. Da nun dieser Cosinus gleich 0 ist, so folgt, dass der Winkel $MON = 90^0$ ist, oder dass die Schwingungsrichtungen der beiden senkrecht zu einander polarisirten Strahlen stets zu einander senkrecht sind.

Daraus und aus dem ersten Gesetze folgt dann auch, dass die Schwingungen senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung des Lichtes sind. Denn eine Drehung der Polarisationsebene eines der beiden Strahlen bewirkt, dass die aus ihrer Interferenz resultirende Intensität von der Phasendifferenz wieder abhängig ist. Dann ist deshalb

$$\cos\alpha \, . \cos\alpha' + \cos\beta \, . \cos\beta' + \cos\gamma \, . \cos\gamma' \gtrless 0,$$

oder der Winkel, den die Schwingungsrichtungen mit einander bilden, ist kleiner wie ein Rechter.

Daraus folgt zunächst, dass in keinem Strahle die Schwingungen longitudinal erfolgen können, da dann eine Drehung der Polarisationsebene keine Aenderung des Winkels MON zur Folge haben kann.

Drehen wir aber die Polarisationsebene um 90^0, so ist nach dem ersten Gesetze

$$\cos\alpha \, . \cos\alpha' + \cos\beta \, . \cos\beta' + \cos\gamma \, . \cos\gamma' = 1,$$

also

$$\sphericalangle \, MON = 0.$$

Denn nach dem ersten Gesetze interferiren parallel polarisirte Lichtstrahlen wie gewöhnliches Licht und für dieses wird nach dem vorigen Kapitel die resultirende Amplitude bestimmt durch

$$R^2 = A^2 + B^2 + 2AB \, . \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda} \cdot$$

Wären nun die Schwingungsrichtungen der beiden Strahlen nur senkrecht zu einander, ohne es zur Fortpflanzungsrichtung des Lichtes zu sein, so würde eine Drehung des einen um die Fortpflanzungsrichtung um 90^0 nicht bewirken können, dass die Schwingungsrichtungen zusammenfielen. Sie würden dann zwar in einer Ebene liegen, aber in dieser einen gewissen Winkel mit einander bilden müssen.

Es folgt somit aus diesen beiden Gesetzen, dass im polarisirten Lichte nur Schwingungen vorhanden sein können, welche senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung des Lichtes sind, und weiter, da die in senkrecht zu einander polarisirten Strahlen vorhandenen Vibrationen immer senkrecht zu einander sind, dass in jedem die sämmtlichen Schwingungen einander parallel sind, also in einer durch den Strahl gelegten Ebene geschehen. Nach unserer Annahme ist diese Ebene senkrecht zur Polarisationsebene.

Wenn nun im polarisirten Lichte nur solche Schwingungen vorhanden sind, welche zur Fortpflanzungsrichtung des Lichtes senkrecht sind, so muss für das unpolarisirte Licht dasselbe gelten [1]). Denn wenn ein Bündel gewöhnlichen Lichtes senkrecht auf einen Kalkspathkrystall fällt, wird er in zwei polarisirte Bündel zerlegt, welche keine longitudinale Vibrationen mehr enthalten. Wären nun solche im einfallenden Lichte vorhanden gewesen, so müssten sie vollständig zerstört sein.

Dies würde aber eine Verminderung der lebendigen Kraft der Aetherbewegung und folglich eine Schwächung des Lichtes zur Folge haben. Dem widerspricht aber die Erfahrung. Denn die beiden aus dem Krystall austretenden Bündel geben bei ihrer Vereinigung ein dem einfallenden an Intensität gleiches Licht, wenn man dazu die geringe am Krystall reflectirte Lichtmenge hinzunimmt. Dass die longitudinalen Vibrationen in dieser Lichtmenge enthalten seien, kann man nicht annehmen, da dieses Licht durch einen zweiten Krystall gerade so polarisirt wird wie das Licht, welches den ersten Krystall durchstrahlt hat. Es folgt daraus, dass auch das gewöhnliche unpolarisirte Licht nur Vibrationen enthalte, welche senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung des Lichtes sind, oder dass es aus einer Zusammenhäufung oder sehr raschen Aufeinanderfolge einer grossen Menge nach allen Azimuthen polarisirter Wellensysteme bestehe.

Diesen Schluss hat Dove [2]) experimentell bestätigt. Wenn man nämlich eine grosse Menge von Elementarstrahlen, deren jeder nach einem bestimmten Azimuthe polarisirt ist, bei denen aber alle Azimuthe ganz gleichmässig vertreten sind, an einem Punkte zusammentreffen lässt, so darf der aus allen diesen Strahlen resultirende Strahl keine Spur von Polarisation zeigen.

Dove liess nun in einen abgestumpften gläsernen Hohlkegel, dessen Seite unter einem Winkel von 35° gegen die Axe geneigt war, der Axe parallel ein Bündel Sonnenstrahlen fallen. In einem bestimmten Punkte unterhalb der Axe werden alle die rings von der glänzenden Kegelfläche reflectirten Strahlen vereinigt. Wie wir demnächst sehen werden, ertheilt auch die Reflexion von einer Glasfläche, wenn das Licht gegen die reflectirende Fläche unter einem Winkel von 35° geneigt ist, dem reflectirten Lichte Polarisation, so zwar, dass die Reflexionsebene die Polarisationsebene des reflectirten Lichtes ist. Wie nun in diesem Kegel Reflexionsebenen nach allen Azimuthen vorhanden sind, da eine Kreisfläche die sämmtlichen Einfallslothe des Kegelmantels darstellt, so sind auch die Polarisationsebenen des reflectirten Lichtes, deren jedem einzelnen reflectirten Strahle eine bestimmte zukommt, nach allen Azimuthen gerichtet. Demgemäss zeigte das in der Axe des Kegels unterhalb vereinigte Licht keine Spur von Polarisation; es war also Dove gelungen, aus nur polarisirten Strahlen einen unpolarisirten Strahl herzustellen.

---

1) *Fresnel* a. a. O. Poggend. Annal. Bd. XXIII. p. 387.

2) *Dove,* Farbenlehre. p. 103. Berlin 1853.

Noch auf eine andere Weise hat Dove[1]) gezeigt, dass man das natürliche Licht als eine sehr rasche Aufeinanderfolge von nach allen Azimuthen polarisirtem Lichte betrachten kann. Er polarisirte ein Bündel Sonnenstrahlen durch einen Kalkspath und versetzte letztern dann in eine sehr rasche gleichmässige Rotation. Der Hauptschnitt desselben erhielt dadurch in rascher Folge alle möglichen Lagen, die Polarisationsebene des ordentlichen Strahlenbündels, welche dem Hauptschnitte parallel ist, erhielt demnach ebenfalls in rascher Folge alle möglichen Lagen. Durch einen zweiten Kalkspath untersucht, zeigte das austretende Strahlenbündel auch keine Spur von Polarisation; in jeder Lage des zweiten Krystalles traten aus demselben zwei Bündel gleicher Intensität.

Aus allem dem folgt, dass die Vorstellung, welche Fresnel von dem unpolarisirten Lichte gebildet hat, die richtige ist. Wir können dieselbe nach dem Vorgange dieses Physikers folgendermassen weiter ausführen[2]).

Das in einem bestimmten Momente von einer gegebenen Lichtquelle ausfliessende Licht hat eine bestimmte Polarisation, das heisst, die Aetherschwingungen geschehen nach einer bestimmten Richtung. In dem folgenden, dem ersten äusserst nahen Zeitmomente fliesst dann von der Lichtquelle ein Strahl aus, dessen Polarisationsebene gegen die des ersten geneigt ist; so folgen Strahlen auf Strahlen mit immer anderer Polarisationsrichtung, so dass an einer bestimmten Stelle im fortgepflanzten Lichtstrahle, auch während der kleinsten messbaren Zeit, die Richtung der Schwingungen alle möglichen Azimuthe durchläuft[3]).

§. 71.

Polarisation des Lichtes durch Reflexion und Brechung. Das von Huyghens entdeckte Phänomen einer Zerlegung der Lichtschwingungen nach zwei zu einander senkrechten Ebenen, denn als solche können wir nach dem Vorigen die Polarisation des Lichtes betrachten, blieb trotz des Aufsehens, welches es anfangs erregte, mehr als 100 Jahre eine vereinzelte Thatsache. Erst im Jahre 1810 brachte Malus dasselbe zu grösserer Bedeutung, als er bei seinen Untersuchungen über die Doppelbrechung die wichtige Thatsache auffand, dass es noch andere Methoden gebe, um polarisirtes Licht zu erhalten[4]). Er zeigte nämlich, dass, wenn Licht von einer Glas- oder Wasserfläche unter einem bestimmten Winkel reflectirt wurde, die reflectirten Strahlen alle die Eigenschaften erhalten, welche man bis dahin an dem durch einen

1) *Dove*, Poggend. Annal. Bd. LXXI.

2) *Fresnel*, Annales de chim. et de phys. T. XVII. Poggend. Annal. Bd. XXII.

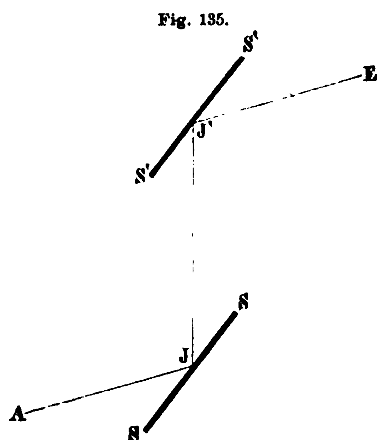
3) Man sehe über die Natur des unpolarisirten Lichtes auch *Beer*, Einleitung in die höhere Optik. p. 144 ff. *Lippich*, Berichte der Wiener Akademie. Bd. XLVIII. p. 146 ff. *Stefan*, Berichte der Wiener Akademie. Bd. L. p. 380 ff. *Verdet*, Annales de l'école normale. T. II. p. 291 ff.

4) *Malus*, Mémoires d'Arcueil. 2. p. 143.

Doppelspath hindurchgegangenen Lichte beobachtet hatte. Wenn die unter diesem Winkel reflectirten Strahlen von einem Kalkspathe aufgenommen wurden, waren die beiden denselben verlassenden Strahlen nicht von gleicher Intensität, und die Intensität beider Strahlen änderte sich je nach der Lage des Hauptschnittes des Krystalles zur Reflexionsebene. Fiel der Hauptschnitt mit der Reflexionsebene zusammen, so trat aus dem Kalkspath nur das ordentliche Bild, wurde der Krystall gedreht, so erschien auch der ausserordentliche Strahl, seine Intensität nahm zu, die des ordentlichen Strahles ab, und bildete der Hauptschnitt mit der Reflexionsebene einen rechten Winkel, so zeigte sich nur der ausserordentliche Strahl. Das reflectirte Licht verhielt sich also gerade so, wie der ordentliche Strahl des durch einen Kalkspath hindurchgegangenen Lichtes, dessen Hauptschnitt parallel der Reflexionsebene ist. Das Licht ist somit in der Reflexionsebene polarisirt.

Wenn man das durch Reflexion an einer Glasfläche polarisirte Licht einer zweiten Reflexion aussetzt, so zeigen sich in dem zweimal reflectirten Lichte ähnliche Aenderungen der Helligkeit, als wenn man von dem nach der Reflexion durch einen Kalkspath tretenden Lichte nur das ordentliche Bild betrachtet. Lässt man einen Lichtstrahl AJ auf einen Spiegel von Glas fallen, so dass der Einfallswinkel ungefähr 55° beträgt, dann ist der reflectirte Strahl JJ' in der Einfallsebene polarisirt. Stellt man nun dem ersten einen zweiten Spiegel SS' parallel gegenüber, so dass auch auf diesen der Strahl JJ' unter einem Winkel von circa 55° auftrifft, so wird der reflectirte Strahl $J'E$ an Intensität verschieden, je nach der Lage der Reflexionsebene des zweiten Spiegels. Fallen beide Reflexionsebenen wie in Fig. 135 zusammen, so ist die Intensität des reflectirten Strahles $J'E$ am grössten. Dreht man nun den zweiten Spiegel SS' um den einfallenden Strahl JJ' als Axe, so dass die Reflexionsebene dieses Spiegels mit derjenigen des ersten immer grössere Winkel bildet, so wird die Intensität des nach E reflectirten Strahles immer geringer und stehen die Reflexionsebenen der beiden Spiegel auf einander senkrecht, so wird gar kein Licht reflectirt.

Fig. 135.



Nach den Versuchen von Malus ist die Intensität des von dem zweiten Spiegel reflectirten Lichtes dem Quadrate des Cosinus desjenigen Winkels proportional, welchen die beiden Reflexionsebenen mit einander bilden. Oder ist die Intensität des reflectirten Lichtes J, wenn die beiden Ebenen wie in Fig. 135 parallel sind, so ist sie

$$J \cdot \cos^2 \alpha,$$

wenn die beiden Ebenen einen Winkel α mit einander bilden. Dieses Gesetz ist eine nothwendige Folge der entwickelten Beschaffenheit des polarisirten Lichtes und der Beobachtung, dass unter dem angegebenen Winkel von einem Glasspiegel nur Licht reflectirt wird, welches parallel der Reflexionsebene polarisirt ist. Denn fällt dann auf den Spiegel Licht, welches nach einer Ebene polarisirt ist, welche mit der Reflexionsebene den Winkel α bildet, so kann nur jene Componente der Schwingungen reflectirt werden, welche bei einer Zerlegung der Schwingungen des einfallenden Lichtes in eine zur Reflexionsebene senkrechte und eine zu ihr parallele Componente senkrecht zur Reflexionsebene ist. Da die Schwingungen im einfallenden Lichte mit der zur Reflexionsebene senkrechten Ebene den Winkel α bilden, so ist jene Componente proportional $\cos \alpha$. Die dem Quadrate der Amplituden proportionale Intensität des nach der Reflexionsebene polarisirten Lichtes, und daher auch die des reflectirten ist somit dem Quadrate des $\cos \alpha$ proportional.

Weiterhin zeigte Malus, dass nicht nur Glas oder Wasser, sondern alle durchsichtigen Substanzen dem Lichte die gleiche Modification ertheilen, dass jedoch der Einfallswinkel, unter welchem dieses geschah, und den er den Polarisationswinkel nannte, für die verschiedenen Substanzen verschieden sei. Er war jedoch nicht im Stande eine Beziehung zwischen dem Polarisationswinkel und den sonstigen optischen Eigenschaften der Mittel aufzufinden.

Diese Entdeckung war dem experimentellen Scharfsinne Brewster's vorbehalten[1]; in seiner auf dieses Ziel gerichteten Untersuchung fand er, dass die Tangente des Polarisationswinkels gleich dem Brechungsexponenten des Mittels ist. Bezeichnen wir demnach den Polarisationswinkel mit p, den Brechungsexponenten des Mittels, dem er angehört, mit n, so ist

$$\operatorname{tang} p = n.$$

Bezeichnen wir nun den Brechungswinkel, wenn das Licht unter dem Polarisationswinkel auf die brechende Fläche trifft, mit p', so ist zugleich

$$\frac{\sin p}{\sin p'} = n,$$

somit

$$\frac{\sin p}{\sin p'} = \operatorname{tang} p = \frac{\sin p}{\cos p},$$

oder

$$\sin p' = \cos p,$$

das heisst, der Brechungswinkel ergänzt den Einfallswinkel zu einem Rechten. Daraus folgt dann weiter, dass der Winkel, den der einfallende oder reflectirte Lichtstrahl mit der brechenden Fläche bildet, gleich ist dem Brechungswinkel, und derjenige, welchen der gebrochene Strahl mit der brechenden Fläche bildet, gleich ist dem Einfallswinkel, und daraus weiter, dass der reflectirte Strahl senkrecht ist zu dem gebrochenen Strahle.

---

1) *Brewster,* Philos. Transact. f. the year 1815. *Seebeck,* Poggend. Annal. Bd. XX.

Wenn Licht unter einem andern als dem Polarisationswinkel eine reflectirende Fläche trifft, so zeigt sich auch dann das reflectirte Licht modificirt; es ist theilweise polarisirt. Lässt man nämlich einen so reflectirten Strahl auf eine zweite Fläche unter dem Polarisationswinkel auffallen, so besitzt der reflectirte Strahl die grösste Intensität, wenn die beiden Einfallsbenen einander parallel sind, die kleinste, wenn sie zu einander senkrecht sind; indess verschwindet dann der reflectirte Strahl niemals vollständig. Dasselbe zeigt sich bei einer Untersuchung des so reflectirten Lichtes mit dem Kalkspath. Bei keiner Stellung des Hauptschnittes zur Reflexionsebene verschwindet eines der beiden Bilder ganz vollständig; indess, wenn der Hauptschnitt der Reflexionsebene parallel ist, besitzt das ordentliche, wenn er zu ihr senkrecht ist, das ausserordentliche die grösste Intensität.

Um die Erscheinungen der theilweisen Polarisation zu erklären, nimmt die Undulationstheorie an, dass in diesem nicht alle Schwingungen einer Ebene parallel seien, sondern dass nach einer Ebene nur mehr Schwingungen erfolgen als nach allen übrigen Ebenen.

Bei der Untersuchung des gebrochenen Lichtes fand Malus [1]), dass auch dieses zum Theil polarisirt sei, dass aber die Polarisationsebene nicht, wie beim reflectirten Lichte, der Einfallsebene parallel, sondern zu ihr senkrecht sei. Er erkannte, dass beide in zu einander senkrechten Ebenen polarisirten Strahlen in innigster Beziehung zu einander stehen, und sprach den Satz aus, dass, wenn auf irgend eine Weise aus natürlichem Lichte ein polarisirter Strahl entstehe, zugleich ein zweiter entstehen müsse, welcher zu dem ersten senkrecht polarisirt sei; ein Satz, welcher nach dem Bisherigen eine nothwendige Folge der Undulationstheorie ist, und welchen Arago dann später genauer dahin aussprach, dass die Mengen des polarisirten Lichtes in diesen beiden Strahlen, hier also im reflectirten und gebrochenen absolut gleich seien.

Wenn ein in einer Glasplatte gebrochener und dadurch theilweise polarisirter Lichtstrahl auf eine zweite Glasplatte fällt, so wird seine Polarisation dadurch verstärkt. Dasselbe findet bei einer dritten, vierten, *n* ten Brechung statt, so dass durch vielfache Brechungen ebenfalls vollständig polarisirtes Licht erhalten werden kann.

§. 72.

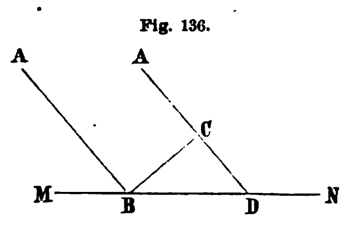
Reflexion des polarisirten Lichtes. Die Beobachtungen von Malus und Brewster über die Polarisation des Lichtes bei der Reflexion lassen sich durch eine theoretische Entwicklung als im Wesen der Undulationstheorie begründet erkennen. Eine Untersuchung der Intensität des reflectirten Lichtes, wenn es in oder senkrecht zur Reflexionsebene polarisirt ist, führte

1) *Malus,* Mémoires de l'Institut 1810. p. 105. *Brewster,* Philos. Transact. f. the year 1816 and f. 1830.

Fresnel[1]) zu Ausdrücken, welche die Beobachtungen von Malus und Brewster vollständig wiedergaben. Indess ist hier zu bemerken, dass sowohl die Beobachtungen von Malus und Brewster als auch die Theorie von Fresnel nur annähernd richtige Resultate geben, oder eigentlich nur für einen idealen Fall, der nur für wenige Körper in der Natur realisirt ist, gültig sind. Die Aenderungen, welche nach spätern Untersuchungen an dieser Theorie angebracht werden müssen, und die sich in der Erscheinung dadurch zeigen, dass in der That durch Reflexion kein vollständig geradlinig polarisirtes Licht entsteht, werden wir später besprechen.

Um die Intensität des reflectirten Lichtes zu erhalten, nimmt Fresnel zunächst an, dass der Uebergang der Dichtigkeit des Aethers von derjenigen des ersten Mittels zu derjenigen des zweiten Mittels kein allmählicher, sondern ein plötzlicher sei, und dass die Grenzschicht, in welcher die Reflexion und Brechung stattfindet, sowohl als letzte Schicht des ersten Mittels, wie auch als erste Schicht des zweiten Mittels angesehen werden kann. Wenn nun an der Grenze zweier Mittel eine Wellenbewegung ankommt, so ist die vibrirende Bewegung der Moleküle in der Grenzschicht anzusehen als die letzte Bewegung in der einfallenden Welle, als die erste der reflectirten Welle, und da die Grenzschicht auch dem zweiten Mittel angehört, als die erste Bewegung der gebrochenen Welle. Ist daher *BC* eine an der Grenze *MN* zweier Mittel ankommende Lichtwelle, so werden die mit *MN* parallelen Componenten der in derselben stattfindenden Vibrationen als zu den Schwingungen im ersten Mittel oder als zu denen im zweiten Mittel gehörig betrachtet werden können.

Fig. 136.



Daraus folgt dann, dass die algebraische Summe der in der Grenzfläche stattfindenden Verschiebungen, jede natürlich mit ihrem Vorzeichen genommen, welche dem einfallenden und dem reflectirten Lichte angehören, gleich sein muss der augenblicklichen Verschiebung, parallel der Grenzfläche in der gebrochenen Lichtwelle. Was aber von den augenblicklichen Verschiebungen gilt, das gilt auch von den Amplituden, so dass wir ebenfalls behaupten können, dass die Summe der der brechenden Fläche parallelen Componenten der Amplituden der einfallenden und reflectirten Welle gleich sein muss derselben Componente der Amplitude in der gebrochenen Welle.

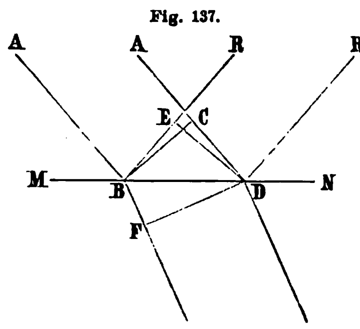
Fresnel glaubte diese Uebereinstimmung der Verschiebungen auf die der Grenzfläche parallelen Componenten der Bewegung beschränken zu müssen; indess ist dafür kein hinreichender Grund vorhanden, denn auch die zur Grenzfläche senkrechten Componenten der in der Grenze stattfindenden Schwingun-

1) *Fresnel,* Annales de chim. et de phys. XLVI. p. 225. Poggend. Annal. Bd. XXII. p. 90. Oeuvres complètes. T. II. p. 767.

gen gehören der einfallenden Welle als letzte, der reflectirten und gebrochenen Welle als erste Bewegung an. Für diese Componenten können wir aber, wie Cornu [1]) zuerst nachgewiesen hat, nicht aus dieser Uebereinstimmung folgern, dass die algebraische Summe der dem ersten Mittel angehörigen Verschiebungen einfach gleich sein muss den in der gebrochenen Welle stattfindenden Verschiebungen. Denn bei der von der Grenzfläche aus gegen das zweite Medium gerichteten Bewegung finden die Schwingungen in einem Medium von anderer Dichte statt, es wird durch dieselben demnach eine andere Aethermasse in Bewegung gesetzt, als bei den Schwingungen im ersten Medium. Die Massen des im zweiten und ersten Medium bewegten Aethers verhalten sich hier direkt wie die Dichtigkeiten des Aethers im zweiten und ersten Mittel. Da nun die Schwingungsdauer in beiden Medien dieselbe ist, so müssen sich in jedem Momente die Geschwindigkeiten umgekehrt verhalten wie die bewegten Massen. Was aber von den Geschwindigkeiten gilt, das gilt auch von den Amplituden der Schwingungen, oder auch diese müssen sich umgekehrt verhalten wie die Dichtigkeiten des Aethers in beiden Medien. Anstatt also die Verschiebungen einfach gleich zu setzen, müssen wir vielmehr die Bedingung ausdrücken, dass sie sich umgekehrt verhalten wie die Dichtigkeiten, oder wir haben zunächst das Product aus jeder Verschiebung und der Dichtigkeit des Mediums, in der sie stattfindet, das ist die Bewegungsgrösse der betreffenden Schwingungen zu bilden, und die Summe der Bewegungsgrössen im ersten der Bewegungsgrösse im zweiten Medium gleich zu setzen.

Diese Sätze liefern uns nun sofort je nach der Richtung der Schwingungen verschiedene Gleichungen. Nehmen wir zunächst an, dass das ankommende Licht parallel zur Einfallsebene polarisirt sei, so geschehen die Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene, somit parallel der brechenden Fläche. Ist nun die Amplitude des einfallenden Lichtes gleich 1, die des gebrochenen gleich v, die des reflectirten gleich u, so ist dann

Fig. 137.



$$1 + u = v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{I.}$$

Ist aber das Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt, so geschehen (Fig. 137) die Schwingungen im einfallenden Lichte parallel BC, im reflectirten parallel DE, im gebrochenen parallel DF; wir erhalten somit für jede eine der brechenden Fläche parallele und eine zu derselben senkrechte Componente. Nennen wir nun den Einfallswinkel des Lichtes i, so ist auch der Reflexionswinkel des Lichtes i, oder da der reflectirte Strahl auf der andern Seite des Einfallslothes liegt, von dem aus der Einfallswinkel gerechnet ist, gleich $-i$. Die gleichen Winkel bilden dann auch die

1) *Cornu*, Annales de chim. et de phys. 4. Sér. T. XI.

Schwingungsrichtungen mit der brechenden Fläche, die des einfallenden i, die des gebrochenen $-i$, denn die Schwingungsrichtungen sind ebenso zu den Lichtstrahlen senkrecht, wie die brechende Fläche zum Einfallslothe, sie bilden also mit der brechenden Fläche den gleichen Winkel, wie die Strahlen mit dem Einfallslothe.

Nennen wir nun den Brechungswinkel r, so ist auch der Winkel, den die Schwingungsrichtung im gebrochenen Licht mit der brechenden Fläche bildet, gleich r.

Die drei der brechenden Fläche parallelen Componenten dieser Amplituden sind daher

$$\cos i, \quad u \cdot \cos(-i) = u \cdot \cos i, \quad v \cdot \cos r$$

und zwischen ihnen besteht die Gleichung

$$(1 + u) \cos i = v \cdot \cos r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{I a.}$$

Die zu der brechenden Fläche senkrechten Componenten der Schwingungen erhalten wir, wenn wir die Amplituden mit den Sinus der betreffenden Winkel multipliciren, sie sind

$$\sin i; \quad u \cdot \sin(-i) = -u \cdot \sin i; \quad v \cdot \sin r.$$

Um nun die zwischen diesen Componenten bestehende Beziehung zu erhalten, haben wir jede mit der Dichtigkeit des Aethers in den verschiedenen Medien zu multipliciren; ist dieselbe im ersten Mittel gleich d, im zweiten Mittel gleich d', so erhalten wir als die gleichzusetzenden Bewegungsgrössen

$$(1 - u) \sin i \cdot d = v \cdot \sin r \cdot d',$$

oder

$$(1 - u) \cdot \sin i \cdot \frac{d}{d'} = v \cdot \sin r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{a}).$$

Das Verhältniss dieser beiden Dichtigkeiten erhalten wir aus den Brechungsexponenten. Denn wir erhalten für die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes im ersten Medium

$$c = C \cdot \sqrt{\frac{e}{d}},$$

für jene im zweiten Medium, da nach der Fresnel'schen Theorie die verschiedene Dichtigkeit des Aethers es ist, welche die Verschiedenheit der verschiedenen Medien bedingt, während die Elasticität dieselbe bleibt,

$$c' = C \cdot \sqrt{\frac{e}{d'}},$$

somit

$$\frac{c^2}{c'^2} = n^2 = \frac{d'}{d} = \frac{\sin^2 i}{\sin^2 r}$$

und damit wird die Gleichung (a)

$$(1 - u) \sin r = v \cdot \sin i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{I b.}$$

Diese für die Grenze nachgewiesene Beziehung zwischen den Amplituden der Wellen im ersten und zweiten Medium muss auch ausserhalb der Grenz-

fläche bestehen; denn wir nehmen an, dass die Lichtwellen eben seien oder dass unsere Lichtbündel cylindrisch seien. Bei Fortpflanzung des Lichtes wird daher in jedem folgenden Zeitmomente nur die gleiche Menge von Aethertheilchen in Vibration versetzt; die Amplituden müssen daher nach dem Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft constant sein.

Wir können daher die Gleichungen I oder Ia und Ib zur Berechnung der reflectirten und gebrochenen Amplituden benutzen. Zur Berechnung der Amplituden u und v, wenn das Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist, reichen die Gleichungen Ia und Ib aus; wir erhalten daraus durch Elimination von v

$$(1 + u)\frac{\cos i}{\cos r} = (1 - u)\frac{\sin r}{\sin i}$$

$$u(\sin i \,.\, \cos i + \sin r \cos r) = -\left\{\sin i \cos i - \sin r \cos r\right\}$$

$$u = -\frac{\sin i \cos i - \sin r \cos r}{\sin i \,.\, \cos i + \sin r \cos r}$$

und daraus nach einigen leicht zu übersehenden Umformungen

$$u = -\frac{\operatorname{tang}(i - r)}{\operatorname{tang}(i + r)} \quad . \; . \; . \; . \quad \text{B.}$$

Für die Intensität des senkrecht zur Einfallsebene polarisirt reflectirten Lichtes folgt daraus

$$u^2 = \frac{\operatorname{tang}^2(i - r)}{\operatorname{tang}^2(i + r)}.$$

Zur Bestimmung der reflectirten Amplitude, im Falle das Licht parallel der Einfallsebene polarisirt ist, reicht die Gleichung I nicht aus, da wir in derselben noch eine zweite Unbekannte, nämlich v haben. Wir bedürfen deshalb noch einer zweiten Relation zwischen 1, u und v.

Wir gelangen zu derselben mit Hülfe des Princips von der Erhaltung der lebendigen Kraft in einem System bewegter Punkte, in welchem die Bewegungen nur Folge innerer zwischen den Punkten thätiger Kräfte ist.

Nach diesem Princip muss nämlich die lebendige Kraft der einfallenden Lichtwelle gleich sein der Summe der lebendigen Kräfte der reflectirten und gebrochenen Lichtwelle, das heisst, es muss das Product aus dem Quadrate der Oscillationsgeschwindigkeit oder der ihr proportionalen Oscillationsamplitude und der gleichzeitig in der einfallenden Welle und in den beiden andern Wellen bewegten Aethermengen gleich sein. Während nun die einfallende Welle sich von BC bis BD Fig. 137 fortpflanzt, dehnt sich die reflectirte von BD nach DE, die gebrochene von BD nach DF aus. Das Product aus dem Quadrate der Amplitude und der in dem prismatischen Raume BDC eingeschlossenen Aethermenge muss demnach gleich sein der Summe des Productes aus dem Quadrate der Amplitude des reflectirten Lichtes und der in BDE, und des Productes aus dem Quadrate der Amplitude des gebrochenen Lichtes und der in dem Raume BDF eingeschlossenen Aethermengen. Nennen wir die drei Mengen m, m', μ, so muss demnach

$$m = m' \,.\, u^2 + \mu \,.\, v^2.$$

Diese drei Aethermengen sind nun gleich den Producten aus dem Volumen des bewegten Aethers und der Dichtigkeit des Aethers in den betreffenden Mitteln.

Welches nun auch die Gestalt der einfallenden Wellenebene sein mag, das Volumen des in dem Raume BCD bewegten Aethers können wir setzen

$$V = a \,.\, BC \,.\, DC = a \,.\, BC \,.\, \sin i,$$

worin a eine von der Gestalt der Wellenebene, von der BC ein Durchschnitt ist, abhängige Constante ist.

Ebenso erhalten wir für die beiden andern Volumina

$$V' = a \,.\, DE \,.\, \sin i; \quad V'' = a \,.\, DF \,.\, \sin r.$$

Wir haben nun weiter

$$BC = BD \,.\, \cos i; \quad DE = BD \,.\, \cos i; \quad DF = BD \,.\, \cos r.$$

Die drei gleichzeitig bewegten Aethervolumina verhalten sich also wie

$$\sin i \,.\, \cos i : \sin i \,.\, \cos i : \sin r \,.\, \cos r.$$

Um nun die Massen der in den drei Wellen bewegten Aethermengen zu erhalten, haben wir die Volumina mit den Dichtigkeiten des Aethers zu multipliciren; diese sind, wie wir vorhin schon sahen,

$$d = \frac{C^2 \,.\, e}{c^2}, \quad d' = \frac{C^2 \,.\, e}{c'^2};$$

oder das Verhältniss der Dichtigkeiten ist

$$\frac{d'}{d} = \frac{c^2}{c'^2} = \frac{\sin^2 i}{\sin^2 r}.$$

Die in den drei Wellen gleichzeitig bewegten Aethermengen verhalten sich demnach zu einander wie die Quotienten

$$\frac{\sin i \,.\, \cos i}{\sin^2 i} : \frac{\sin i \,.\, \cos i}{\sin^2 i} : \frac{\sin r \,.\, \cos r}{\sin^2 r},$$

von denen die beiden ersten der im einfallenden und reflectirten Lichte gleichzeitig bewegten Aethermenge proportional sind, letzterer der in derselben Zeit im gebrochenen Licht bewegten Menge. Multipliciren wir diese Ausdrücke mit den betreffenden Quadraten der Amplituden, so wird die aus dem Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft folgende Gleichung

$$m = m'u^2 + \mu \,.\, v^2,$$

$$\frac{\cos i}{\sin i} = \frac{\cos i}{\sin i} \cdot u^2 + \frac{\cos r}{\sin r} \cdot v^2,$$

oder

$$\frac{\cos i}{\sin i}(1 - u^2) = \frac{\cos r}{\sin r} \cdot v^2,$$

und daraus

$$\sin r \,.\, \cos i\,(1 - u^2) = \sin i \,.\, \cos r \,.\, v^2 \;\ldots\ldots\; \text{II}.$$

Die Gleichungen I und II setzen uns nun in den Stand, die reflectirte Amplitude für parallel der Einfallsebene polarisirtes Licht zu berechnen.

Aus I

$$1 + u = v$$

und II folgt nämlich, indem wir die linke Seite von II durch $1 + u$, die rechte durch v dividiren, und dann rechts für v das ihm gleiche $1 + u$ einsetzen:

$$\sin r \,.\, \cos i\,(1 - u) = \sin i \,.\, \cos r\,(1 + u)$$

und daraus

$$-(\sin i \,.\, \cos r - \cos i \,.\, \sin r) = u\,(\sin i \,.\, \cos r + \cos i \,.\, \sin r)$$

$$u = -\frac{\sin i \,.\, \cos r - \cos i \,.\, \sin r}{\sin i \,.\, \cos r + \cos i \,.\, \sin r} = -\frac{\sin(i - r)}{\sin(i + r)} \quad . \quad . \quad . \quad A.$$

Ist nun die Intensität des einfallenden Lichtes gleich 1, so ist diejenige des reflectirten Lichtes, da sich dasselbe in demselben Mittel fortpflanzt als das einfallende, gleich u^2 und somit

$$u^2 = \frac{\sin^2(i - r)}{\sin^2(i + r)}\,.$$

Ehe wir die bisher erhaltenen Resultate weiter verfolgen wird es angemessen sein, den vorhin erwähnten Nachweis zu liefern, dass wir nach der Neumann'schen Anschauung über die Lage der Aetherschwingungen im polarisirten Lichte zu ganz denselben Resultaten gelangen, wenn wir mit Neumann die Annahme bilden, dass die Verschiedenheit der optischen Medien nur in einer verschiedenen Elasticität des Aethers begründet ist, während die Dichtigkeit in allen Medien dieselbe ist.

Nach Neumann schwingt das in der Einfallsebene polarisirte Licht in der Einfallsebene; für eine unter dem Winkel i einfallende Welle erfolgen also auch die Schwingungen in einer Richtung, welche mit der Grenzfläche den Winkel i bildet. Ist r der Brechungswinkel, so erhalten wir zunächst für die der Grenzfläche parallelen Componenten

$$(1 + u) \,.\, \cos i = v \,.\, \cos r,$$

also dieselbe Gleichung wie Ia.

Die Gleichung Ib wird aber eine andere; da nämlich im zweiten Mittel die Dichtigkeit dieselbe ist als im ersten, so haben wir jetzt für die zur Grenzfläche senkrechten Componenten ebenfalls einfach die Gleichheit der Verschiebungen im ersten und zweiten Mittel. Denn bei der Gleichheit der bewegten Massen sind die Bewegungsgrössen einfach den Verschiebungen proportional. Damit wird also die Gleichung Ib

$$(1 - u)\sin i = v \,.\, \sin r.$$

Eliminiren wir aus beiden v und lösen nach u auf, so wird

$$u = \frac{\sin(i - r)}{\sin(i + r)}\,.$$

Senkrecht zur Einfallsebene polarisirtes Licht schwingt dann auch senkrecht zur Einfallsebene, seine Schwingungen sind also der Grenzfläche parallel.

Wir erhalten also zwischen 1, u und v als erste Relation

$$1 + u = v.$$

Die zweite Relation liefert auch hier das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft, das Produkt aus Masse und Quadrat der Geschwindigkeit des in der einfallenden Welle bewegten Aethers ist gleich der Summe dieser Produkte in der reflectirten und gebrochenen Welle. Die gleichzeitig bewegten Aethermassen verhalten sich aber hier direkt, wie die bewegten Aethervolume, somit wie

$$\sin i \ \cos i : \sin i \ \cos i : \sin r \ \cos r,$$

und die Gleichung der lebendigen Kraft wird

$$(1 - u^2) \sin i \,.\, \cos i = v^2 \sin r \,.\, \cos r.$$

Ersetzen wir hierin v durch $1 + u$ und lösen dann nach u auf, so wird nach den passenden Reductionen

$$u = \frac{\operatorname{tang}(i - r)}{\operatorname{tang}(i + r)}.$$

Wir erhalten also nach dieser Theorie Ausdrücke, welche sich von den nach der Fresnel'schen erhaltenen nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Der Wechsel des Vorzeichens bedeutet, wie wir bereits §. 58 hervorhoben, Verlust einer halben Wellenlänge bei der Reflexion; nach der Neumann'schen Theorie tritt also bei der Reflexion an solchen Medien, bei denen $i > r$, also an optisch dichtern, keine Phasenänderung ein, während nach Fresnel bei diesen die Phasenänderung eintritt; dagegen tritt bei optisch weniger dichten Mitteln, wo $i < r$ ist, nach Neumann die Phasenänderung ein, nach Fresnel dagegen nicht. Es gibt bisher nun kein Mittel, um über diese Alternative zu entscheiden; die Newton'schen Farben dünner Blättchen beweisen nur, dass bei einer der Reflexionen, entweder am dichtern oder am dünnern Medium der Verlust einer halben Wellenlänge eintritt, nicht aber bei welcher. Da im Uebrigen beide Ausdrücke für das in gleicher Weise polarisirte Licht ganz gleich sind, so sind beide Annahmen gleich zulässig. Weshalb wir die Fresnel'sche Annahme beibehalten haben, haben wir bereits hervorgehoben.

Mit Hülfe der für die reflectirten Amplituden erhaltenen Werthe sind wir nun auch sofort im Stande, jene für die gebrochenen zu bestimmen. Für die Amplitude der Schwingungen im gebrochenen Lichte v erhalten wir, im Falle das Licht der Einfallsebene parallel polarisirt ist, aus I und A

$$v = 1 + u = 1 - \frac{\sin(i - r)}{\sin(i + r)} = \frac{\sin(i + r) - \sin(i - r)}{\sin(i + r)},$$

und nach bekannten Umformungen

$$v = \frac{2 \sin r \,.\, \cos i}{\sin(i + r)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{C.}$$

Wenn aber das Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist, wird aus Ia und B

$$v = (1 + u) \cdot \frac{\cos i}{\cos r} = \left(1 - \frac{\sin i \,.\, \cos i - \sin r \,.\, \cos r}{\sin i \,.\, \cos i + \sin r \,.\, \cos r}\right) \cdot \frac{\cos i}{\cos r},$$

$$v = \frac{2 \sin r \,.\, \cos i}{\sin i \,.\, \cos i + \sin r \,.\, \cos r} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{D.}$$

Um nun die Intensität des gebrochenen Lichtes zu erhalten, wenn wir die des einfallenden Lichtes gleich 1 setzen, müssen wir beachten, dass die Dichtigkeit des Aethers im zweiten Mittel eine andere ist als im ersten Mittel, und somit auch die Masse des im gebrochenen Lichte bewegten Aethers. Wenn wir die Intensität des einfallenden Lichtes gleich 1 setzen, so nehmen wir dabei an, dass die Dichtigkeit des Aethers im ersten Mittel gleich 1 sei; um die Intensität des gebrochenen Lichtes im Verhältniss zu der des einfallenden Lichtes zu erhalten, müssen wir daher das Quadrat der Amplitude v noch mit der relativen Dichtigkeit des Aethers im zweiten Mittel multipliciren. Wir können jedoch noch einfacher zum Ziel gelangen.

Nach dem bei der Gleichung II bereits angewandten Satze, dass die Summe der Intensitäten im einfallenden und gebrochenen Lichte gleich ist der Intensität des einfallenden Lichtes, ist die Intensität des gebrochenen Lichtes $1 - u^2$; dafür liefert uns die Gleichung II

$$1 - u^2 = \frac{\sin i \,.\, \cos r}{\sin r \,.\, \cos i} \cdot v^2$$

somit die Intensität des gebrochenen Lichtes, wenn das Licht in der Einfallsebene polarisirt ist,

$$\frac{\sin i \,.\, \cos r}{\sin r \,.\, \cos i} \cdot v^2 = \frac{\sin i \,.\, \cos r}{\sin r \,.\, \cos i} \cdot \frac{4 \,.\, \sin^2 r \,.\, \cos^2 i}{\sin^2 (i + r)} = \frac{\sin 2\, i \,.\, \sin 2\, r}{\sin^2 (i + r)}.$$

Ist das Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt, so haben wir den dann geltenden Werth von v einzusetzen; es wird dann

$$\frac{\sin i \,.\, \cos r}{\sin r \,.\, \cos i} \cdot v^2 = \frac{\sin i \,.\, \cos r}{\sin r \,.\, \cos i} \cdot \frac{4 \,.\, \sin^2 r \,.\, \cos^2 i}{(\sin i \,.\, \cos i + \sin r \,.\, \cos r)^2}$$

$$= \frac{\sin 2\, i \,.\, \sin 2\, r}{(\sin i \,.\, \cos i + \sin r \,.\, \cos r)^2}.$$

Wir erhalten somit für die Intensitäten des einfallenden, reflectirten und gebrochenen Lichtes:

I., wenn das Licht der Einfallsebene parallel polarisirt ist,

1. einfallend	2. reflectirt	3. gebrochen
1) 1	2) $J^2_r = \frac{\sin^2 (i - r)}{\sin^2 (i + r)}$	3) $J^2_d = \frac{\sin 2\, i \,.\, \sin 2\, r}{\sin^2 (i + r)}$,

II., wenn das Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist,

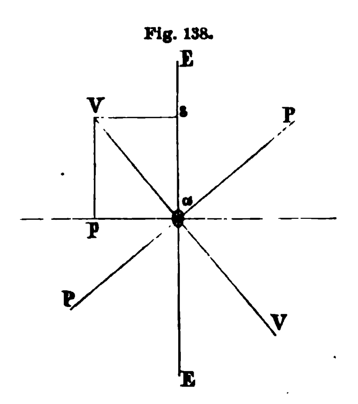
1_a) 1	2_a) $J'^2_r = \frac{\operatorname{tang}^2 (i - r)}{\operatorname{tang}^2 (i + r)}$	3_a) $J'^2_d = \frac{\sin 2\, i \,.\, \sin 2\, r}{(\sin i \,.\, \cos i + \sin r \,.\, \cos r)^2}$

Wenn nun das Licht anstatt parallel oder senkrecht zur Einfallsebene polarisirt zu sein unter irgend einem Winkel α gegen dieselbe polarisirt ist.

so kann man auch dafür nach den eben erhaltenen Gleichungen die Intensität des reflectirten und gebrochenen Lichtes erhalten. Denn aus der Richtung der Polarisationsebene kennt man auch die Richtung der Schwingungsebene, welche zu jener senkrecht ist, kann also nach dem Satze vom Parallelogramm der Bewegungen die Componenten berechnen, welche der Einfallsebene parallel, und welche zu ihr senkrecht sind.

Diese Componenten werden dann nach den eben entwickelten Gesetzen reflectirt und gebrochen. Bildet die Polarisationsebene des Lichtes mit der Einfallsebene den Winkel α, und ist seine Amplitude gleich 1, so bildet die Schwingungsrichtung mit der Einfallsebene den Winkel $90^0 - \alpha$. Denn ist *EE* Fig. 138 die Einfallsebene, *PP* die Richtung der Polarisationsebene, so ist *VV* die Richtung der Schwingungen im einfallenden Lichte.

Fig. 138.



Die der Einfallsebene parallele Componente der Schwingungen Vp ist demnach

$$Vp = \sin\alpha,$$

die zu derselben senkrechte

$$Vs = \cos\alpha.$$

Erstere ist zur Einfallsebene senkrecht, letztere ihr parallel polarisirt; um die reflectirten Amplituden zu erhalten, haben wir daher nur Vs mit (A) und Vp mit (B) zu multipliciren, und wir erhalten

$$-\cos\alpha\,\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}, \qquad -\sin\alpha\,\frac{\tang(i-r)}{\tang(i+r)}.$$

Die gesammte reflectirte Lichtintensität ist nun gleich der Summe der beiden reflectirten Theile, somit

$$J^2_{ar} = \cos^2\alpha\,\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} + \sin^2\alpha\,\frac{\tang^2(i-r)}{\tang^2(i+r)}.$$

In ganz gleicher Weise erhält man für die Intensität des gebrochenen Lichtes

$$J^2_{ad} = \cos^2\alpha\,\frac{\sin 2i\,.\,\sin 2r}{\sin^2(i+r)} + \sin^2\alpha\,\frac{\sin 2i\,.\,\sin 2r}{(\sin i\,.\,\cos i + \sin r\,.\,\cos r)^2}.$$

Auch die Intensität des reflectirten Lichtes, wenn das einfallende Licht unpolarisirt ist, können wir auf dieselbe Weise erhalten. Das unpolarisirte Licht können wir betrachten als eine Gruppe von nach allen Richtungen polarisirten Strahlen. Führen wir daher für jeden der im natürlichen Licht vorhandenen polarisirten Strahlen die Zerlegung in der eben angegebenen Weise aus, so werden wir ebenso viele und ebenso grosse Componenten nach der einen wie nach der andern Richtung erhalten. Ist daher die Intensität des unpolarisirt einfallenden Lichtes gleich 1, so wird bei jener Zerlegung die

Intensität des parallel der Einfallsebene polarisirten Lichtes sowohl als des senkrecht zu demselben polarisirten gleich $^1/_2$ sein. Wir können demnach soweit natürliches Licht darstellen durch zwei zu einander senkrecht polarisirte Strahlen, deren jeder die halbe Intensität des natürlichen Lichtes hat.

Jeder dieser beiden Strahlen wird nun nach den entwickelten Gesetzen reflectirt; die Intensität des parallel der Einfallsebene polarisirt reflectirten Lichtes ist daher

$$^1/_2 \cdot \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}$$

und des senkrecht zur Einfallsebene polarisirt reflectirten Lichtes

$$^1/_2 \cdot \frac{\operatorname{tang}^2(i-r)}{\operatorname{tang}^2(i+r)}$$

und die Intensität des gesammten reflectirten Lichtes

$$J^2_R = {}^1/_2 \left\{ \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} + \frac{\operatorname{tang}^2(i-r)}{\operatorname{tang}^2(i+r)} \right\}.$$

Die Intensität J^2_D des gebrochenen Lichtes können wir direkt aus dem Satze erhalten, dass

$$J^2_D = 1 - J^2_R$$

und erhalten dann

$$J^2_D = \left\{ 1 - {}^1/_2 \left(\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} + \frac{\operatorname{tang}^2(i-r)}{\operatorname{tang}^2(i+r)} \right) \right\},$$

ein Ausdruck, den wir auch aus unseren Gleichungen (3) und (3_a) hätten ableiten können, wenn wir die Intensitäten des gebrochenen Lichtes bestimmt hätten für die beiden Componenten, in welche wir das einfallende Licht zerlegt haben.

§. 73.

Folgerungen aus Fresnel's Reflexionstheorie.[1]) Die Beobachtungen von Malus und Brewster ergeben sich als unmittelbare Folgerungen aus der von Fresnel entwickelten Theorie der Reflexion des Lichtes. Daraus ergibt sich dann auch, dass, soweit diese Beobachtungen richtig sind, die Fresnel'sche Theorie zulässig ist. Direkte Bestätigungen sind wegen der Schwierigkeit photometrischer Messungen nicht leicht zu erhalten.

Zunächst schliesst man unmittelbar aus diesen Gleichungen, dass unter einem bestimmten Einfallswinkel natürliches Licht nach der Reflexion vollständig in der Einfallsebene polarisirt sein muss, und zwar, dass dieser Einfallswinkel derjenige ist, dessen Tangente gleich ist dem Brechungsexponenten. Fällt natürliches Licht auf eine durchsichtige Fläche, so können wir das reflectirte Licht ansehen als bestehend aus einem Antheile in der Einfallsebene

1) *Fresnel,* Annales de chim. et de phys. XLVI. Poggend. Annal. Bd. XXII. 90.

polarisirten Lichtes und einem Antheile, welcher senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist. Ersterer Antheil ist

$$\frac{1}{2}\,\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)},$$

letzterer dagegen

$$\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{tang}^2(i-r)}{\mathrm{tang}^2(i+r)}.$$

Das reflectirte Licht ist nun vollständig in der Einfallsebene polarisirt, wenn der letztere Antheil gleich 0 ist. Das ist nun zunächst der Fall, wenn

$$i-r=0,\quad i=r,$$

also der Einfallswinkel dem Brechungswinkel gleich ist, oder die optische Dichtigkeit des zweiten Mittels von derjenigen des ersten nicht verschieden ist. In dem Falle ist aber auch der erste Antheil gleich 0, oder es wird gar kein Licht reflectirt. Diese Theorie liefert also zunächst eine Bestätigung des früher schon mehrfach von uns ausgesprochenen Satzes, dass eine Wellenbewegung nur dann reflectirt wird, wenn sie an der Grenze zweier Mittel ankommt; dass sie aber niemals in einem und demselben Mittel zurückkehrt.

Der zweite Antheil wird aber ebenfalls gleich 0, wenn

$$i+r=90^0,$$

denn dann ist tang $(i+r)$ unendlich gross.

Dies ist das Brewster'sche Gesetz, denn hieraus folgt sowohl, dass die Tangente des Polarisationswinkels gleich dem Brechungsexponenten ist, wie auch, dass in diesem Falle der reflectirte Strahl auf dem gebrochenen senkrecht ist.

Wenn im Azimuth α polarisirtes Licht unter dem Polarisationswinkel auf eine reflectirende Fläche fällt, so wird nur in der Einfallsebene polarisirtes Licht reflectirt; die Intensität desselben ist

$$\cos^2\alpha\cdot\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}.$$

Diese Folgerung stellt das von Malus aus der Beobachtung abgeleitete Gesetz dar, nach welchem die Intensität des von dem zweiten Spiegel unter dem Polarisationswinkel reflectirten Lichtes dem Quadrate des Cosinus des Winkels proportional ist, welchen die beiden Reflexionsebenen mit einander bilden.

Wenn Licht unter einem andern Winkel als dem Polarisationswinkel auf eine reflectirende Fläche fällt, ist es theilweise polarisirt. Auch dies folgt aus der Fresnel'schen Theorie. Denn die reflectirten Lichtmengen können wir, wie erwähnt, als zusammengesetzt betrachten aus zwei senkrecht zu einander polarisirten Bündeln. Da das natürliche Licht nun dargestellt werden kann durch zwei senkrecht zu einander polarisirte Bündel gleicher Intensität, wird uns die Differenz der beiden reflectirten Mengen

Intensität des parallel der Einfallsebene polarisirten Lichtes sowohl als des senkrecht zu demselben polarisirten gleich $1/2$ sein. Wir können demnach soweit natürliches Licht darstellen durch zwei zu einander senkrecht polarisirte Strahlen, deren jeder die halbe Intensität des natürlichen Lichtes hat.

Jeder dieser beiden Strahlen wird nun nach den entwickelten Gesetzen reflectirt; die Intensität des parallel der Einfallsebene polarisirt reflectirten Lichtes ist daher

$$1/2 \cdot \frac{\sin^2 (i-r)}{\sin^2 (i+r)}$$

und des senkrecht zur Einfallsebene polarisirt reflectirten Lichtes

$$1/2 \cdot \frac{\operatorname{tang}^2 (i-r)}{\operatorname{tang}^2 (i+r)}$$

und die Intensität des gesammten reflectirten Lichtes

$$J^2_R = 1/2 \left\{ \frac{\sin^2 (i-r)}{\sin^2 (i+r)} + \frac{\operatorname{tang}^2 (i-r)}{\operatorname{tang}^2 (i+r)} \right\}.$$

Die Intensität J^2_D des gebrochenen Lichtes können wir direkt aus dem Satze erhalten, dass

$$J^2_D = 1 - J^2_R$$

und erhalten dann

$$J^2_D = \left\{ 1 - 1/2 \left(\frac{\sin^2 (i-r)}{\sin^2 (i+r)} + \frac{\operatorname{tang}^2 (i-r)}{\operatorname{tang}^2 (i+r)} \right) \right\},$$

ein Ausdruck, den wir auch aus unseren Gleichungen (3) und (3_a) hätten ableiten können, wenn wir die Intensitäten des gebrochenen Lichtes bestimmt hätten für die beiden Componenten, in welche wir das einfallende Licht zerlegt haben.

§. 73.

Folgerungen aus Fresnel's Reflexionstheorie.[1]) Die Beobachtungen von Malus und Brewster ergeben sich als unmittelbare Folgerungen aus der von Fresnel entwickelten Theorie der Reflexion des Lichtes. Daraus ergibt sich dann auch, dass, soweit diese Beobachtungen richtig sind, die Fresnel'sche Theorie zulässig ist. Direkte Bestätigungen sind wegen der Schwierigkeit photometrischer Messungen nicht leicht zu erhalten.

Zunächst schliesst man unmittelbar aus diesen Gleichungen, dass unter einem bestimmten Einfallswinkel natürliches Licht nach der Reflexion vollständig in der Einfallsebene polarisirt sein muss, und zwar, dass dieser Einfallswinkel derjenige ist, dessen Tangente gleich ist dem Brechungsexponenten. Fällt natürliches Licht auf eine durchsichtige Fläche, so können wir das reflectirte Licht ansehen als bestehend aus einem Antheile in der Einfallsebene

1) *Fresnel,* Annales de chim. et de phys. XLVI. Poggend. Annal. Bd. XXII. 90.

polarisirten Lichtes und einem Antheile, welcher senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist. Ersterer Antheil ist

$$\frac{1}{2} \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)},$$

letzterer dagegen

$$\frac{1}{2} \frac{\operatorname{tang}^2(i-r)}{\operatorname{tang}^2(i+r)}.$$

Das reflectirte Licht ist nun vollständig in der Einfallsebene polarisirt, wenn der letztere Antheil gleich 0 ist. Das ist nun zunächst der Fall, wenn

$$i-r=0, \quad i=r,$$

also der Einfallswinkel dem Brechungswinkel gleich ist, oder die optische Dichtigkeit des zweiten Mittels von derjenigen des ersten nicht verschieden ist. In dem Falle ist aber auch der erste Antheil gleich 0, oder es wird gar kein Licht reflectirt. Diese Theorie liefert also zunächst eine Bestätigung des früher schon mehrfach von uns ausgesprochenen Satzes, dass eine Wellenbewegung nur dann reflectirt wird, wenn sie an der Grenze zweier Mittel ankommt; dass sie aber niemals in einem und demselben Mittel zurückkehrt.

Der zweite Antheil wird aber ebenfalls gleich 0, wenn

$$i+r=90^0,$$

denn dann ist tang $(i+r)$ unendlich gross.

Dies ist das Brewster'sche Gesetz, denn hieraus folgt sowohl, dass die Tangente des Polarisationswinkels gleich dem Brechungsexponenten ist, wie auch, dass in diesem Falle der reflectirte Strahl auf dem gebrochenen senkrecht ist.

Wenn im Azimuth α polarisirtes Licht unter dem Polarisationswinkel auf eine reflectirende Fläche fällt, so wird nur in der Einfallsebene polarisirtes Licht reflectirt; die Intensität desselben ist

$$\cos^2\alpha \cdot \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}.$$

Diese Folgerung stellt das von Malus aus der Beobachtung abgeleitete Gesetz dar, nach welchem die Intensität des von dem zweiten Spiegel unter dem Polarisationswinkel reflectirten Lichtes dem Quadrate des Cosinus des Winkels proportional ist, welchen die beiden Reflexionsebenen mit einander bilden.

Wenn Licht unter einem andern Winkel als dem Polarisationswinkel auf eine reflectirende Fläche fällt, ist es theilweise polarisirt. Auch dies folgt aus der Fresnel'schen Theorie. Denn die reflectirten Lichtmengen können wir, wie erwähnt, als zusammengesetzt betrachten aus zwei senkrecht zu einander polarisirten Bündeln. Da das natürliche Licht nun dargestellt werden kann durch zwei senkrecht zu einander polarisirte Bündel gleicher Intensität, wird uns die Differenz der beiden reflectirten Mengen

Intensität des parallel der Einfallsebene polarisirten Lichtes sowohl als des senkrecht zu demselben polarisirten gleich $^1/_2$ sein. Wir können demnach soweit natürliches Licht darstellen durch zwei zu einander senkrecht polarisirte Strahlen, deren jeder die halbe Intensität des natürlichen Lichtes hat.

Jeder dieser beiden Strahlen wird nun nach den entwickelten Gesetzen reflectirt; die Intensität des parallel der Einfallsebene polarisirt reflectirten Lichtes ist daher

$$^1/_2 \cdot \frac{\sin^2 (i - r)}{\sin^2 (i + r)}$$

und des senkrecht zur Einfallsebene polarisirt reflectirten Lichtes

$$^1/_2 \cdot \frac{\tang^2 (i - r)}{\tang^2 (i + r)}$$

und die Intensität des gesammten reflectirten Lichtes

$$J^2_R = {}^1/_2 \left\{ \frac{\sin^2 (i - r)}{\sin^2 (i + r)} + \frac{\tang^2 (i - r)}{\tang^2 (i + r)} \right\} .$$

Die Intensität J^2_D des gebrochenen Lichtes können wir direkt aus dem Satze erhalten, dass

$$J^2_D = 1 - J^2_R$$

und erhalten dann

$$J^2_D = \left\{ 1 - {}^1/_2 \left(\frac{\sin^2 (i - r)}{\sin^2 (i + r)} + \frac{\tang^2 (i - r)}{\tang^2 (i + r)} \right) \right\} ,$$

ein Ausdruck, den wir auch aus unseren Gleichungen (3) und (3_a) hätten ableiten können, wenn wir die Intensitäten des gebrochenen Lichtes bestimmt hätten für die beiden Componenten, in welche wir das einfallende Licht zerlegt haben.

§. 73.

Folgerungen aus Fresnel's Reflexionstheorie.[1]) Die Beobachtungen von Malus und Brewster ergeben sich als unmittelbare Folgerungen aus der von Fresnel entwickelten Theorie der Reflexion des Lichtes. Daraus ergibt sich dann auch, dass, soweit diese Beobachtungen richtig sind, die Fresnel'sche Theorie zulässig ist. Direkte Bestätigungen sind wegen der Schwierigkeit photometrischer Messungen nicht leicht zu erhalten.

Zunächst schliesst man unmittelbar aus diesen Gleichungen, dass unter einem bestimmten Einfallswinkel natürliches Licht nach der Reflexion vollständig in der Einfallsebene polarisirt sein muss, und zwar, dass dieser Einfallswinkel derjenige ist, dessen Tangente gleich ist dem Brechungsexponenten. Fällt natürliches Licht auf eine durchsichtige Fläche, so können wir das reflectirte Licht ansehen als bestehend aus einem Antheile in der Einfallsebene

1) *Fresnel*, Annales de chim. et de phys. XLVI. Poggend. Annal. Bd. XXII. 90.

polarisirten Lichtes und einem Antheile, welcher senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist. Ersterer Antheil ist

$$1/2 \, \frac{\sin^2 (i - r)}{\sin^2 (i + r)},$$

letzterer dagegen

$$1/2 \, \frac{\operatorname{tang}^2 (i - r)}{\operatorname{tang}^2 (i + r)}.$$

Das reflectirte Licht ist nun vollständig in der Einfallsebene polarisirt, wenn der letztere Antheil gleich 0 ist. Das ist nun zunächst der Fall, wenn

$$i - r = 0, \quad i = r,$$

also der Einfallswinkel dem Brechungswinkel gleich ist, oder die optische Dichtigkeit des zweiten Mittels von derjenigen des ersten nicht verschieden ist. In dem Falle ist aber auch der erste Antheil gleich 0, oder es wird gar kein Licht reflectirt. Diese Theorie liefert also zunächst eine Bestätigung des früher schon mehrfach von uns ausgesprochenen Satzes, dass eine Wellenbewegung nur dann reflectirt wird, wenn sie an der Grenze zweier Mittel ankommt; dass sie aber niemals in einem und demselben Mittel zurückkehrt.

Der zweite Antheil wird aber ebenfalls gleich 0, wenn

$$i + r = 90^0,$$

denn dann ist tang $(i + r)$ unendlich gross.

Dies ist das Brewster'sche Gesetz, denn hieraus folgt sowohl, dass die Tangente des Polarisationswinkels gleich dem Brechungsexponenten ist, wie auch, dass in diesem Falle der reflectirte Strahl auf dem gebrochenen senkrecht ist.

Wenn im Azimuth α polarisirtes Licht unter dem Polarisationswinkel auf eine reflectirende Fläche fällt, so wird nur in der Einfallsebene polarisirtes Licht reflectirt; die Intensität desselben ist

$$\cos^2 \alpha \cdot \frac{\sin^2 (i - r)}{\sin^2 (i + r)}.$$

Diese Folgerung stellt das von Malus aus der Beobachtung abgeleitete Gesetz dar, nach welchem die Intensität des von dem zweiten Spiegel unter dem Polarisationswinkel reflectirten Lichtes dem Quadrate des Cosinus des Winkels proportional ist, welchen die beiden Reflexionsebenen mit einander bilden.

Wenn Licht unter einem andern Winkel als dem Polarisationswinkel auf eine reflectirende Fläche fällt, ist es theilweise polarisirt. Auch dies folgt aus der Fresnel'schen Theorie. Denn die reflectirten Lichtmengen können wir, wie erwähnt, als zusammengesetzt betrachten aus zwei senkrecht zu einander polarisirten Bündeln. Da das natürliche Licht nun dargestellt werden kann durch zwei senkrecht zu einander polarisirte Bündel gleicher Intensität, wird uns die Differenz der beiden reflectirten Mengen

$$\frac{1}{2}\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} - \frac{1}{2}\frac{\tang^2(i-r)}{\tang^2(i+r)}$$

den Ueberschuss des nach der Einfallsebene polarisirten Lichtes über das senkrecht zu derselben polarisirte Licht, oder die Menge des im reflectirten Lichte vorhandenen polarisirten Lichtes geben.

Wir können obigen Ausdruck auch schreiben

$$\frac{1}{2}\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} - \frac{1}{2}\frac{\sin^2(i-r)\cdot\cos^2(i+r)}{\sin^2(i+r)\cdot\cos^2(i-r)}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}\left(1 - \frac{\cos^2(i+r)}{\cos^2(i-r)}\right).$$

Da nun der Quotient der beiden Cosinus immer kleiner als 1 ist, der Einfallswinkel mag einen Werth haben, welchen er will, so folgt, dass immer ein Ueberschuss des nach der Einfallsebene polarisirten Lichtes vorhanden ist, oder dass das Licht theilweise nach der Einfallsebene polarisirt ist.

Wenn unter irgend einem Winkel natürliches Licht auf die reflectirende Fläche fällt oder irgendwie polarisirtes unter dem Polarisationswinkel, so ist das reflectirte Licht immer ganz oder theilweise nach der Einfallsebene polarisirt. Das ist aber nicht mehr der Fall, wenn unter irgend einem Azimuthe α polarisirtes Licht unter irgend einem Winkel i einfällt. Dann ist allerdings das reflectirte Licht wieder vollständig polarisirt, aber nicht nach der Einfallsebene, und auch nicht nach der frühern Richtung.

Wir sahen, wenn die Intensität 1 des nach dem Azimuthe α polarisirten Lichtes unter dem Winkel i reflectirt wird, so sind die reflectirten Intensitäten, welche polarisirt sind

parallel der Einfallsebene,	senkrecht zur Einfallsebene
$\cos^2\alpha\,\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}$,	$\sin^2\alpha\,\frac{\tang^2(i-r)}{\tang^2(i+r)}$.

Beide Wellensysteme haben denselben Weg durchlaufen, und beide sind in diesem Falle unter denselben Verhältnissen partiell reflectirt; durch die Reflexion kann also keine Phasendifferenz eingetreten sein, und in beiden treten daher immer an derselben Stelle des reflectirten Strahles zugleich die Maxima und Minima und überhaupt die sich entsprechenden Werthe der Oscillationsgeschwindigkeiten ein. Die beiden Wellensysteme werden daher überall auf der ganzen Strecke des reflectirten Strahles nach §. 122 des ersten Theiles sich zu ebenen Schwingungen, also zu einem vollständig polarisirten Strahle zusammensetzen. Ist nun Fig. 139 Op die der Einfallsebene EE parallel polarisirte Componente der Amplitude des reflectirten Lichtes

$$Op = \cos\alpha\cdot\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)},$$

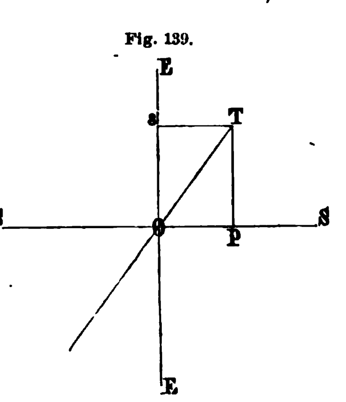
und $Os = Tp$ die Amplitude der Componente des reflectirten Lichtes, welche senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist,

$$Tp = \sin\alpha \cdot \frac{\operatorname{tang}(i-r)}{\operatorname{tang}(i+r)},$$

so haben wir für die Tangente des Winkels β, den die Polarisationsebene des nach TO schwingenden reflectirten Strahles mit der Einfallsebene bildet,

$$\operatorname{tang}\beta = \operatorname{tang} TOp = \frac{Tp}{Op},$$

Fig. 139.



also

$$\operatorname{tang}\beta = \operatorname{tang}\alpha \cdot \frac{\operatorname{tang}(i-r) \,.\, \sin(i+r)}{\operatorname{tang}(i+r) \,.\, \sin(i-r)},$$

$$\operatorname{tang}\beta = \operatorname{tang}\alpha \cdot \frac{\cos(i+r)}{\cos(i-r)}.$$

Der Winkel β, den die Polarisationsebene des unter dem Winkel i reflectirten Strahles mit der Einfallsebene bildet, ist im Allgemeinen ein anderer als der Winkel, welchen die Polarisationsebene vor der Reflexion mit der Einfallsebene bildete. Da nun $\cos(i+r) < \cos(i-r)$, so folgt, dass durch die Reflexion die Polarisationsebene der Reflexionsebene genähert wird. Die Drehung ist am grössten, wenn $i + r = 90^0$; dann ist, welchen Werth auch α gehabt hat,

$$\operatorname{tang}\beta = o;$$

das Licht ist nach der Einfallsebene polarisirt. Dies ist also eine zweite Ableitung des Brewster'schen Gesetzes, somit dasselbe auch nach dieser Richtung hin eine Bestätigung der Theorie.

Ist i und somit r gleich 0, so wird

$$\operatorname{tang}\beta = \operatorname{tang}\alpha,$$

bei senkrechter Incidenz tritt gar keine Drehung der Polarisationsebene ein.

Die Drehung der Polarisationsebene hat Fresnel zum Gegenstande einer experimentellen Untersuchung gemacht, seine sowie Brewster's Versuche[1]) waren eine Bestätigung dieses Gesetzes.

Nach den Versuchen von Malus ist auch das gebrochene Licht theilweise polarisirt, und zwar in einer zur Einfallsebene senkrechten Ebene. Auch dieses zeigt die Fresnel'sche Theorie, denn nach dieser erhalten wir für die im durchgehenden Lichte senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Lichtmenge

$$\frac{1}{2}\, \frac{\sin 2i \,.\, \sin 2r}{(\sin i \,.\, \cos i + \sin r \,.\, \cos r)^2} - \frac{1}{2}\, \frac{\sin 2i \,.\, \sin 2r}{\sin^2(i+r)},$$

und dieser Ausdruck ist, wie nach einigen Umformungen erhalten wird, gleich

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2i \,.\, \sin 2r}{\cos^2(i-r)} \cdot \frac{1-\cos^2(i-r)}{\sin^2(i+r)},$$

1) *Fresnel,* Annales de chim. et de phys. XVII. Poggend. Annal. Bd. XXII. 88. *Brewster,* Poggend. Annal. Bd. XIX.

und da

$$\sin 2i \,.\, \sin 2r = 4 \sin i \,.\, \cos i \,.\, \sin r \,.\, \cos r = \cos^2 (i - r) - \cos^2 (i + r),$$

so erhalten wir für die senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Lichtmenge

$$1/2 \cdot \frac{\sin^2 (i - r)}{\sin^2 (i + r)} \cdot \left(1 - \frac{\cos^2 (i + r)}{\cos^2 (i - r)}\right),$$

ein Ausdruck, der uns zugleich das Arago'sche Gesetz gibt, nach welchem die Menge des im gebrochenen vorhandenen senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Lichtes genau gleich sein muss der Menge des im reflectirten Licht vorhandenen parallel zur Einfallsebene polarisirten Lichtes.

Die Gleichungen für die Intensität des gebrochenen Lichtes zeigen weiter, dass auch nach der Theorie durch eine einmalige Brechung nur theilweise polarisirtes Licht entstehen kann, denn es gibt keinen Werth von i, für welchen der eine Theil des gebrochenen Lichtes gleich 0 wird, also verschwindet.

Noch auf eine andere Weise lässt sich das ableiten, indem wir die Polarisationsebene des gebrochenen Strahles bestimmen, wenn der einfallende unter einem Winkel α gegen die Einfallsebene polarisirt ist.

Bezeichnen wir die Amplitude des gebrochenen Lichtes, welches parallel zur Einfallsebene polarisirt ist, mit D_p und die des senkrecht polarisirten mit D_s, so ist nach (C) und (D) des vorigen Paragraphen

$$D_p = \cos \alpha \cdot \frac{2 \sin r \,.\, \cos i}{\sin (i + r)}, \quad D_s = \sin \alpha \, \frac{2 \sin r \,.\, \cos i}{\sin i \,.\, \cos i + \sin r \,.\, \cos r} \,.$$

Der Winkel γ, welchen die Polarisationsebene des gebrochenen Strahles mit der Einfallsebene bildet, ist nun wieder bestimmt durch

$$\tang \gamma = \frac{D_s}{D_p} = \tang \alpha \, \frac{\sin (i + r)}{\sin i \,.\, \cos i + \sin r \,.\, \cos r} = \tang \alpha \, \frac{1}{\cos (i - r)} \,.$$

Der Winkel i kann nun, wie man sieht, gar keinen Werth erhalten, durch welchen $\tang \gamma$ einen von $\tang \alpha$ unabhängigen Werth erhält, wie bei dem reflectirten Licht $\tang \beta$ für jeden Werth von α gleich 0 wurde, wenn $i + r = 90^0$ war. Es folgt somit, dass es für das gebrochene Licht keinen Polarisationswinkel gibt, da kein Winkel i existirt, bei welchem die nach allen Azimuthen gerichteten Polarisationsebenen des einfallenden Lichtes durch die Brechung in eine bestimmte Ebene gedreht werden. Da indess stets

$$\cos (i - r) < 1,$$

so ist auch

$$\tang \gamma > \tang \alpha; \; \gamma > \alpha,$$

die Polarisationsebene des Lichtes wird durch Brechung stets gedreht, und zwar so, dass sie mit der Einfallsebene einen grössern Winkel bildet als vorher. Lassen wir daher natürliches Licht auf die brechende Fläche fallen, so werden alle Polarisationsebenen der zur Einfallsebene senkrechten Ebene genähert, das Licht wird demnach theilweise in einer Ebene polarisirt, welche zur Einfallsebene senkrecht ist.

Tritt das Licht aus dem zweiten Mittel durch eine neue Brechung wieder aus, so wird die Polarisationsebene nochmals gedreht. Beim Austritt ist r der Einfalls-, i der Brechungswinkel; der Winkel, den die Polarisationsebene nach der zweiten Brechung mit der Einfallsebene bildet, ist daher bestimmt durch

$$\operatorname{tang} \gamma_2 = \operatorname{tang} \gamma \frac{1}{\cos(r-i)},$$

$$\operatorname{tang} \gamma_2 = \operatorname{tang} \alpha \cdot \frac{1}{\cos^2(i-r)}.$$

Lassen wir das Licht ein zweites brechendes Mittel derselben Brechbarkeit durchsetzen, so wird durch die zwei neuen Brechungen

$$\operatorname{tang} \gamma_4 = \operatorname{tang} \alpha \frac{1}{\cos^4(i-r)},$$

und überhaupt nach n Brechungen

$$\operatorname{tang} \gamma_n = \operatorname{tang} \alpha \frac{1}{\cos^n(i-r)}.$$

Wenn nun i von 0 verschieden ist, und somit $\cos(i-r) < 1$ ist, so wird, wenn n einen hinlänglich grossen Werth hat,

$$\cos^n(i-r) = 0,$$

somit

$$\operatorname{tang} \gamma_n = \infty \quad \gamma_n = 90^0.$$

Durch hinlänglich oft wiederholte Brechung wird also schliesslich ebenfalls alles Licht vollständig polarisirt, und zwar in einer zur Einfallsebene senkrechten Ebene. Man wendet deshalb auch häufig als Polarisationsapparat eine Anzahl auf einander geschichteter planparalleler Glasplatten, einen sogenannten Glassatz oder Glassäule an; man lässt auf diese das Licht unter einem Winkel auffallen, der dem Polarisationswinkel des Glases nahe kommt. Die Thatsache, dass sich auf diesem Wege linear polarisirtes Licht erhalten lässt, ist also eine neue Bestätigung der Fresnel'schen Theorie.

§. 74.

Totale Reflexion. Elliptische und circulare Polarisation[1]. Noch eine andere Bestätigung haben die Fresnel'schen Reflexionsformeln erfahren, wie sich aus einer etwas genauern Betrachtung derselben ergibt. Die reflectirten Amplituden sind:

$$Rp = -\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}, \qquad Rs = -\frac{\operatorname{tang}(i-r)}{\operatorname{tang}(i+r)}.$$

Wenn demnach die Gleichung des einfallenden Lichtstrahles war

$$y = \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

1) *Fresnel,* Annales de chim. et de phys. XLVI. Poggend. Annal. Bd. XXII.

wird diejenige der reflectirten Strahlen

$$y' = -\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{x'}{\lambda}\right),$$

oder

$$y' = -\frac{\operatorname{tang}(i-r)}{\operatorname{tang}(i+r)} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{x'}{\lambda}\right).$$

Ist nun das zweite Mittel dichter als das erste, so ist immer $i > r$, der die Amplitude darstellende Coefficient also negativ, weil er ein negatives Vorzeichen hat. Wollen wir dasselbe fortschaffen, um die Gleichung für den reflectirten Strahl ebenso wie diejenige des einfallenden Strahles positiv zu machen, da eine negative Amplitude keinen Sinn hat, so können wir setzen

$$y' = \frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + x' + \frac{1}{2}\lambda}{\lambda}\right),$$

oder

$$y' = \frac{\operatorname{tang}(i-r)}{\operatorname{tang}(i+r)} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + x' + \frac{1}{2}\lambda}{\lambda}\right).$$

Dadurch tritt die Bedeutung des negativen Vorzeichens klar hervor, die Richtung der Schwingungen ist im reflectirten Lichte derjenigen entgegengesetzt, welche das einfallende Licht haben würde, wenn es sich um die Strecke x fortgepflanzt hätte, oder durch die Reflexion haben die Strahlen eine Verzögerung einer halben Wellenlänge erhalten. Das ist nicht der Fall, wenn das zweite Mittel optisch dünner ist, dann ist $r > i$; Rp und Rs werden somit positiv, und die Gleichung des reflectirten Strahles wird

$$y' = \frac{\sin(r-i)}{\sin(r+i)} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + x'}{\lambda}\right),$$

oder

$$y' = \frac{\operatorname{tang}(r-i)}{\operatorname{tang}(r+i)} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + x'}{\lambda}\right).$$

Die Amplituden haben durch die Reflexion nur eine Schwächung erfahren; die Strahlen pflanzen sich ohne Phasenänderung fort.

Es folgt also aus der Fresnel'schen Theorie mit aller Strenge der von uns §. 127 des ersten Theils abgeleitete Satz von der Reflexion der Wellen, den wir im 2. Kapitel des 3. Abschnittes des I. Theiles so vielfach benutzten, um die Schwingungsdauer von Stäben zu erhalten, und den wir im §. 58 anwandten, um die Farben der Newton'schen Ringe abzuleiten.

Beim Uebergange des Lichtes aus einem dichtern Mittel in ein dünneres lernten wir nun ein anderes eigenthümliches Reflexionsphänomen kennen. Ein Lichtstrahl kann aus einem optisch dichtern in ein optisch dünneres Mittel nicht in allen Fällen austreten. Ist der Brechungsexponent des Lichtes aus dem dichtern Mittel in das dünnere gleich n, wo dann immer $n < 1$, so kann das Licht nur so lange austreten, als

$$\sin i < n.$$

Wird sin $i = n$ oder grösser, so tritt totale Reflexion ein, alles die Grenze treffende Licht wird zurückgeworfen.

Die Fresnel'sche Reflexionstheorie gibt auch dieses zu erkennen und zeigt weiter, dass das reflectirte Licht in diesem ausgezeichneten Falle eine ganz eigenthümliche Beschaffenheit haben muss. Der experimentelle Nachweis dieser Beschaffenheit ist dann eine neue Bestätigung für die Zulässigkeit der Theorie.

Es ist nämlich

$$R_p = -\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)} = -\frac{\sin i \cos r - \cos i \sin r}{\sin i \cos r + \cos i \sin r} = -\frac{n \,.\, \cos r - \cos i}{n \,.\, \cos r + \cos i},$$

weiter aber

$$n \,.\, \cos r = \sqrt{n^2 - n^2 \sin^2 r} = \sqrt{n^2 - \sin^2 i},$$

somit

$$R_p = -\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \cos i}.$$

Ebenso erhalten wir aus

$$R_s = -\frac{\tang(i-r)}{\tang(i+r)} = -\frac{\sin(i-r) \,.\, \cos(i+r)}{\sin(i+r) \,.\, \cos(i-r)},$$

und daraus

$$R_s = -\frac{(n \,.\, \cos r - \cos i)}{(n \,.\, \cos r + \cos i)} \frac{(\cos i \,.\, \cos r - \sin i \,.\, \sin r)}{(\cos i \,.\, \cos r + \sin i \,.\, \sin r)}$$

$$= -\frac{(n \,.\, \cos r - \cos i)}{(n \,.\, \cos r + \cos i)} \frac{(n \cos i \,.\, \cos r - \sin^2 i)}{(n \,.\, \cos i \,.\, \cos r + \sin^2 i)}.$$

Führen wir nun die Multiplicationen im Zähler und Nenner durch, indem wir zugleich für $\sin^2 i$ einsetzen $1 - \cos^2 i$, so wird

$$R_s = -\frac{n^2 \cos^2 r \,.\, \cos i - n \,.\, \cos r + \cos i - \cos^3 i}{n^2 \cos^2 r \,.\, \cos i + n \,.\, \cos r + \cos i - \cos^3 i}$$

$$= -\frac{\cos i\,(n^2 \cos^2 r + 1 - \cos^2 i) - n \,.\, \cos r}{\cos i\,(n^2 \cos^2 r + 1 - \cos^2 i) + n \,.\, \cos r},$$

und daraus

$$R_s = -\frac{n^2 \cos i - n \,.\, \cos r}{n^2 \cos i + n \,.\, \cos r} = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - n^2 \,.\, \cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + n^2 \,.\, \cos i}.$$

Ist nun das einfallende Licht unter dem Azimuthe α polarisirt, so wird hiernach die Intensität des reflectirten Lichtes

$$J_{R\alpha} = \cos^2\alpha \left(\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \cos i}\right)^2 + \sin^2\alpha \left(\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - n^2 \cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + n^2 \cos i}\right)^2.$$

Wird nun

$$\sin i = n$$

der Einfallswinkel, also der Grenzwinkel der totalen Reflexion, so wird

$$J_{R\alpha} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1,$$

die Intensität des reflectirten Lichtes, also gleich der des einfallenden Lichtes, es wird gar kein Licht gebrochen.

Wird nun der Winkel i noch grösser, so findet immer noch totale Reflexion statt, indess zeigen unsere Ausdrücke das nicht unmittelbar, denn in dem Falle werden beide Theile der Gleichung für $J_{R\alpha}$ imaginär, da dann $n^2 - \sin^2 i < 0$ wird. Die einzelnen Theile erhalten dann die Form

$$R_p = \frac{\cos i - \sqrt{\sin^2 i - n^2} \,.\, \sqrt{-1}}{\cos i + \sqrt{\sin^2 i - n^2} \,.\, \sqrt{-1}},$$

$$R_s = -\frac{n^2 \,.\, \cos i - \sqrt{\sin^2 i - n^2} \,.\, \sqrt{-1}}{n^2 \,.\, \cos i + \sqrt{\sin^2 i - n^2} \,.\, \sqrt{-1}}.$$

Wir können diese Ausdrücke nun leicht auf eine andere Form bringen, in welcher die Bedeutung des Imaginärwerdens leichter zu erkennen ist. Wir multipliciren zunächst Zähler und Nenner beider Ausdrücke mit den betreffenden Zählern, und erhalten dann für R_p

$$R_p = \frac{\cos^2 i - \sin^2 i + n^2 - 2 \cos i \,.\, \sqrt{\sin^2 i - n^2} \,.\, \sqrt{-1}}{\cos^2 i + \sin^2 i - n^2},$$

$$R_p = \frac{1 + n^2 - 2 \sin^2 i}{1 - n^2} - \frac{2 \cos i \,.\, \sqrt{\sin^2 i - n^2}}{1 - n^2} \,.\, \sqrt{-1},$$

$$R_p = p - q \sqrt{-1}.$$

Für R_s erhalten wir in ganz gleicher Weise

$$R_s = -\frac{n^4 \cos^2 i - \sin^2 i + n^2 - 2n^2 \cos i \sqrt{\sin^2 i - n^2} \,.\, \sqrt{-1}}{n^4 \cos^2 i + \sin^2 i - n^2},$$

$$R_s = \frac{\sin^2 i - n^2 (1 + n^2 \cos^2 i)}{\sin^2 i - n^2 (1 - n^2 \,.\, \cos^2 i)} + \frac{2n^2 \cos i \,.\, \sqrt{\sin^2 i - n^2}}{\sin^2 i - n^2 (1 - n^2 \cos^2 i)} \,.\, \sqrt{-1},$$

$$R_s = r + s \,.\, \sqrt{-1}.$$

Man sieht, dass beide Ausdrücke aus einem reellen und imaginären Theile bestehen, und dass somit auch die Gleichung für $J_{R\alpha}$ in jedem ihrer Theile reell und imaginär wird. Die Summe des reellen Theiles ist nicht allein gleich 1. Da nun aber die ganze einfallende Lichtmenge reflectirt wird, die reflectirte Intensität also gleich 1 ist, so muss auch der imaginäre Antheil des Ausdruckes eine physikalische Bedeutung haben, eine gewisse Quantität Licht darstellen, welche mit dem andern zusammen die gesammte Menge des reflectirten Lichtes liefert. Was bedeutet aber nun das Imaginärwerden des einen Theiles?

Ohne Zweifel, sagt Fresnel, bedeutet es, dass die Voraussetzung unserer Rechnung, nach welcher in der Grenzfläche selbst die reflectirten Schwingungen mit den einfallenden zusammenfallen, nicht mehr erfüllt ist, dass ein Theil der Bewegung unterhalb der reflectirten Fläche zurückgeworfen ist, und dadurch eine gewisse Verzögerung gegen den in der reflectirenden Fläche zurückgeworfenen Theil erfahren hat. In der That, wenn dieses die richtige Auslegung des imaginären Ausdruckes ist, so muss die Analyse, ...

sie in ihren Antworten die Grundvoraussetzung nicht verlassen kann, nach welcher in der Grenzfläche die Schwingungen zusammenfielen, nothwendig für den Coefficienten der reflectirten Amplituden eine imaginäre Grösse geben. Denn wenn man den von der reflectirenden Fläche an durchlaufenen Weg mit x bezeichnet und mit

$$\sin(a + x)$$

die Verschiebung eines Aethermoleküles im Punkte x, im Falle die Vibrationsperioden an der reflectirenden Fläche mit der einfallenden Welle coincidirten, so wird, wenn an der Fläche ihre Perioden um eine gewisse Grösse vorgeschoben oder verzögert wurden, die Verschiebung im Punkte x werden

$$\sin(a' + x).$$

Wie nun aber auch der reelle Coefficient A der Grösse $\sin(a + x)$ werden mag, niemals kann für alle Werthe von x

$$A \cdot \sin(a + x) = \sin(a' + x)$$

sein, das heisst, wenn man fortfährt, die Schwingungsperioden so zu zählen, wie man anfänglich gethan hat, so gibt es keinen reellen Werth des Coefficienten, der im Stande wäre, die Verschiebungen der Moleküle darzustellen.

Wir werden daher das Imaginärwerden eines Theiles beider Ausdrücke dahin deuten dürfen, dass das reflectirte Wellensystem sowohl des parallel der Einfallsebene polarisirten Lichtes, als des senkrecht zu derselben polarisirten aus zwei Theilen besteht, deren einer in der reflectirenden Fläche zurückgeworfen ist, deren anderer aber soweit unterhalb derselben reflectirt ist, dass er gegen den ersten um eine viertel Wellenlänge verzögert ist.

Dass die Verzögerung gerade eine viertel Wellenlänge betragen muss, lässt sich auf folgende Weise ableiten. Bei der Verzögerung um eine halbe Wellenlänge erhalten die Verschiebungen im reflectirten Lichte das entgegengesetzte Vorzeichen, wir erhalten das in unserer Gleichung, indem wir die Gleichung des reflectirten Lichtes mit -1 multipliciren. Die Verschiebung um eine halbe Wellenlänge können wir durch zwei Verzögerungen von $\frac{1}{4}\lambda$ entstehen lassen, und die jedesmalige Verzögerung durch einen Coefficienten darstellen, mit welchem wir die Gleichung der Lichtbewegung multipliciren. Ist dieser Coefficient gleich m, so muss, da die zweimalige Verzögerung durch m^2 dargestellt wird, $m^2 = -1$, somit $m = \sqrt{-1}$ sein.

Wir erhalten somit für die Verschiebung eines um x' von der reflectirenden Fläche entfernten Aethermoleküles, zur Zeit t, die beiden Gleichungen:

1) für das der Einfallsebene parallel polarisirte Licht:

$$y = p \cdot \cos\alpha \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x + x'}{\lambda}\right)$$
$$- q \cdot \cos\alpha \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x + x' + \frac{1}{4}\lambda}{\lambda}\right),$$

2) für das senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Licht:

$$z = r \,.\, \sin\alpha \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + x'}{\lambda}\right)$$
$$+ s \,.\, \sin\alpha \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + x' + \tfrac{1}{4}\lambda}{\lambda}\right).$$

Die beiden in der Einfallsebene polarisirten Strahlensysteme sowohl als die beiden senkrecht zu derselben polarisirten liefern nun ein resultirendes System, dessen Amplitude nach §. 120 des ersten Theiles durch die Quadratsumme der Theilamplituden und deren Phasendifferenz gegen den ersten Theil der componirenden Bewegung gegeben ist (Man sehe p. 417 Bd. I.) für das in der Einfallsebene polarisirte Licht durch

$$\operatorname{tang} 2\pi \frac{D}{\lambda} = -\frac{q}{p},$$

und für das senkrecht zur Einfallsebene polarisirte durch

$$\operatorname{tang} 2\pi \frac{D'}{\lambda} = \frac{s}{r},$$

worin D und D' die Tiefe bedeutet, aus der die beiden Wellen unterhalb der reflectirenden Fläche kommen.

Die resultirende Amplitude ist für die erste Welle gegeben durch $(p^2 + q^2)\cos^2\alpha$, für die zweite $(r^2 + s^2)\sin^2\alpha$, und die Intensität des reflectirten Lichtes ist

$$J_{R\alpha} = (p^2 + q^2)\cos^2\alpha + (r^2 + s^2)\sin^2\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1,$$

wie man leicht durch Ausführung der angedeuteten Rechnungen erhält. Die Gleichungen zeigen demnach, dass auch dann, wenn $n < \sin i$, totale Reflexion eintritt.

Das Eindringen des Lichtes in das dünnere Medium bei der totalen Reflexion ist schon von Newton[1]) beobachtet worden, und Fresnel fand[2]), dass das Licht um mehr als eine Wellenlänge eindringen kann. Drückt man nämlich ein rechtwinkliges Prisma, dessen Hypothenusenfläche das Segment einer Kugel mit grossem Radius bildet, auf die ebene Hypothenusenfläche eines zweiten rechtwinkligen Prismas, so erscheint, wenn man durch die eine Kathetenfläche so in das Prisma hineinsieht, dass das durch die andere Kathetenfläche in das Prisma eindringende Licht von der Hypothenusenfläche total reflectirt wird, die Berührungsstelle als dunkler Fleck auf hellem Grunde, und man kann durch diesen dunklen Fleck hindurchsehen, wie wenn das Glas beider Prismen continuirlich in einander überging. Daraus folgt, dass in der Ausdehnung des dunklen Fleckes keine Reflexion stattfindet, somit, dass wenn einer total reflectirenden Fläche eine andere hinreichend nahe ge-

---

1) *Newton*, Optice lib. II, observ. 1 u. 2.

2) *Fresnel*, Bibliothèque universelle de Genève (Sciences et arts, nouvelle Série. T. XXII. 1823. Oeuvres complètes T. II. p. 179.

bracht wird, das Licht in dieselbe übergeht, ein Beweis, dass bei totaler Reflexion das Licht bis zu einer messbaren Tiefe in das dünnere Medium eindringt. Diese Tiefe lässt sich aus dem Durchmesser des dunkeln Fleckes ableiten. Beobachtet man nämlich bei gewöhnlicher Reflexion die Newton'schen Farbenringe, welche sich in der zwischen den Prismenflächen eingeschlossenen Luftschicht bilden, so kann man aus diesen die Dicke der Schicht an allen Stellen ableiten, somit auch an dem Umfange des dunklen Fleckes, durch welchen man bei einem Einfallswinkel, der grösser ist als der Grenzwinkel, hindurchsehen kann. Diese Dicke ist die grösste, bis zu welcher das Licht bei der totalen Reflexion eindringen kann. Auf diese Weise fand Fresnel, dass die Tiefe, bis zu welcher das Licht eindringen kann, mehr wie eine Wellenlänge betragen kann.

Genauer ist dieses Eindringen später von Stokes[1]) und Quincke[2]) untersucht worden. Nach Quincke ist dieser dunkle Fleck elliptisch geformt, er erscheint im reflectirten Lichte dunkel mit blauem Rande, im durchgehenden weiss mit rothem Rande. Der Durchmesser desselben, oder die Tiefe, bis zu welcher das Licht in das dünnere Medium eindringt, ändert sich mit dem Einfallswinkel, er ist verschieden, je nachdem das Licht parallel oder senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist. Bei dem Beginne der totalen Reflexion dringt das senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Licht, später, bei grösserem Einfallswinkel, das parallel der Einfallsebene polarisirte Licht tiefer in das dünnere Medium ein. Die Tiefe, bis zu welcher das Licht in das dünnere Medium eindringt, nimmt mit der Wellenlänge des Lichtes zu, wie sich schon daraus ergibt, dass der dunkle Fleck im reflectirten Lichte einen blauen, im durchgelassenen Lichte einen rothen Rand hat; sie ist ferner um so grösser, je geringer der Unterschied der Brechungsexponenten des dichtern und dünnern Mediums ist.

Befand sich zwischen den beiden Prismen Luft, so fand Quincke den grössten Werth der Tiefe, bis zu welchem das Licht eindrang, wenn das Licht parallel der Einfallsebene polarisirt war, zu 2,49 Wellenlängen; diese Tiefe wurde in der Nähe des Grenzwinkels, bei einem Einfallswinkel $38^{0}\,24'$ erreicht; bei Vergrösserung des Einfallswinkels nahm die Tiefe ab, und bei einem Einfallswinkel von $68^{0}\,26'$ betrug sie nur mehr 0,166 Wellenlängen. Für Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt waren die entsprechenden Tiefen 3,38 und 0,129. Als zwischen die Prismenflächen Wasser gebracht wurde, waren die Tiefen für parallel der Einfallsebene polarisirtes Licht an der Grenze, Einfallswinkel 56^{0}, 5,16, bei einem Einfallswinkel von $69^{0}\,28'$ gleich 0,940, für senkrecht zur Einfallsebene polarisirtes Licht waren die entsprechenden Werthe 5,61 und 0,947.

1) *Stokes,* Cambridge Philosophical Transactions vol. VIII. part 5. 1848.
2) *Quincke,* Poggend. Annal. Bd. CXXVII.

Dass bei gleichem Einfallswinkel zwischen den parallel und senkrecht polarisirten Strahlen eine zwischen 0 und $\frac{\lambda}{2}$ liegende Phasendifferenz durch die totale Reflexion eintreten muss, das zeigen auch die Gleichungen Fresnel's. Nach den allgemeinen Interferenzgleichungen erhalten wir nämlich

$$\cos 2\pi \frac{D}{\lambda} = p, \quad \sin 2\pi \frac{D}{\lambda} = q,$$

$$\cos 2\pi \frac{D'}{\lambda} = r, \quad \sin 2\pi \frac{D'}{\lambda} = s,$$

und daraus

$$\cos 2\pi \frac{D - D'}{\lambda} = \cos 2\pi \frac{D}{\lambda} \cdot \cos 2\pi \frac{D'}{\lambda} + \sin 2\pi \frac{D}{\lambda} \cdot \sin 2\pi \frac{D'}{\lambda} = pr - qs.$$

Bilden wir nun aus den vorher berechneten p, r, q, s diesen Ausdruck, so wird

$$\cos \frac{2\pi}{\lambda}(D - D') = \frac{\sin^2 i\,(1 + n^2) - 2 \sin^4 i - n^2}{\sin^2 i\,(1 + n^2) - n^2}.$$

Der sich hieraus ergebende Werth von $\frac{2\pi}{\lambda}(D - D')$ zeigt an, um welchen Bruchtheil einer Wellenlänge das senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Licht hinter dem parallel mit der Einfallsebene polarisirten zurückbleibt. Da nun der Werth des Cosinus im Allgemeinen weder $+1$ noch -1 ist, so folgt daraus, dass zwischen diesen beiden Strahlen eine zwischen 0 und $\frac{\lambda}{2}$ liegende Phasendifferenz vorhanden ist; ob dieselbe indess positiv oder negativ ist, das heisst, ob die senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Schwingungen in der That um so viel zurückbleiben oder ob sie voreilen, das lässt sich nicht entscheiden, da das Vorzeichen des Bogens sich nicht durch das Vorzeichen des Cosinus entscheiden lässt.

Im §. 123 des ersten Theiles haben wir den Nachweis geliefert, dass wenn in einer Punktreihe zwei zu einander senkrechte Schwingungen sich fortpflanzen, dieselben sich zu elliptischen Schwingungen zusammensetzen, ausser wenn die Phasendifferenz gleich 0 oder $\frac{\lambda}{2}$ ist, in welchen Fällen die resultirende Bewegung wieder eine gerade Linie ist. In den reflectirten Wellen müssen demnach die Aetherheilchen im Allgemeinen elliptische Bahnen haben, das Licht ist elliptisch polarisirt. Untersucht man es mit dem Kalkspath, so verhält es sich wie theilweise polarisirtes, es zerfällt in zwei Strahlen ungleicher Helligkeit. Nur in zwei Fällen bleibt das Licht geradlinig polarisirt, nämlich erstens, wenn der Einfallswinkel der Grenzwinkel, also $\sin i = n$, zweitens wenn $i = 90^0$, also $\sin i = 1$. Es sind das die beiden Grenzfälle der totalen Reflexion.

Wie wir im §. 123 des ersten Theiles ferner zeigten, kann unter gewissen Bedingungen die elliptische Bahn schwingender Punkte beim Zusammentreffen zweier in senkrechten Richtungen erfolgenden Schwingungen eine Kreisbahn

werden, nämlich dann, wenn die beiden zu einander senkrechten Amplituden an Grösse genau gleich und die Phasendifferenz genau $^1/_4$ Wellenlänge beträgt. Will man nun durch totale Reflexion circular polarisirtes Licht erhalten, so muss man zunächst bewirken, dass

$$A = B$$

wird. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn man bewirkt, dass das einfallende Licht unter einem Winkel $\alpha = 45^0$ gegen die Einfallsebene polarisirt ist, denn dann ist

$$A = \sqrt{(p^2 + q^2)} \,.\, \cos 45^0 = \cos 45^0 = \sqrt{^1/_2},$$
$$B = \sqrt{(r^2 + s^2)} \,.\, \sin 45^0 = \sin 45^0 = \sqrt{^1/_2}.$$

Damit die zweite Bedingung erfüllt werde, muss

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot (D - D') = (2m + 1)\,\frac{\pi}{2}$$

oder

$$\frac{\sin^2 i\,(1 + n^2) - 2\sin^4 i - n^2}{\sin^2 i\,(1 + n^2) - n^2} = 0.$$

Diese Bedingung durch einmalige Reflexion zu erfüllen, ist nicht immer möglich, da die Werthe von i, welche totale Reflexion geben, von dem Brechungsexponenten abhängen, und es nicht für jedes n möglich ist, einen Winkel i zu erhalten, welcher jener Bedingung Genüge leistet. Im Gegentheil ergeben ausführlichere Rechnungen, dass der Brechungsexponent eines Mittels, welches durch einmalige totale Reflexion das Licht circular polarisirt, höchstens

$$n = 0{,}4142$$

sein muss. Es ist das der Brechungsexponent aus dem Mittel in Luft; der reciproke Werth

$$n = 2{,}4142$$

der Brechungsexponent aus Luft in das Mittel zeigt, dass das Mittel das Licht mindestens so stark brechen muss als der Diamant.

Will man durch schwächer brechende Mittel circular polarisirtes Licht erhalten, so muss man mehrfach reflectiren lassen, indem jede neue Reflexion unter demselben Winkel i wiederum dieselbe Phasendifferenz ertheilt.

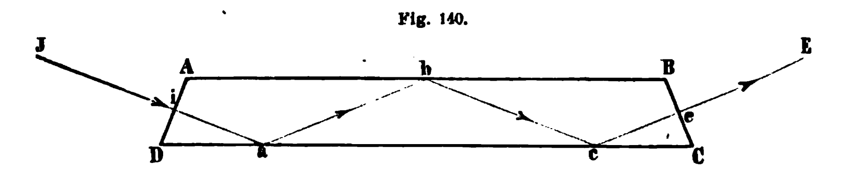
Für Spiegelglas von St. Gobain, dessen Brechungsexponent für mittlere Strahlen gleich 1,51 ist, ergibt die Theorie, dass eine dreimalige Reflexion unter einem Einfallswinkel $i = 69^0\,12',33$ das Licht circular polarisirt. Denn setzen wir diesen Werth in unsere Gleichung für die Phasendifferenz ein, so ergibt sich

$$\cos \frac{2\pi}{\lambda}\,(D - D') = \sqrt{^3/_4} = \cos 30^0 = \cos {^1/_3}\,\frac{\pi}{2}$$

$$D - D' = \frac{\lambda}{12}\,.$$

Um diese Folgerung der Theorie durch den Versuch zu prüfen, liess Fresnel aus solchem Glase ein Trapezoeder herstellen, $ABCD$ (Fig. 140), bei welchem die Seiten AD und BC mit der Basis DC Winkel von 69° 12′, 33 bildeten.

Fig. 140.



Auf die erste Seitenfläche AD liess er dann senkrecht Licht einfallen, dessen Polarisationsebene einen Winkel von 45° mit der Einfallsebene bildete. Beim Eintritt des Strahls in das Glas tritt weder eine Brechung noch eine Drehung der Polarisationsebene ein; bei a wird daher das Licht zum ersten Male unter den zur Circularpolarisation erforderlichen Bedingungen reflectirt; nachdem dort eine Phasendifferenz von $\frac{\lambda}{12}$ eingetreten, erhalten die beiden senkrecht zu einander polarisirten Lichtmengen bei b und c jedesmal dieselbe Phasendifferenz, es tritt daher bei c ganz circular polarisirtes Licht aus. Mit dem Kalkspath untersucht zeigte das austretende Licht auch keine Spur von Polarisation, in jeder Lage des Hauptschnittes traten zwei Strahlen gleicher Intensität aus dem Krystalle aus.

Dass mit dem Kalkspath untersucht circular polarisirtes Licht sich so zeigen muss, übersieht man sofort, wenn man erwägt, dass dasselbe aus zwei zu einander senkrecht polarisirten Bündeln gleicher Amplitude besteht. Beim Durchtritt durch den Kalkspath werden die Schwingungen des Lichtes nach zwei zu einander senkrechten Ebenen zerlegt; die beiden Ebenen mögen nun eine Lage haben, welche sie wollen, wenn zwei senkrecht zu einander polarisirte Wellen gleicher Intensität zugleich in den Kalkspath eindringen, so müssen sie immer zwei Componenten gleicher Amplitude bilden.

Eine genauere Untersuchung des total reflectirten Lichtes haben später Jamin[1]) und Quincke[2]) vorgenommen, indem sie direkt die Phasendifferenz der beiden senkrecht zu einander polarisirten Componenten des elliptisch polarisirten Lichtes nach einmaliger totaler Reflexion massen. Es ist dazu nöthig, dass man den einen oder andern Strahl in seiner Richtung so weit vorschiebt oder zurückschiebt, dass die Phasendifferenz Null wird, so dass also wieder geradlinig polarisirtes Licht entsteht. Es gelingt das leicht mit Hülfe des Babinet'schen Compensators[3]); bei der Bedeutung dieses Apparates für die

---

1) *Jamin*, Annales de chim. et de phys. 3. Sér. T. XXX. Krönig's Journal für Physik des Auslandes. Bd. I.

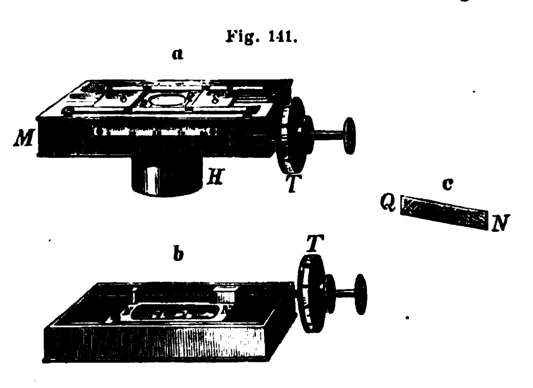
2) *Quincke*, Poggend. Annal. Bd. CXXVII.

3) Babiuet's Compensator in der zu Messungen geeigneten Form beschreibt Jamin, Annales de chim. et de phys. 3. Sér. T. XXIX. Poggend. Annal. Erg.-Bd III.

Untersuchung des elliptisch polarisirten Lichtes wird es gut sein, denselben schon hier etwas ausführlicher zu besprechen, obwohl wir dabei einige Sätze aus der im nächsten Kapitel zu besprechenden Doppelbrechung anwenden müssen.

Die wesentlichen Bestandtheile eines Babinet'schen Compensators sind zwei sehr schwach prismatische Quarzplatten von genau gleicher Dicke, welche so aus einem Quarzkrystall herausgeschnitten sind, dass die Axe des Krystalls der einen Fläche der Platten parallel ist; bei der einen Platte ist die Krystallaxe gleichzeitig der brechenden Kante des Prismas parallel, bei der andern dagegen ist sie zur brechenden Kante senkrecht. Die Hauptschnitte der beiden Platten sind also zu einander senkrecht. Die beiden Platten werden so vor einander gelegt, dass sie sich zu einem Parallelepipede, Fig. 141 c, ergänzen, und nun so die eine *QQ* an dem Deckel eines kleinen Kästchens von Messingblech, Fig. 141 a, befestigt. Der Deckel besitzt eine runde Durchbohrung von etwa 1 Centimeter Durchmesser, welche auf der Innenseite von der Quarzplatte bedeckt ist. Durch die Schieber *ss* kann diese Oeffnung bis auf einen ganz schmalen Spalt geschlossen werden. Die zweite Platte ist an einem beweglichen Rahmen *N* (Fig. 141 b zeigt den Compensator geöffnet, wenn die untere Platte Fig. *a* mit dem Rohr *H* fortgenommen ist) befestigt, welcher durch die Mikrometerschraube *R* nach rechts oder nach links verschoben werden kann. Die Verschiebung des Rahmens und mit demselben des Quarzprismas wird durch Drehung der mit der Trommel *T* versehenen Schraube hervorgebracht. Die Grösse der Verschiebung wird an der auf dem Rahmen *M* befindlichen Theilung mit Hülfe des an *N* befestigten Index und an der Theilung der Trommel abgelesen. Steht der Index auf 0, so liegen die Quarzplatten so über einander, dass in der Mitte des Gesichtsfeldes beide Platten ganz genau gleich dick sind. Diese Mitte ist durch zwei sehr nahe neben einander liegende Parallelfäden markirt. Nehmen wir an, dass die Quarzplatten wie Fig. 141 *c* liegen, wo wieder *Q* die feste, *N* die bewegliche bedeutet, so bewirkt eine Verschiebung von *N* zur Linken, dass in der Mitte des Gesichtsfeldes die zweite Platte dicker, eine Verschiebung zur Rechten, dass die zweite Platte dünner wird.

Fig. 141.



Durch die Art, wie die Platten aus dem Krystall geschnitten sind, wird bewirkt, dass Licht, welches mit senkrechter Incidenz durch die Platten hindurchgeht, sich in denselben stets senkrecht zu der Axe des Krystalls fortpflanzt. Eine Lichtwelle, welche unter einem Winkel α gegen die Axe der

ersten Platte polarisirt ist, wird beim Eintritt in die Platte dann in zwei Componenten zerlegt, von denen die eine parallel, die andere senkrecht zur Axe polarisirt ist; die Schwingungen der ersten Componente geschehen senkrecht zur Axe, die andern parallel derselben. Es tritt eben, wie wir das schon beim Kalkspath gesehen haben, eine Theilung in einen ordentlichen und einen ausserordentlichen Strahl ein. Der Brechungsexponent des ordentlichen Strahles ist 1,5471, der des ausserordentlichen 1,5563; letzterer ist also grösser. Daraus folgt, dass die Wellenlänge des ordentlichen Strahles λ_0 grösser ist, als die Wellenlänge des ausserordentlichen Strahles λ_e. Stellt deshalb

$$r = \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

die Gleichung der bei der Eintrittsstelle in den ersten Krystall ankommenden Lichtbewegung dar, so wird diese beim Eintritt in den Krystall in die beiden Componenten

$$y = \cos\alpha \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

$$z = \sin\alpha \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

zerlegt; jede dieser Componenten durchsetzt diesen Krystall mit der ihr zukommenden Geschwindigkeit. Nennen wir nun d_1 die Dicke der ersten Krystallplatte, und σ_1, resp. σ_2, die Schwächungen der im einfallenden Lichte gleich 1 gesetzten Amplitude in Folge der beiden Brechungen beim Eintritt und Austritt des Lichtes, so wird, nachdem das Licht den ersten Krystall durchsetzt hat, die Gleichung des ordentlichen, parallel der Axe polarisirten Strahles

$$y = \sigma_1 \cos\alpha \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{d_1}{\lambda_0}\right),$$

die des ausserordentlichen, senkrecht zur Axe polarisirten Strahles

$$z = \sigma_2 \,.\, \sin\alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{d_1}{\lambda_e}\right).$$

Nachdem die Strahlen so den ersten Krystall durchlaufen haben, treten sie in den zweiten ein, dessen Dicke wir gleich d_2 setzen wollen; da aber die Axe des zweiten Krystalles senkrecht ist zur Axe des ersten Krystalles und ebenso senkrecht zu den durchtretenden Strahlen, da ferner bei der senkrechten Incidenz eine Drehung der Schwingungsrichtung nicht stattfindet, so geschehen die Schwingungen desjenigen Strahles, welche im ersten Krystalle der Axe parallel waren, jetzt senkrecht zur Axe, die, welche senkrecht zur Axe waren, jetzt parallel der Axe. Der Strahl somit, der den ersten Krystall als ausserordentlicher durchsetzte, geht durch den zweiten als ordentlicher und umgekehrt. Nach dem Austritt aus dem zweiten Krystalle ist daher die Gleichung der Componente y

$$y = \sigma_1 \,.\, \sigma_2 \,.\, \cos\alpha \,.\, \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{d_1}{\lambda_0} - \frac{d_2}{\lambda_e}\right),$$

die der Componente z

$$z = \sigma_2 \,.\, \sigma_1 \,.\, \sin\alpha \,.\, \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{d_1}{\lambda_e} - \frac{d_2}{\lambda_0}\right).$$

Die beiden senkrecht zu einander polarisirten Componenten des den Compensator verlassenden Lichtes haben demnach in Bruchtheilen der Wellenlänge eine Phasendifferenz

$$\Delta q = (d_1 - d_2)\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_e}\right).$$

Ist dieser Ausdruck positiv, so ist der senkrecht zur Axe des ersten Krystalls polarisirte Strahl dem parallel polarisirten um diese Grösse voraus, ist derselbe negativ, so ist der parallel der Axe des ersten Krystalls polarisirte Strahl dem senkrecht polarisirten voraus. Da nun $\lambda_0 > \lambda_e$, so ist der Ausdruck negativ, wenn $d_1 > d_2$, positiv, wenn $d_2 > d_1$. Da man durch Verschiebung des zweiten Krystalls diese Fälle realisiren kann, so kann man auf diese Weise alle Arten polarisirten Lichtes erzeugen, geradliniges, wenn $\Delta q = 0, \pm \frac{\lambda}{2} \pm \lambda \ldots$ ist, elliptisches, wenn Δq einen dazwischen liegenden Werth hat, circulares, wenn $\Delta q = {}^1/_4\lambda$ ist und gleichzeitig $\alpha = 45^0$ ist, denn dann haben die beiden Componenten nach dem Austritt gleiche Amplitude.

Ebenso wie man mit dem Babinet'schen Compensator jede Art des elliptischen Lichtes erhalten kann, ebenso ist er geeignet, das elliptische Licht zu untersuchen, das heisst die Phasendifferenz und das Verhältniss der Amplituden der componirenden Strahlen zu bestimmen. Es falle auf den Compensator ein elliptisch polarisirter Strahl, so werden wir denselben als zusammengesetzt ansehen können aus zweien, von denen der eine im Azimuth 0, parallel der Axe der ersten Platte, der zweite im Azimuth 90^0, senkrecht zu der Axe polarisirt ist. Die Gleichung des ersten sei

$$y = a \,.\, \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

die des zweiten

$$z = b \,.\, \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{\Delta}{\lambda}\right).$$

Wir lassen nun die Strahlen durch den Compensator gehen und verschieben jetzt die verschiebbare Platte soweit nach der rechten oder linken Seite, bis das austretende Licht wieder geradlinig polarisirt ist, was man daran erkennt, dass durch einen Kalkspath, der nur einen der beiden polarisirten Strahlen hindurchlässt, das aus dem Compensator austretende Licht in einer bestimmten Stellung, in welcher seine Polarisationsebene mit dem Azimuth 0, der Axe der ersten Krystallplatte, den Winkel $90 + \beta$ bildet, ausgelöscht

wird. Die Polarisationsebene des den Compensator verlassenden Strahles bildet dann mit der Axe der ersten Platte den Winkel β.

Nach dem Durchtritt durch den Compensator werden die Gleichungen der beiden Strahlen.

$$y = \sigma_1 \,.\, \sigma_2 \,.\, a \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{d_1}{\lambda_0} - \frac{d_2}{\lambda_e}\right),$$

$$z = \sigma_2 \,.\, \sigma_1 \,.\, b \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{\Delta}{\lambda} - \frac{d_1}{\lambda_e} - \frac{d_2}{\lambda_0}\right),$$

und daraus, dass das Licht jetzt wieder geradlinig polarisirt ist, folgt, dass die Phasendifferenz dieser Strahlen entweder gleich 0 oder $\frac{\lambda}{2}$ oder irgend ein Vielfaches von $\frac{\lambda}{2}$ ist. Zur Bestimmung von Δ haben wir demnach die Gleichung

$$\frac{\Delta}{\lambda} + \frac{d_1}{\lambda_e} + \frac{d_2}{\lambda_0} = \frac{d_1}{\lambda_0} + \frac{d_2}{\lambda_e} + n\,\frac{\lambda}{2\lambda},$$

$$\frac{\Delta}{\lambda} = (d_1 - d_2)\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_e}\right) + n\,\frac{\lambda}{2\lambda},$$

wo n gleich 0 oder irgend eine Zahl der natürlichen Reihe sein kann. Welcher dieser Fälle vorhanden ist, das lässt sich, wenn ein elliptischer Strahl vorhanden ist, nicht ohne weiteres entscheiden. Wenn indess der elliptisch polarisirte Strahl aus einem geradlinig polarisirten Strahle entstanden ist, so lässt sich sofort entscheiden, ob n eine gerade oder ungerade Zahl von halben Wellenlängen ist. Liegt nämlich die Polarisationsebene des aus dem Compensator austretenden linear polarisirten Strahles in demselben Quadranten als jene des Strahles, aus welchem das elliptische Licht entstanden ist, so ist nach §. 123 des ersten Theiles n gleich 0 oder ein gerades Vielfaches von $\frac{\lambda}{2}$, liegt dagegen die Polarisationsebene in einem andern Quadranten, so ist n gleich 1 oder ein ungerades Vielfaches von $\frac{\lambda}{2}$. Es ergibt sich das unmittelbar daraus, dass zwei senkrecht zu einander polarisirte Schwingungen sich in beiden Fällen, wenn ihre Phasendifferenz 0 oder $\frac{\lambda}{2}$ ist, zu einer geradlinigen Schwingung zusammensetzen, die aber im letzten Falle senkrecht ist zu der im ersten. Da man indess den Compensator immer soweit verschrauben kann, dass die Polarisationsebene des ausgetretenen Strahles in demselben Quadranten liegt, so kann man also stets die Phasendifferenz gleich 0 oder einem geraden Vielfachen von $\frac{\lambda}{2}$ machen, und erhält dann einfach

$$\frac{\Delta}{\lambda} = (d_1 - d_2)\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_e}\right).$$

Welcher Strahl dem andern voraus ist, ergibt sich aus dem Vorzeichen von Δ; ist Δ positiv, so ist der im Azimuth 90° polarisirte Strahl um Δ ver-

zögert, ist Δ negativ, der im Azimuth 0 polarisirte, denn im ersten Falle ist die Gleichung für z

$$z = b \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{\Delta}{\lambda}\right) = b \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + \Delta}{\lambda}\right),$$

es ist also so, als käme der Strahl von einem Punkte, der um Δ weiter entfernt ist, wie der Ausgangspunkt von y; im zweiten Falle, wenn Δ negativ ist, wird

$$z = b \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{-\Delta}{\lambda}\right) = b \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x - \Delta}{\lambda}\right),$$

der Strahl z kommt von einem um Δ nähern Punkte.

Ausser der Phasendifferenz liefert uns der Compensator auch das Verhältniss der Theilamplituden a und b, aus dem Winkel β, welchen die Polarisationsebene des austretenden Strahles mit dem Azimuth 0, parallel welchem die Componente y des einfallenden Lichtes polarisirt gedacht wurde, bildet; da nämlich die Componente y senkrecht zum Azimuthe 0, die Componente z parallel demselben schwingt, so folgt

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{\sigma_2 \sigma_1 \,.\, b}{\sigma_1 \sigma_2 \,.\, a} = \frac{b}{a} \,.$$

Die Tangente des Winkels, welchen die Polarisationsebene des wieder geradlinig polarisirten Strahles mit dem Azimuthe 0 bildet, ist somit gleich dem Quotienten aus den Amplituden des im elliptischen Lichte senkrecht und parallel dem Azimuth 0 polarisirten Lichtes.

Mit Hülfe des Compensators hat nun zunächst Jamin gezeigt, dass die Phasendifferenz bei der totalen Reflexion, und das Amplitudenverhältniss durch die Fresnel'schen Gleichungen gegeben ist. Er benutzte zu dem Zwecke ein rechtwinkliges Prisma, dessen Brechungsexponent gleich 1,545 war, und liess Licht reflectiren, welches unter 45° gegen die Einfallsebene polarisirt war. Die Aenderungen der Amplitude und Phase, welche dabei durch die zweimalige Brechung beim Eintritt und Austritt des Lichtes eintritt, wurde direkt bestimmt. Quincke hat nicht nur das bei der gewöhnlichen totalen Reflexion reflectirte Licht, sondern ebenfalls bei den zwei auf einander gelegten Prismen das in der Nähe der Berührungsstelle hindurchgegangene und reflectirte Licht untersucht. Den Einfluss der Brechung auf die Amplitude des Lichtes zog er nach den Fresnel'schen Formeln in Rechnung. Ist das einfallende Licht im Azimuth α polarisirt, so ist die parallel der Reflexionsebene polarisirte Componente gleich $\cos \alpha$, die senkrecht polarisirte gleich $\sin \alpha$. Ist nun der Einfallswinkel an der ersten Prismenfläche AC, Fig. 142, gleich φ, der Brechungswinkel gleich φ', so wird durch die erste Brechung, nach §. 72, die Amplitude beider Componenten

$$\cos \alpha \frac{2 \sin \varphi' \cos \varphi}{\sin (\varphi + \varphi')}; \quad \sin \alpha \frac{2 \sin \varphi' \cos \varphi}{\sin \varphi \cos \varphi + \sin \varphi' \cos \varphi'},$$

oder das Verhältniss beider Amplituden

$$\cos \alpha \,.\, \cos (\varphi - \varphi') : \sin \alpha.$$

Durch die totale Reflexion werden sie

$$P\,.\cos\alpha\,.\cos(\varphi-\varphi')\,:\,S\,.\sin\alpha,$$

worin, wenn die totale Reflexion in der gewöhnlichen Weise erfolgt, nach der Fresnel'schen Gleichung $P=p^2+q^2=1$, $S=r^2+s^2=1$ ist. Nach dem Austritt des Strahles aus der zweiten Fläche wird das Verhältniss beider, da der Austrittswinkel ebenfalls gleich φ ist,

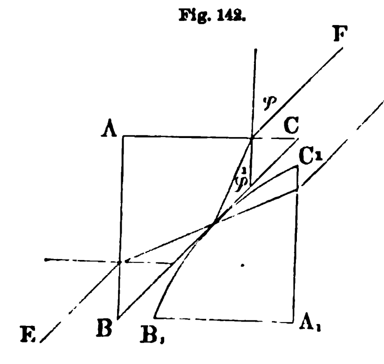


Fig. 142.

$$P\,.\cos\alpha\,.\cos^2(\varphi-\varphi')\,:\,S\sin\alpha.$$

Ist nun nach dem Durchtritt des Lichtes durch den Compensator das Azimuth der Polarisationsebene β, so ist

$$\operatorname{tang}\beta=\frac{S}{P}\cdot\operatorname{tang}\alpha\cdot\frac{1}{\cos^2(\varphi-\varphi')}$$

und daraus

$$k=\frac{S}{P}=\frac{\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\alpha}\cdot\cos^2(\varphi-\varphi').$$

Ganz genau dieselbe Gleichung gibt auch das Amplitudenverhältniss des senkrecht und parallel polarisirten Lichtes im durchgehenden Licht DE.

Bei dem Beginne der totalen Reflexion ist nun nach Quincke, entsprechend der Fresnel'schen Gleichung, welche für $\sin i = n$

$$\cos 2\pi\frac{D-D'}{\lambda}=-1,\quad D-D'=\frac{\lambda}{2}$$

liefert, der Phasenunterschied $\frac{\lambda}{2}$, die Componente parallel der Einfallsebene polarisirt gegen die senkrecht zur Einfallsebene polarisirte verzögert. Mit wachsendem Einfallswinkel wächst D für alle Stellen der Fläche CB, erreicht ein Maximum und nimmt wieder ab, um bei streifender Incidenz wieder $\frac{\lambda}{2}$ zu werden. Die Fresnel'sche Gleichung gibt die Werthe der Phasendifferenz indess nur für den Rand des vorhin erwähnten dunklen Fleckes und ausserhalb desselben. Ebenso ist auch nur dort k gleich 1; bei demselben Einfallswinkel ist das Amplitudenverhältniss k auf dem dunklen Fleck in der Nähe des Grenzwinkels kleiner als 1, nimmt bei wachsendem Einfallswinkel zu und erreicht auch dort den Werth 1; die Phasendifferenz ist stets kleiner als am Rande.

Auch das durch den dunklen Fleck hindurchgegangene Licht ist stets elliptisch polarisirt, die Phasendifferenz unterscheidet sich um $\frac{\lambda}{2}$ von der des an derselben Stelle reflectirten Lichtes, das Amplitudenverhältniss k ist in der Nähe des Grenzwinkels grösser als 1, und das um so mehr, je dicker die Schicht ist; mit steigendem Einfallswinkel i, das heisst, je weniger der die Berührungsfläche durchsetzende Strahl gegen die Fläche geneigt ist, nimmt das Verhältniss ab und wird selbst kleiner als 1. Folgende kleine Tabelle

lässt diese Verhältnisse übersehen, sie gibt die Werthe von k und $D - D'$, letztere in $\frac{\lambda}{4}$ für das in der Mitte des dunklen Flecks und am Rande durchgelassene und reflectirte Licht bei Flintglas, dessen Brechungsexponent 1,616 ist. Es ist also $n = \frac{1}{1,616}$, der Grenzwinkel 38° 14'.

	Mitte				Rand				
	durchgelassen		reflectirt		durchgelassen		reflectirt		
i	k	$D - D'$	k	$D - D'$	k	$D - D'$	k	$D - D'$ beob.	$D - D'$ berechn.
38° 50'	1,437	0,237	0,583	2,237	2,281	0,149	0,983	2,248	2,252
45°	1,253	0,452	0,954	2,408	1,323	0,594	1,002	2,588	2,574
51° 10'	0,937	0,499	0,960	2,516	0,889	0,635	0,998	2,588	2,580
63° 1'	0,602	0,418	1,057	2,379	0,581	0,463	0,984	2,446	2,447

Eine Vergleichung der letzten Columne mit der vorletzten zeigt, wie genau die Fresnel'schen Gleichungen mit den Beobachtungen übereinstimmen. Die Beobachtungen zeigen zugleich, in welcher Weise die Fresnel'sche Gleichung zur Rechnung verwandt werden muss; dieselbe gibt im Allgemeinen für $\cos 2\pi \frac{D - D'}{\lambda}$ einen negativen Werth, der entsprechende Bogen ist dann entweder um den dem berechneten Cosinus entsprechenden zwischen 0 und 90° liegenden Bogen ψ kleiner oder grösser als π, da $\cos(\pi - \psi) = \cos(\pi + \psi)$; die Beobachtungen von Quincke zeigen, dass im Allgemeinen die Phasendifferenz durch den Bogen $\pi + \psi$ gegeben ist.

§. 75.

Reflexion an Metallen. Der Fresnel'schen Theorie über die Reflexion des Lichtes folgen die Erscheinungen, welche das von Metallen reflectirte Licht bietet, nicht. Schon Malus fand, dass der Einfluss der Metalle auf das Licht bei der Reflexion eine anderer sei als derjenige durchsichtiger Körper; aus seinen ersten Versuchen schloss er, dass Metalle das Licht gar nicht zu polarisiren im Stande seien. Bald jedoch änderte er seine Ansicht, als er fand, dass das Phänomen der Polarisation theilweise hervorgebracht werde, und dass die polarisirende Wirkung zunehme, wenn der Einfallswinkel sich einem gewissen Winkel nähert. Der Unterschied zwischen Metallreflexion und der Reflexion an durchsichtigen Körpern besteht demnach zunächst darin, dass bei letzterer, wenn der Einfallswinkel dem Polarisationswinkel gleich ist, kein, oder wie wir im nächsten Paragraphen zeigen werden, nur sehr wenig senkrecht zur Einfallsebene polarisirtes Licht zurückgeworfen wird, während bei den Metallen immer ein mehr oder weniger beträchtlicher Theil desselben zurückgeworfen wird.

Die umfassendsten Arbeiten über Metallreflexion haben Brewster[1], Neumann[2]), Jamin[3]) und Quincke[4]) geliefert. Wir theilen zuerst die Beobachtungen Brewster's und deren Erklärung von Neumann mit, und geben dann die Bestätigungen und weitern Ausführungen der neuern Beobachter.

Brewster's Angaben sind im Wesentlichen folgende. Wenn ein von einem Metallspiegel zurückgeworfener Lichtstrahl durch einen Doppelspath zerlegt wird, so bemerkt man, dass er zum Theil polarisirt ist. Die Polarisation ist am stärksten bei der Zurückwerfung an Bleiglanz, am schwächsten bei der Reflexion von Silber. Der Winkel, unter welchem das Licht reflectirt werden muss, damit die Wirkung am deutlichsten hervortritt, ist ungefähr 75°, verändert sich jedoch von einem Metalle zum andern. Durch mehrfache Reflexion, bei constanter Einfallsebene, nimmt die Menge des polarisirten Lichtes zu, und durch hinreichend oft wiederholte Reflexion wird das Licht vollständig in der Einfallsebene polarisirt. Lässt man das Licht einer Wachskerze von Stahlplatten reflectiren, so ist bei Einfallswinkeln zwischen 60° und 80° das Licht nach achtmaliger Reflexion vollständig in der Einfallsebene polarisirt; bei Bleiglanz, Blei, Kobalt genügt eine geringere Anzahl, bei Silber jedoch bedarf es einer bedeutend grösseren Anzahl von Reflexionen.

Wendet man zu den Versuchen polarisirtes Licht an, dessen Polarisationsebene mit der Einfallsebene einen Winkel von 45° bildet, so ist nach zwei Reflexionen unter einem bestimmten Einfallswinkel das Licht wieder linear polarisirt, wenn die beiden Reflexionsebenen zusammenfallen. Der Einfallswinkel ist für jedes Metall ein bestimmter, für Stahl 75°, er wird von Brewster der Winkel des Polarisationsmaximums oder schlechthin der Polarisationswinkel genannt; man bezeichnet ihn jetzt gewöhnlich als Haupteinfallswinkel. Die Polarisationsebene nach der zweimaligen Reflexion ist stets eine andere, und zwar liegt sie an der andern Seite der Einfallsebene, so zwar, dass die Einfallsebene den spitzen Winkel, welchen die Polarisationsebene in der zweiten Lage mit der in der Lage vor der Reflexion bildet, schneidet.

Nach einer Reflexion ist das Licht weder gewöhnliches Licht, noch geradlinig polarisirtes. Ersteres kann es deshalb nicht sein, weil es nach einer zweiten Reflexion geradlinig polarisirt ist. Lässt man das zweimal reflectirte Licht noch ein drittes Mal reflectiren, so wird es wieder ebenso beschaffen wie nach der ersten Reflexion, durch eine vierte Reflexion wieder geradlinig u. s. f., so dass das Licht immer nach einer geraden Anzahl von Reflexionen geradlinig, nach einer ungeraden Anzahl jedoch theilweise polarisirt ist wie nach einmaliger Reflexion.

---

1) *Brewster*, Biot, Traité de physique. T. IV. p. 580. 1816. Philosophical Transactions. 1830. p. II. p. 287. Poggend. Annal. Bd. XXI.

2) *Neumann*, Poggend. Annal. Bd. XXVI. Bd. XL.

3) *Jamin*, Annales de chim. et de phys. 3. Sér. T. XIX et XXII.

4) *Quincke*, Poggend. Annal. Bd. CXXVIII.

Brewster schon nannte das einmal reflectirte Licht elliptisch polarisirt; er verband jedoch mit dieser Bezeichnung einen ganz andern Begriff, wie wir nach dem Vorgange Fresnel's damit verbinden.

Neumann zeigte indess, dass das Licht in der That elliptisch polarisirt ist, das heisst, dass die Aethertheilchen in elliptischen Bahnen sich bewegen. Er wies nach, dass die sämmtlichen von Brewster beobachteten Thatsachen sich aus folgenden zwei Grundsätzen erklären lassen:

1) Die Intensität eines von einer Metallfläche reflectirten Lichtstrahles ist verschieden, je nachdem seine Polarisationsebene in der Einfallsebene lag, oder zu ihr senkrecht war. In dieser Hinsicht verhalten sich die Metallflächen wie die Oberflächen durchsichtiger Körper bei der partiellen Reflexion, nicht wie bei der totalen Reflexion. Das Verhältniss der Intensitäten der parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisirt reflectirten Strahlen hängt ab von dem Einfallswinkel, und zwar wird die Intensität der reflectirten Strahlen, welche senkrecht zur Einfallsebene polarisirt sind, am kleinsten, wenn der Einfallswinkel dem Polarisationswinkel gleich ist, ohne jedoch jemals gleich Null zu werden. Von diesem Einfallswinkel nimmt ihre Intensität zu, sowohl wenn der Einfallswinkel grösser wird, als wenn er kleiner wird; wenn der Winkel 0^0 oder 90^0 wird, so ist ihre Intensität gleich derjenigen der parallel der Einfallsebene polarisirten Strahlen.

2) Zwei an einer Metallfläche reflectirte Strahlen, deren einer parallel, der andere senkrecht gegen die Einfallsebene polarisirt ist, verhalten sich so, dass der eine, nämlich der parallel polarisirte dem andern um den Bruchtheil einer Undulationslänge voraus ist; in so weit ist also die Metallreflexion der totalen Reflexion ähnlich. Bei dem Winkel des Polarisationsmaximums beträgt die Verzögerung immer eine viertel Wellenlänge.

Es ist leicht zu zeigen, wie hieraus die Erscheinungen sich den Brewster'schen Beobachtungen gemäss ergeben.

Wie wir in §. 123 des ersten Theiles sahen, geben zwei senkrecht gegen einander gerichtete Schwingungen, wenn sie mit irgend einer Phasendifferenz zusammentreffen, oder zwei senkrecht gegen einander gerichtete Schwingungen verschiedener Intensität bei einer Phasendifferenz von $^1/_4$ Wellenlänge durch Interferenz zu einer elliptischen Bewegung des von beiden Componenten gleichzeitig getroffenen Punktes Anlass. Wenn demnach bei der Reflexion von Metallen die Schwingungen des der Einfallsebene parallel polarisirten Lichtes immer eine grössere Intensität haben als die senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Strahlen, so muss, wenn die Strahlen durch Reflexion zugleich eine Phasendifferenz erhalten, immer durch dieselbe elliptisch polarisirtes Licht entstehen.

Wenn nun bei der Reflexion polarisirten Lichtes, dessen Polarisationsebene unter einem Winkel von 45^0 gegen die Einfallsebene geneigt ist, unter einem bestimmten Winkel die Phasendifferenz der beiden Strahlen gerade eine viertel Wellenlänge beträgt, so ertheilt eine zweimalige Reflexion denselben die

Phasendifferenz von einer halben Wellenlänge. Durch das Zusammenwirken der beiden Strahlen muss dann wieder geradlinig polarisirtes Licht entstehen. Wäre die Amplitude beider Schwingungen dieselbe, so müsste die Richtung der Schwingungen senkrecht sein zu derjenigen, welche die Schwingungen des einfallenden Lichtes besassen, oder die Polarisationsebene müsste um 90° gedreht sein, die Einfallsebene müsste den Winkel, welchen die Polarisationsebene in ihrer neuen Lage mit der frühern bildet, halbiren. Ist die Amplitude kleiner in den senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Strahlen, so muss die Drehung der Polarisationsebene weniger als 90° betragen. Die Brewster'schen Beobachtungen haben letzteres ergeben.

Bei einer nochmaligen Reflexion wird die Phasendifferenz wieder um eine viertel Wellenlänge zunehmen, das geradlinig polarisirte Licht wird also wieder elliptisch polarisirt, bei einer vierten Reflexion wird die Phasendifferenz eine ganze Wellenlänge, das Licht also wieder geradlinig polarisirt. Ueberhaupt muss nach einer ungeraden Anzahl von Reflexionen das Licht elliptisch, nach einer geraden Anzahl geradlinig polarisirt sein, wie es die Brewster'schen Beobachtungen ergeben.

Da aber die zur Einfallsebene senkrecht polarisirte Componente der Strahlen eine stärkere Schwächung der Amplitude erhalten, so muss auch nach den mehrfachen Reflexionen die Polarisationsebene des reflectirten Lichtes der Reflexionsebene immer näher rücken, und wenn die Reflexionen oft genug wiederholt sind, so dass die zur Einfallsebene senkrecht polarisirte Componente verschwindet, mit der Polarisationsebene zusammenfallen. Dieselbe Anzahl von Reflexionen muss dann aber bei Anwendung unpolarisirten Lichtes bewirken, dass das Licht vollständig in der Einfallsebene polarisirt sei. Auch das zeigen die Versuche Brewster's, indem er fand, dass bei der Reflexion von Stahl ein unter dem Azimuthe 45° polarisirter Strahl nach achtmaliger Reflexion ganz in der Einfallsebene polarisirt war, und dass ebenso gewöhnliches Licht nach einer gleichen Anzahl Reflexionen geradlinig und der Einfallsebene parallel polarisirt war.

Quincke benutzte zu seinen Versuchen hauptsächlich den Babinet'schen Compensator, mit welchem man, wie wir im vorigen Paragraphen sahen, direkt den Phasenunterschied der beiden Componenten und das Amplitudenverhältniss derselben erhält. Ist das einfallende Licht unter dem Azimuthe α polarisirt, so sind seine beiden Componenten $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$, erstere senkrecht, letztere parallel der Einfallsebene polarisirt. Wird erstere nach der Reflexion $S \cdot \sin\alpha$, letztere $P \cdot \cos\alpha$, und nennen wir das Azimuth der Polarisationsebene, wenn der elliptisch polarisirte Strahl durch den Babinet'schen Compensator wieder in geradlinig polarisirten verwandelt ist β, so ist

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{S}{P} \cdot \operatorname{tang}\alpha = k \cdot \operatorname{tang}\alpha.$$

$$k = \frac{\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\alpha}.$$

Gibt man dem einfallenden Lichte das Polarisationsazimuth 45°, so ist $\tan \alpha = 1$ und $k = \tan \beta$.

Das Azimuth β nennt man das Azimuth der wiederhergestellten Polarisation, und in dem Falle, dass der Einfallswinkel der Polarisations- oder Haupteinfallswinkel ist, das Hauptazimuth. Die Tangente des Hauptazimuths gibt das Verhältniss k in dem Falle, wo das Licht der geradlinigen Polarisation am nächsten kommt, weil S dort seinen kleinsten Werth hat.

Aus den Versuchen von Quincke und ähnlichen von Jamin ergibt sich nun, dass die Phasendifferenz zwischen den beiden Componenten für senkrechte Incidenz gleich Null ist, dass aber, sobald der Einfallswinkel von Null verschieden ist, der senkrecht gegen die Einfallsebene polarisirte Strahl hinter dem parallel polarisirten zurückbleibt, und zwar um so mehr, je grösser der Einfallswinkel ist; wird derselbe gleich dem Haupteinfallswinkel H, so ist die Phasendifferenz gleich $\frac{\lambda}{4}$, und von dort bis zum Einfallswinkel 90° wächst sie bis auf $\frac{\lambda}{2}$.

Ebenso bestätigen diese Versuche die Sätze Neumann's über das Amplitudenverhältniss der beiden reflectirten Componenten, für senkrechte Incidenz ist $k = 1$, nimmt dann ab bis der Einfallswinkel gleich dem Haupteinfallswinkel ist, und wächst dann wieder bis 1, wenn der Einfallswinkel gleich 90° geworden ist. So gibt Jamin durch direkte Messungen folgende Werthe der von Stahl reflectirten Amplituden:

Einfallswinkel	S	P	k
85°	0,719	0,951	0,756
80°	0,547	0,945	0,578
75°	0,566	0,946	0,598
70°	0,545	0,915	0,595
60°	0,630	0,897	0,703
40°	0,688	0,780	0,880
20°	0,770	0,780	0,988.

Folgende Tabelle enthält eine Beobachtungsreihe von Quincke für die Reflexion auf Silber; die als berechnet angegebenen Werthe des Azimuths der wieder hergestellten Polarisation und der Phasendifferenz δ sind nach den gleich zu besprechenden Gleichungen von Cauchy erhalten. Das einfallende Licht war unter dem Azimuth 45° polarisirt, bei der Beobachtung wurde vor das Auge ein rothes Glas gehalten.

Einfallswinkel i	β beob.	$k = \text{tang}\,\beta$	β ber.	δ in $\frac{\lambda}{4}$	
				beob.	ber.
25°	45° 59′	1,023	44° 49′	0,039	0,070
35°	44° 45′	0,991	44° 37′	0,165	0,143
45°	43° 44′	0,957	44° 22′	0,248	0,249
55°	43° 12′	0,939	44° 11′	0,389	0,404
65°	43° 45′	0,957	43° 36′	0,619	0,633
74° 50′	43° 20′	0,943	43° 20′	1	1
80°	44° 2′	0,967	43° 29′	1,262	1,267
85°	45° 14′	1,008	44° 3′	1,621	1,613

Auf Grund der Brewster'schen Beobachtungen schon hatten Neumann [1]) in weiterer Ausführung der vorhin angeführten Sätze und unter Anwendung der Fresnel'schen Reflexionstheorie und später Cauchy [2]) Gleichungen gegeben, welche das Verhältniss der Amplituden und die Phasendifferenz der beiden Componenten bei metallischer Reflexion zu berechnen gestatten, wenn der Haupteinfallswinkel und das Hauptazimuth bekannt sind. Quincke hat mit seinen Messungen die Gleichungen von Cauchy verglichen, denen er folgende, mit der ihnen von Eisenlohr [3]) gegebenen bis auf verschwindende Grössen übereinstimmende Gestalt gab. Ist δ die Phasendifferenz, β das Azimuth der wieder hergestellten Polarisation für den Einfallswinkel i, so wird

$$\text{tang}\,\frac{\delta}{\lambda}\cdot 2\pi = \sin 2B\cdot\text{tang}\left(2\,\text{arc}\cdot\text{tang} = \frac{\sin i\,\text{tang}\,i}{\sin H\,.\,\text{tang}\,H}\right)$$

$$\cos 2\beta = \cos 2B\cdot\sin\left(2\,\text{arc}\cdot\text{tang} = \frac{\sin i\,.\,\text{tang}\,i}{\sin H\,.\,\text{tang}\,H}\right),$$

worin B das Hauptazimuth und H den Haupteinfallswinkel bedeuten.

Wie obige Tabelle ergibt, und wie Quincke weiter gezeigt hat, werden δ und β durch diese Gleichungen mit befriedigender Genauigkeit wiedergegeben, wenn man dicke Metallplatten anwendet; diese Uebereinstimmung zeigt sich auch dann, wenn man das Licht von dem Metall nicht in Luft, sondern in irgend ein anderes durchsichtiges Medium reflectiren lässt, natürlich mit dem für dieses Mittel gültigen Hauptazimuth und Haupteinfallswinkel. Beide sind im Allgemeinen um so kleiner, je grösser der Brechungsexponent des Mittels ist, in welchem die Reflexion stattfindet.

---

1) *Neumann* a. a. O. und *Wild*, Neue Denkschriften der Schweizerischen Gesellschaft der Naturwissenschaften. Bd. XV. p. 20.

2) *Cauchy*, Comptes Rendus. VIII. p. 560. Cauchy gab die Gleichungen ohne Ableitung; letztere geben *Beer*, Poggend. Annal. Bd. XCI u. XCII. *Friedrich Eisenlohr*, Poggend. Annal. Bd. CIV.

3) *F. Eisenlohr* a. a. O. p. 372.

Ebenso gut stimmen indess mit den Versuchen von Quincke die Gleichungen von Neumann, obwohl denselben ganz andere Hypothesen zu Grunde liegen, wie das Jochmann [1]) nachgewiesen hat. Daraus folgt, dass wir aus dieser Uebereinstimmung nicht die Richtigkeit der einen oder andern Theorie schliessen dürfen.

Gegen diese Richtigkeit spricht auch ein anderer Umstand; bei den theoretischen Ableitungen ist vorausgesetzt, dass die Reflexion in der Grenzfläche des Metalles stattfinde; aus den Versuchen von Quincke [2]) ergibt sich aber, dass das nicht der Fall ist, dass auf die Reflexion auch die unterhalb der Grenzfläche liegenden Schichten von Einfluss sind. Stellt man nämlich in der schon früher erwähnten Weise keilförmige Silberschichten auf Glas her, und lässt von diesen an verschiedenen Stellen Licht reflectiren, so findet man Hauptazimuth und Haupteinfallswinkel je nach der Dicke der Schicht verschieden. So erhielt Quincke z. B. an zwei Silberplatten folgende Werthe:

Silberplatte No. 51			Silberplatte No. 52		
Dicke der Schicht	H	B	Dicke der Schicht	H	B
$0^{mm},000014$	72° 4′	21° 1′	$0^{mm},000015$	70°	24° 25′
$0^{mm},000024$	72° 7′	33° 58′	$0^{mm},000043$	71° 22′	40° 46′
$0^{mm},000040$	72° 6′	38° 32′	$0^{mm},000060$	71° 13′	45° 7′
$0^{mm},000047$	72° 13′	42° 38′	$0^{mm},000075$	71° 47′	45° 30′
$0^{mm},000055$	72° 27′	43° 57′			

Man sieht, wie mit steigender Dicke sowohl Haupteinfallswinkel als Hauptazimuth wachsen, ein Beweis, dass das Licht bei der Reflexion von Metallen ebenso wie bei der totalen Reflexion in das zweite Mittel eindringt.

Wir haben bisher bei Betrachtung der Erscheinungen des reflectirten Lichtes die Abhängigkeit der Erscheinungen von der Wellenlänge ausser Acht gelassen; schon Brewster fand indess, dass der Haupteinfallswinkel von der Farbe des Lichtes abhängig sei, und Jamin [3]) hat für eine Anzahl Metalle die Haupteinfallswinkel und Hauptazimuthe für die verschiedenen Farben bestimmt. Er wandte dazu die Methode von Brewster an, indem er den Einfallswinkel aufsuchte, der nach zweimaliger Reflexion das Licht geradlinig polarisirte und dann das Azimuth der wieder hergestellten Polarisation beobachtete. Der so gefundene Einfallswinkel ist der Haupteinfallswinkel; das Hauptazimuth erhält man daraus auf folgende Weise. Ist das Azimuth des einfallenden Lichtes α, so werden die Componenten nach der ersten Reflexion

1) *Jochmann,* Poggend. Annal. Bd. CXXXVI.

2) *Quincke,* Poggend. Annal. Bd. CXXIX.

3) *Jamin,* Annales de chim. et de phys. 3. Sér. T. XXII. Poggend. Annal. Ergänzungsband II.

$S \cdot \sin\alpha$, $P \cdot \cos\alpha$, nach der zweiten in derselben Einfallsebene stattfindenden Reflexion werden sie $S^2 \sin\alpha$ und $P^2 \cdot \cos\alpha$. Ist nun β_2 das Azimuth der wieder hergestellten Polarisation, so wird

$$\text{tang}\,\beta_2 = \frac{S^2}{P^2} \cdot \text{tang}\,\alpha = k^2 \cdot \text{tang}\,\alpha$$

$$k = \sqrt{\frac{\text{tang}\,\beta_2}{\text{tang}\,\alpha}} = \text{tang}\,B.$$

Folgende Tabelle enthält einige der von Jamin gegebenen Werthe:

Farbe	Silber		Glockenmetall		Stahl		Zink		Spiegelfolie	
	H	B	H	B	H	B	H	B	H	B
Roth	75° 0'	40° 59'	74° 15'	28° 46'	77° 4'	16° 29'	75° 11'	17° 9'	76° 14'	28° 37'
D	72° 30'	40° 9'	73° 28'	28° 24'	76° 40'	16° 48'	74° 27'	18° 45'	74° 7'	27° 21'
E	71° 30'	40° 19'	72° 20'	25° 31'	75° 47'	17° 30'	73° 28'	21° 13'	73° 35'	25° 52'
F	69° 34'	39° 46'	71° 21'	23° 55'	75° 8'	18° 29'	72° 32'	22° 44'	73° 4'	26° 15'
H	66° 12'	39° 50'	70° 2'	23° 21'	74° 32'	20° 7'	71° 18'	25° 18'	71° 56'	28° 0'

Bei allen Metallen nehmen die Haupteinfallswinkel ab, wenn die Wellenlänge kleiner wird, ein Verhalten, welches sie wesentlich von demjenigen der durchsichtigen Körper unterscheidet, bei welchen für den Polarisationswinkel die Beziehung besteht

$$\text{tang}\,i = n,$$

bei welcher somit der Polarisationswinkel mit abnehmender Wellenlänge zunimmt. Will man diese Relation auch für den Haupteinfallswinkel der Metalle gelten lassen, so würde man daraus folgern müssen, dass bei Metallen, wie beim Jodgas, die Dispersion eine umgekehrte wäre, dass für diese das violette Ende des Spectrums das weniger brechbare wäre.

In Bezug auf die Werthe von B unterscheiden sich die Metalle in drei Klassen: 1) Für Silber, Glockenmetall und ebenso für Gold, Kupfer und Messing nimmt der Werth von B vom Rothen bis zum Violetten stetig ab. 2) Für Stahl und Zink nimmt der Werth von B vom Rothen zum Violetten stetig zu. 3) Für Spiegelmetall nimmt B ab bis zum Grünen und wächst dann wieder, so dass es an den Grenzen des Spectrums nahezu denselben Werth hat.

Quincke[1]) hat in Verfolgung seiner Versuche über den Einfluss der Metalldicke auf das reflectirte Licht ebenfalls das in die Metalle eingedrungene Licht untersucht, und ist dabei zu höchst merkwürdigen Resultaten gelangt, die uns zu der Ansicht zwingen, dass das Verhalten des Lichts in Metallen durchaus keine Aehnlichkeit mit dem in durchsichtigen Körpern hat. Metallschichten, Silber, Gold, Platin, von so geringer Dicke, dass das Licht dieselben durchdringen konnte, stellte er in ähnlicher Weise dar, wie wir es

1) *Quincke*, Poggend. Annal. Bd. CXXIX. p. 177 ff.

§. 66 bereits erwähnten[1]). Die Dicke derselben wurde theils aus der Zeit bestimmt, während welcher sich das Metall auf dem Glase abgesetzt hatte, theils aus der Farbe der Newton'schen Ringe, welche eine Luftschicht von derselben Dicke wie das Metall gab. Für Silber endlich, welches zu den Versuchen hauptsächlich angewandt wurde, bestimmte er die Dicke, indem er das Silber durch Auflegen von Jod in Jodsilber verwandelte und in diesem dann die Farben dünner Blättchen beobachtete.

An keilförmigen Metallschichten zeigten sich dann in der That ähnliche Erscheinungen, wie wenn die Metallschicht eine Luftschicht wäre zwischen zwei für die Newton'schen Farbenringe eingerichteten Gläsern. Sah man nämlich auf eine solche Schicht herab oder durch dieselbe hindurch, so erschienen helle und dunkle Streifen, und zwar fand man stets bei den Dicken

	E_0	E_1	E_2	E_3
im reflectirten Licht	dunkel	hell	dunkel	hell
im durchgehenden Licht	hell	dunkel	hell	dunkel

wo die Dicken mit steigender Ordnungszahl zunehmen. Bei grössern Dicken waren keine Interferenzstreifen mehr wahrzunehmen.

In einer Beziehung zeigten indess die Interferenzstreifen einen wesentlichen Unterschied gegenüber denjenigen in durchsichtigen Medien; für diese haben wir gesehen, dass die Dicke der Schicht, bei welcher ein bestimmter Streifen erscheint, abhängig ist von dem Einfallswinkel und von der Wellenlänge des angewandten Lichtes (§. 58). Bei den Interferenzstreifen in der Metallschicht war die Lage derselben, und somit die Dicke der Schicht für alle Einfallswinkel, und der Abstand der hellen oder dunklen Streifen für alle Wellenlängen derselbe.

Wollte man nun auf Metalle die für durchsichtige Substanzen gültigen Sätze anwenden, so würde aus den letzten Erfahrungen sich ergeben, dass unter welchem Winkel das Licht auch auf das Metall fällt, der Brechungswinkel immer derselbe sein muss, oder wenn man es nach dem für durchsichtige Substanzen geltenden Brechungsgesetz aussprechen will, der Brechungsexponent müsste proportional dem Sinus des Einfallswinkel sein. Ferner, da der Abstand der Streifen nicht von der Wellenlänge abhängt, so müsste der Brechungsexponent für alle Farben derselbe sein.

Entsprechend dem Verhalten durchsichtiger Körper verhielten sich die Dicken $E_1 : E_2 : E_3$ wie $1 : 2 : 3$, nur war stets $E_2 < 2\, E_1$. Man kann daraus schliessen, dass das Licht $^3/_4\, \lambda$ in das Metall eindringt und aus dem Innern wieder zurückgeworfen wird. Durch Messung der Schichtdicke kann man dann die Wellenlänge und aus dieser den Brechungsexponenten des betreffenden Metalles berechnen. Für verschiedene Silberplatten fand Quincke so für E_3 Werthe, die zwischen 0,000061 und 0,000036 lagen, woraus für mittlere Strahlen, deren Wellenlänge in Luft 0,00055 ist, Werthe der Wellenlängen

1) *Quincke*, Poggend. Annal. Bd. CXXIX. p. 44 ff.

zwischen 0,000081 und 0,000044, also Brechungsexponenten zwischen 6,7 und 12,5 sich ergeben, Werthe, die alle sonst gefundenen Brechungsexponenten weit übersteigen.

Nach andern Methoden hat Quincke [1]) an denselben Platten indess Brechungsexponenten gefunden, die kleiner sind als 1. Denn brachte er in eines der beiden interferirenden Bündel des Jamin'schen Interferentialrefractors eine Glasplatte, in das andere eine genau ebensolche versilberte durchsichtige Platte, so wurden die Interferenzstreifen nach der dem Metall abgewandten Seite verschoben. Daraus ergibt sich das merkwürdige Resultat, dass die Phase des Lichtstrahls bei dem Durchgange durch das Metall beschleunigt wird. Diese Beschleunigung ergab sich um so grösser, je dicker das Metall war, sie erreichte für einen bestimmten Einfallswinkel einen Maximalwerth und war für parallel der Einfallsebene polarisirtes Licht grösser als für senkrecht zur Einfallsebene polarisirtes Licht.

Bestimmt man die Dicke des Metalls, welches von dem Lichte durchdrungen werden kann, so findet man dieselbe für alle Farben gleich gross, bei Silber für senkrechte Incidenz grösser als $0^{mm},000112$. Für Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt bleibt die Tiefe für alle Incidenzen ziemlich dieselbe, für Licht parallel der Einfallsebene polarisirt nimmt die Tiefe mit dem Einfallswinkel ab.

Nach den letzten Erfahrungen werden bei dem Eindringen des Lichtes in Metalle, sobald der Einfallswinkel von Null verschieden ist, Phase und Amplitude der zu einander senkrecht polarisirten Componenten des eindringenden Lichtes verschieden geändert; lässt man deshalb im Azimuth α linear polarisirtes Licht durch eine Metallplatte hindurchgehen, so muss dasselbe elliptisch polarisirt werden. In der That fand Quincke [2]) bei der Untersuchung des von dünnen Silber-, Gold- und Platinschichten durchgelassenen Lichtes mittels des Babinet'schen Compensators, dass die $\perp$ zur Einfallsebene polarisirte Componente stets gegen die $\|$ derselben polarisirte verzögert ist, wie bei dem von Metallen reflectirten Lichte, und dass die Phasendifferenz und das Verhältniss $\frac{S}{P}$ mit wachsendem Einfallswinkel continuirlich zunimmt. Ein einfaches Gesetz für diese Zunahme der Phasendifferenz und des Amplitudenverhältnisses bei dem von Metallen durchgelassenen Lichte war nicht zu erkennen.

§. 76.

Elliptische Polarisation bei gewöhnlicher Reflexion. Nach den Arbeiten Fresnel's und den sie bestätigenden Versuchen Brewster's nahm man anfänglich an, dass zwischen der Reflexion an Metallen und jener an durch

1) *Quincke,* Poggend. Annal. Bd. CXIX. p. 379. CXX. p. 602.
2) *Quincke,* Poggend. Annal. Bd. CXIX.

sichtigen Medien ein wesentlicher Unterschied vorhanden sei, dass bei den durchsichtigen Medien, so lange der Einfallswinkel kleiner als der Polarisationswinkel sei, die senkrecht und parallel der Einfallsebene polarisirten Componenten ganz ohne Phasendifferenz reflectirt würden, dass wenn der Einfallswinkel dem Polarisationswinkel gleich sei, entsprechend der Gleichung

$$S = -\frac{\tang (i-r)}{\tang (i+r)},$$

die reflectirte Amplitude des senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Lichtes gleich Null werde, und dass wenn der Einfallswinkel noch grösser als der Polarisationswinkel wird, die beiden reflectirten Componenten die Phasendifferenz einer halben Wellenlänge erhalten, da wenn $i + r > 90^0$, $\tang (i+r)$ negativ wird.

Indess schon Brewster [1]) selbst fand, dass besonders bei der Reflexion an stark brechenden Medien das unter dem Polarisationswinkel zurückgeworfene Licht nicht vollständig polarisirt sei, eine Beobachtung, welche A. Seebeck [2]) bei der Untersuchung des von Diamant und Zinkblende zurückgeworfenen Lichtes bestätigte. Wenige Jahre später machte Airy ähnliche Beobachtungen am Diamant, und er schloss bereits daraus [3]), dass das vom Diamant zurückgeworfene Licht ähnlich dem von Metallen zurückgeworfenen elliptisch polarisirt sei, dass somit die Phasendifferenz der senkrecht und parallel zur Einfallsebene polarisirten vom Diamant reflectirten Componenten mit wachsendem Einfallswinkel von 0 bis $\frac{\lambda}{2}$ zunehme, und dass bei dem Polarisationswinkel, den Jamin später Haupteinfallswinkel nannte, die Phasendifferenz gleich $\frac{\lambda}{4}$ wäre, gerade wie bei den Metallen. In einem Punkte unterscheidet sich indess die Reflexion bei dem Diamant von derjenigen an Metallen; während bei den letztern die Zunahme der Phasendifferenz stetig mit wachsendem Einfallswinkel erfolgt, ist sie bei dem Diamant bis zu Einfallswinkeln, die nur wenige Grade vom Polarisationswinkel abweichen, unmerklich, sie wächst dann rasch in der Nähe des Polarisationswinkels, zunächst bis $\frac{\lambda}{4}$, wenn derselbe erreicht ist, und dann auf fast $\frac{\lambda}{2}$, wenn derselbe nur um wenige Grade überschritten ist, um dann allmählich, während der Einfallswinkel bis 90^0 zunimmt, auf $\frac{\lambda}{2}$ anzusteigen. Ausserdem war die unter dem Polarisationswinkel vom Diamant reflectirte Amplitude des senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Lichtes sehr klein gegen die Amplitude des parallel

---

1) *Brewster,* Philosophical Transactions for 1815. p. 125.

2) *Seebeck*, Observationes de corporum lucem simpliciter refringentium angulis polarisationis. Dissert. Berol. 1830. Poggend. Annal. Bd. XX. p. 35.

3) *Airy,* Philosophical Magazin. 3. Series. vol. I (1833). p. 25. Poggend. Annal. Bd. XXVIII.

zur Einfallsebene polarisirten Lichtes. Airy vermuthet, dass alle durchsichtige Substanzen ähnliche Erscheinungen darbieten.

Diese Beobachtungen stimmten mit der Fresnel'schen Theorie nicht überein; deshalb nahm Cauchy [1]) die Frage wieder auf, und gab für die reflectirten Amplituden Gleichungen, welche entsprechend den Beobachtungen Airy's zeigten, dass die Amplitude S niemals gleich Null ist, und dass zwischen den beiden reflectirten Componenten im Allgemeinen eine Phasendifferenz vorhanden sein muss. Durch die gleich zu besprechenden Beobachtungen Jamin's modificirte Cauchy seine Gleichungen später etwas [2]) und gab ihnen folgende Form. Nennen wir auch jetzt, wie früher, B das Azimuth der wiederhergestellten Polarisation, wenn das Azimuth der ursprünglichen Polarisation 45^0 ist, dessen Tangente gleich ist dem Quotienten der senkrecht und parallel der Einfallsebene polarisirten Componenten, so wird

$$\text{tang}^2 B = \frac{S^2}{P^2} = \frac{\cos^2(i+r) + \varepsilon^2 \sin^2 i \,.\, \sin^2(i+r)}{\cos^2(i-r) + \varepsilon^2 \sin^2 i \,.\, \sin^2(i-r)},$$

während P denselben Werth wie nach Fresnel

$$P = -\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}$$

und S den Werth hat

$$S^2 = \frac{\text{tang}^2(i-r) + \varepsilon^2 \,.\, \sin^2 i \,.\, \text{tang}^2(i-r)\,\text{tang}^2(i+r)}{\text{tang}^2(i+r) + \varepsilon^2 \,.\, \sin^2 i \,.\, \text{tang}^2(i-r)\,\text{tang}^2(i+r)}.$$

Wie man sieht unterscheiden sich diese Gleichungen von den Fresnel'schen nur durch die mit der Constante ε behafteten Glieder, welche Constante ε man den Ellipticitätscoefficienten der betreffenden Substanz nennt. Setzt man diesen Coefficienten gleich Null, so erhalten wir die Gleichungen Fresnel's.

Nennen wir den Gangunterschied der senkrecht und parallel der Einfallsebene polarisirten Strahlen δ, so wird

$$\text{tang}\,\frac{\delta}{\lambda} \cdot 2\pi = \varepsilon\,\frac{\sin i\,\left\{\text{tang}(i+r) - \text{tang}(i-r)\right\}}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 i\,\text{tang}(i+r) \,.\, \text{tang}(i-r)},$$

so dass also die Phasendifferenz wesentlich von dem Ellipticitätscoefficienten der betreffenden Substanzen abhängig ist.

Cauchy gab seine Formeln ohne Beweis, indess sind dieselben später mehrfach von Beer [3]), von Ettingshausen [4]), Fr. Eisenlohr [5]) und in ziemlich elementarer Weise von von Lang [6]) abgeleitet worden. Die beiden zuletzt angeführten Mathematiker zeigen, wie sich die Cauchy'schen Gleichungen unmittelbar aus dem Grundsatze ergeben, dass bei der Ankunft einer Wellenbewegung an der Grenze zweier Mittel und bei der dort stattfindenden Reflexion

1) *Cauchy,* Comptes Rendus. T. IX. p. 729. 1839.
2) *Cauchy,* Comptes Rendus. T. XXVIII. p. 124. 1849.
3) *Beer,* Poggend. Annal. Bd. XCI u. XCII.
4) *von Ettingshausen,* Sitzungsberichte der Wiener Akademie für 1855.
5) *Fr. Eisenlohr,* Poggend. Annal. Bd. CIV.
6) *von Lang,* Einleitung in die theoretische Physik. p. 264.

und Brechung durchaus keine Stetigkeitsunterbrechung stattfinden kann, das heisst, dass die Summe der Bewegung längs der ganzen Grenzfläche und in jedem Zeitmomente in beiden Medien dieselbe und dass sie continuirlich sei. Dazu müssen die Verschiebungen der Aethertheilchen sowohl an der Grenze, sei es dass man sie als zum ersten oder zweiten Medium gehörig betrachtet, als auch in unmittelbarer Nähe der Grenze genau dieselben sein.

Beachtet man nun, wie es Fresnel that, nur die transversalen Schwingungen, welche an der Grenze ankommen und bei der Reflexion und Brechung entstehen, so erhält man aus diesem Grundsatze unmittelbar die Fresnel'schen Gleichungen; für Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene erhält man deshalb auch den Ausdruck, welchen Fresnel für dasselbe gegeben hat, da bei diesem überhaupt nur transversale Schwingungen vorkommen.

Anders für Licht, welches in der Einfallsebene schwingt; da der gebrochene sowohl als der reflectirte gegen den einfallenden Strahl und dessen Schwingungen geneigt sind, so müssen die ankommenden Schwingungen in dem reflectirten und gebrochenen Strahl auch zu longitudinalen Schwingungen Anlass geben. Fresnel liess dieselben ausser Acht, weil in den wahrnehmbaren Lichtwellen keine longitudinalen Schwingungen vorhanden sind. Die Cauchy'sche Theorie dagegen beachtet die an der Grenze unzweifelhaft vorhandenen longitudinalen Schwingungen, nimmt aber gleichzeitig, gestützt auf die unzweifelhafte Thatsache des nicht Vorhandenseins von longitudinalen Wellen im polarisirten und deshalb auch im natürlichen Lichte an, dass die longitudinalen Schwingungen in jeder messbaren Entfernung von der Grenzfläche verschwunden sind. Es kann das auf zwei verschiedene Weisen erreicht sein; entweder nehmen die Schwingungen bei der Entfernung von der Grenze sehr rasch an Intensität ab, so dass sie schon in der geringsten messbaren Entfernung nicht mehr wahrnehmbar sind, oder sie pflanzen sich mit äusserst grosser Geschwindigkeit fort, so dass sie schon in geringer Entfernung von der Grenze von den transversalen Schwingungen vollständig getrennt sind. Nimmt man das Erste an, so ist das Naturgemässeste, dass die Schwingungen in geometrischer Progression abnehmen, wenn die Entfernungen in arithmetischer Progression wachsen; ist also die Intensität in gewisser Entfernung die Hälfte, so ist sie in der doppelten ein Viertel, in der dreifachen ein Achtel u. s. f.

Wenn man die angeführten Bedingungen mathematisch einkleidet, und dabei in Betreff der longitudinalen Schwingungen die zweite der eben angedeuteten Annahmen, die des raschen Erlöschens macht, so bekommt man für die an der Grenze sich bildende Welle des reflectirten in der Einfallsebene schwingenden Lichtes einen Ausdruck, der aus einem reellen und einem imaginären Theile besteht, und aus welchem durch eine ähnliche Behandlung, wie wir sie bei dem total reflectirten Lichte anwandten, die oben hingeschriebenen Gleichungen sich ergeben.

Es genüge an dieser Andeutung des Ganges, wie man nach der Cauchy'-

schen Theorie zu den Gleichungen der reflectirten Wellen gelangt; eine Ausführung der Rechnungen würde zu viel Raum beanspruchen, um so mehr, da wir die Cauchy'sche Theorie, trotz der vortrefflichen Uebereinstimmung der Gleichungen mit den Versuchen, nur als eine ähnliche Annäherung an die Wahrheit ansehen können als die einfachere Fresnel'sche. Denn nach den in den vorigen Paragraphen dargelegten Erfahrungen werden wir keinen Augenblick zweifelhaft sein können, dass die Reflexion nicht in unendlicher Nähe der Grenze erfolgt, dass vielmehr Schichten des ersten und zweiten Mediums, welche eine mit der Wellenlänge vergleichbare Grösse haben, auf die Reflexionserscheinungen von Einfluss sind. Eine vollständige Theorie der Reflexion und Brechung müsste auf den allmählichen Uebergang der Aetherdichten des einen Mediums in das andere Rücksicht nehmen und so die in einiger Entfernung von der Grenze stattfindenden Vorgänge in Rechnung ziehen. Lorenz[1] hat es versucht, in dieser Weise die Theorie der Reflexion zu geben, indem er dieselbe als aus unzählig vielen Reflexionen bestehend annahm, die in den einzelnen Schichten des Raumes, in welchem die Dichte des Aethers von derjenigen des ersten Mediums in diejenige des zweiten übergeht, stattfinden, und indem er für jede einzelne dieser Reflexionen die Fresnel'schen Gleichungen annimmt. Wie indess Christoffel nachweist, ist der Versuch von Lorenz nicht als gelungen zu bezeichnen[2]).

Trotzdem Airy schon die Vermuthung ausgesprochen hatte, dass das Verhalten des Diamants nicht als eine Ausnahme zu betrachten sei, nahm man doch lange an, dass bei den übrigen durchsichtigen Körpern die Fresnel'sche Theorie richtig sei, dass also im Allgemeinen der Ellipticitätscoefficient gleich Null sei. Erst im Jahre 1848 zeigte Jamin[3]) bei einer grossen Reihe fester und flüssiger Körper ganz ähnliche Verhältnisse, dass in der Nähe des Polarisationswinkels, wie beim Diamant, die Phasendifferenz rasch wachse, beim Polarisationswinkel $\frac{\lambda}{4}$ sei, und dass das Licht nach der Reflexion elliptisch polarisirt sei.

Phasendifferenz und Amplitudenverhältniss bestimmte Jamin mit Hülfe des Babinet'schen Compensators. Um das Verhältniss $\frac{S}{P}$ bestimmen zu können, musste sehr intensives Licht genommen und ausserdem das Licht sehr nahe senkrecht zur Einfallsebene polarisirt werden. Ist α das ursprüngliche Azimuth und β das der wieder hergestellten Polarisation, so ist wie früher

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{S}{P} \cdot \operatorname{tang} \alpha$$

$$\frac{S}{P} = \operatorname{tang} B = \frac{\operatorname{tang} \beta}{\operatorname{tang} \alpha}.$$

1) *Lorenz,* Poggend. Annal. Bd. CXI.

2) *Christoffel,* in dem Bericht über die Abhandlung von Lorenz in den Berliner Berichten über die Fortschritte der Physik für 1860.

3) *Jamin,* Annales de chim et de phys. III. Sér. T. XXIX u. T. XXXI. Poggend. Annal. Ergänzungsband III.

Folgende Tabelle enthält eine Versuchsreihe an Flintglas, dessen Brechungsexponent 1,714 war; die Phasendifferenzen sind in halben Wellenlängen angegeben; die als berechnet angegebenen Werthe von δ und B sind nach den Cauchy'schen Gleichungen mit den aus den Beobachtungen sich ergebenden Ellipticitätscoefficienten $\varepsilon = 0{,}0170$ berechnet. Die der Einfallsebene parallel polarisirte Componente ist der andern um die Grösse δ voraus.

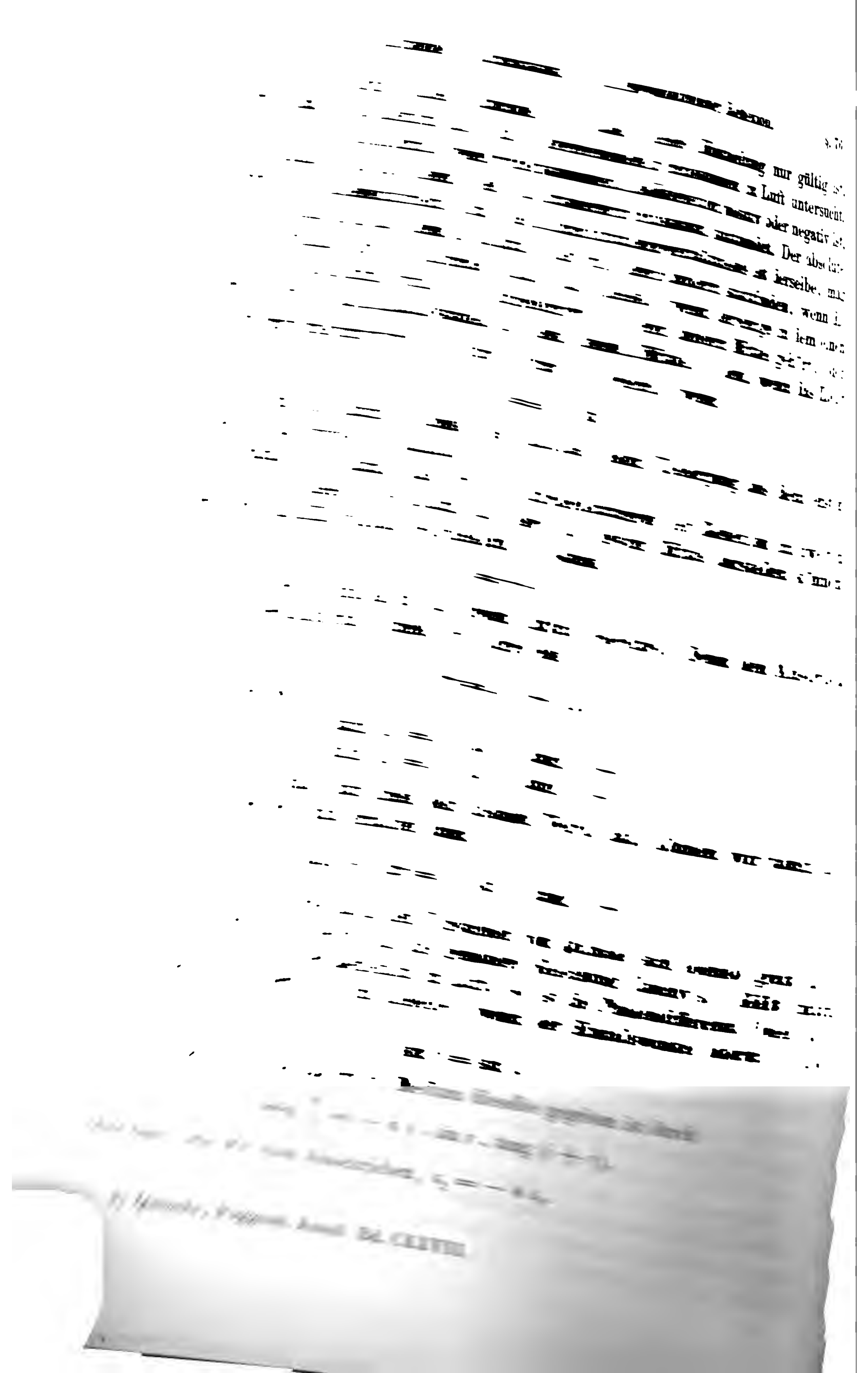
Reflexion an Flintglas in Luft.

$n = 1{,}714$; arc (tang $= n$) $= 59^0\ 45'$; $\varepsilon = 0{,}0170$.

Einfallswinkel i	δ beobachtet $\frac{\lambda}{2}$	δ berechnet $\frac{\lambda}{2}$	$B = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{S}{P}\right)$ beobachtet	$B = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{S}{P}\right)$ berechnet
53⁰	0,026	0,027	10⁰ 5′	10⁰ 6′
55⁰	0,039	0,041	7⁰ 0′	7⁰ 3′
57⁰	0,064	0,071	4⁰ 3′	4⁰ 17′
59⁰	0,217	0,223	1⁰ 30′	1⁰ 30′
59⁰ 30′	0,401	0,382	1⁰ 4′	1⁰ 3′
60⁰	0,640	0,623	1⁰ 13′	1⁰ 3′
61⁰	0,877	0,842	2⁰ 45′	2⁰ 10′
63⁰	0,939	0,940	5⁰ 46′	5⁰ 9′
65⁰ 15′	0,959	0,965	8⁰ 16′	8⁰ 31′

Die Tabelle zeigt, wie entsprechend den Angaben von Airy sich in der That die Phasenänderung in die Nähe des Polarisationswinkels zusammendrängt, dass wenn i etwa 6^0 kleiner ist, δ noch fast Null, wenn i etwa 6^0 grösser ist, dieselbe schon fast $^1/_2\ \lambda$ beträgt.

Bei der grossen Zahl von Körpern, welche Jamin untersuchte, ergab sich, dass man die Körper in zwei Gruppen theilen kann, bei der einen ist der senkrecht gegen die Einfallsebene polarisirte Strahl gegen den parallel polarisirten verzögert. Zu dieser Gruppe gehören im Allgemeinen alle diejenigen Körper, deren Brechungsexponent grösser als 1,45 ist, also Glas und die meisten festen Körper. Jamin nennt diese Substanzen solche mit positiver Reflexion. Bei den Körpern der zweiten Gruppe ist die parallel der Einfallsebene polarisirte Componente gegen die senkrecht zu derselben polarisirten verzögert. Zu diesen gehört von festen Körpern Flussspath, Hyalith, von flüssigen Wasser und die meisten wässerigen Lösungen, im Allgemeinen alle jene Substanzen, deren Brechungsexponent kleiner als 1,4 ist. Für diese Substanzen ist also der Ellipticitätscoefficient negativ. Für einige wenige Substanzen fand Jamin den Ellipticitätscoefficienten gleich Null, für diese also die einfache Fresnel'sche Theorie gültig, es sind Menilit und Alaun senkrecht zur Octaederachse.



Ebenso drückt die Gleichung für $\frac{S}{P}$ es aus, dass bei correspondirenden Einfallswinkeln das Amplitudenverhältniss und damit das Hauptazimuth dasselbe sein muss.

Folgende von Quincke gegebene Tabelle enthält die bei mehreren Medien bei der Reflexion sowohl in das dichtere als in das dünnere beobachteten Haupteinfallswinkel H, das Hauptazimuth B, den aus ersterm sich ergebenden Brechungsexponenten, und den aus H und B berechneten Werth von ε. Die vorletzte Columne enthält die Werthe der Elliptícitätscoefficienten für das zweite Mittel berechnet unter der Voraussetzung

$$\varepsilon_2 = - n\, \varepsilon_1.$$

Reflexion an der Grenze von	H	B	$n = \text{tang}\, H$	ε	$\varepsilon_2 = - n\, \varepsilon$	n_1
Luft in Flintglas: Luft	58° 8′	1° 16′	1,609	0,0233		1,6160
Flintglas	31° 52′	1° 6′	$\frac{1}{1,609}$	− 0,0327	− 0,0374	
Wasser in Flintglas: Wasser	50° 55′	1° 50′	1,2312	0,0404		1,2096
Flintglas	39° 5′	1° 24′	$\frac{1}{1,2312}$	−0,0379	− 0,0496	
Luft in Crownglas: Luft	56° 29′	0° 23′	1,510	0,0074		1,5149
Crownglas	33° 20′	0° 26′	$\frac{1}{1,520}$	−0,0126	− 0,0112	
Wasser in Crownglas: Wasser	49° 10′	0° 19′	1,157	0,0072		1,1339
Crownglas	40° 50′	0° 23′	$\frac{1}{1,157}$	−0,0101	− 0,0083	
Luft in Eisenchlorid: Luft	53° 54′	0° 26′	1,364	−0,0089		1,361
Eisenchlorid	36° 27′	0° 26′	$\frac{1}{1,354}$	0,0120	0,0121	
Luft in Wasser: Luft	53° 7′	0° 16′	1,333	−0,0056		1,336
Wasser	37° 16′	0° 24′	$\frac{1}{1,314}$	0,0116	0,0075	

Diese Tabelle gibt gleichzeitig ein Bild, welche Genauigkeit bei diesen Beobachtungen erreicht werden kann. Die letzte Columne enthält den Brechungsexponenten in gewöhnlicher Weise bestimmt; man sieht, derselbe stimmt keines Weges mit dem aus dem Haupteinfallswinkel berechneten immer überein, wie auch andererseits die beiden Haupteinfallswinkel sich nicht immer zu 90° ergänzen. Der Grund dieser Ungenauigkeiten liegt, abgesehen von den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern, darin, dass sich die oberflächlichen Schichten der reflectirenden Substanzen mit der Zeit ändern, eine Aenderung, die eben nur an der Reflexion zu merken ist, da sie nicht weit in die Tiefe dringt, und die sich eben an der Aenderung des Haupteinfallswinkels zu er-

kennen gibt. Ebendeshalb lassen sich auch noch andere Formen der Gleichungen als die Cauchy'schen denken, welche innerhalb der erreichbaren Genauigkeitsgrenzen die Beobachtung wiedergeben[1]).

§. 77.

Die Newton'schen Farbenringe im polarisirten Lichte. Die aus der Reflexionstheorie sich ergebenden Gleichungen für die Amplitude des reflectirten Lichtes gestatten uns jetzt auch die Theorie der Farben dünner Blättchen zu vervollständigen, und einige besondere Erscheinungen bei Anwendung des polarisirten Lichtes, welche zuerst Airy[2]) genauer untersuchte, aus denselben abzuleiten. Wir beschränken uns dabei auf die Betrachtung der Ringe im reflectirten Licht, da diejenigen im durchgehenden Lichte stets complementär zu denen im reflectirten Lichte sind.

Im reflectirten Lichte und wenn die dünne Schicht auf beiden Seiten von demselben Medium eingeschlossen ist, erscheinen die Ringe stets mit dunklem Centrum, wenn die Schicht in der Mitte unendlich dünn ist, weil, wie wir damals hervorhoben, bei der einen der beiden Reflexionen der Verlust einer halben Wellenlänge eintritt und der Werth der Reflexionscoefficienten r und ϱ, wie wir sie damals bezeichneten, an beiden Grenzen der Schicht derselbe ist. Wir nahmen damals an, dieser Verlust einer halben Wellenlänge finde stets an dem dichtern Medium statt. Für die in der Einfallsebene polarisirte Componente ist das nach unsern Gleichungen auch stets der Fall, denn für diese ist bei der Reflexion

an dem dichtern an dem dünnern Medium

$$r = -\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}, \qquad \varrho = \frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)},$$

also stets, wenn wir den Verlust der halben Wellenlänge nicht besonders in Rechnung ziehen, r negativ, welches auch der Werth von i ist.

Anders jedoch, wenn das Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist: dann ist

$$r = -\frac{\operatorname{tang}(i-r)}{\operatorname{tang}(i+r)}, \quad \varrho = \frac{\operatorname{tang}(i-r)}{\operatorname{tang}(i+r)}.$$

Hier ist r nur so lange negativ, als i kleiner als der Polarisationswinkel oder $i + r < 90^0$ ist. Es tritt dann eine plötzliche, oder vielmehr nach dem Vorigen eine rasche Aenderung der Phasendifferenz bei der

1) So werden die Werthe der Phasendifferenzen mit derselben Genauigkeit wiedergegeben, wenn man anstatt $\varepsilon \,.\, \sin i$ in die Gleichungen einen constanten Werth p einführt, zu dem man gelangt, wenn man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen, wie es nach dem Vorgange von *Green* (Cambridge philosophical transactions. p. I), *von Lang* in der erwähnten Ableitung thut, sehr gross setzt. Man sehe darüber auch *Kurz*, Poggend. Annal. Bd. CVIII.

2) *Airy*, Cambridge philosoph. transactions for 1832. Poggend. Annal. Bd. XXVI Bd. XXVII.

Reflexion an dem dichtern Medium ein. Wenn aber, wie wir damals annahmen, die Begrenzung der dünnen Schicht auf beiden Seiten dieselbe ist, hat diese Aenderung auf die Erscheinung keinen Einfluss, da in demselben Augenblicke, wo r sein Vorzeichen ändert, auch ϱ dasselbe ändert, also jedenfalls bei der einen Reflexion der Verlust einer halben Wellenlänge stattfindet, bei der andern nicht. Es ist also auch dann stets an den Stellen, wo der Gangunterschied der Strahlen Null oder ein gerades Vielfaches von $\frac{\lambda}{2}$ ist, die Phasendifferenz eine halbe Wellenlänge, somit erscheinen die Ringe mit dunklem Centrum, und so, wie wir sie früher ableiteten.

Ist dagegen das untere Mittel, welches die dünne Schicht begrenzt, von dem obern verschieden, ist sein Brechungsexponent bedeutend grösser als der des obern Mittels, so werden die Erscheinungen in der Nähe der Polarisationswinkel wesentlich anders. Legen wir z. B. eine Glaslinse, deren Brechungsexponent 1,5 sei, auf einen Diamant, dessen Brechungsexponent gleich 2,4 ist. So lange der Einfallswinkel kleiner ist als der Polarisationswinkel dieses Glases, also kleiner als $56^0\ 19'$, erscheint das Ringsystem wie früher; sobald aber dieser Winkel erreicht ist, wird von der obern Grenze der Luftschicht, da diese dann unter dem Polarisationswinkel bei der Reflexion an Luft in Glas getroffen wird, kein Licht reflectirt, sondern nur an der untern Grenze, am Diamant. Wird der Einfallswinkel noch grösser, so wird an der obern Grenze wieder Licht reflectirt, aber jetzt mit Verlust einer halben Wellenlänge. So lange nun der Einfallswinkel kleiner ist als der Polarisationswinkel am Diamant, kleiner als $67^0\ 40'$, tritt nun ebenfalls an der untern Grenze der Verlust einer halben Wellenlänge ein, also die Reflexion allein gibt den reflectirten Wellen keine Phasendifferenz, die Ringe erscheinen mit weissem Centrum, und wo vorher ein heller Ring war, ist jetzt ein dunkler und umgekehrt. Wächst der Einfallswinkel bis $67^0\ 40'$, so wird vom Diamant kein Licht reflectirt, die Ringe verschwinden wieder, und wird der Einfallswinkel über 70^0, so erscheinen sie wieder, wie bei kleinem Einfallswinkel. Um diese Erscheinungen wahrzunehmen, ist es nicht erforderlich das System mit polarisirtem Licht zu beleuchten, es genügt, dasselbe mit einem Kalkspath zu betrachten, der nur senkrecht zur Einfallsebene polarisirtes Licht in das Auge lässt.

Man kann ebenso Ringe mit weissem Centrum erzeugen, wenn man zur Combination, welche dieselbe erzeugen, drei verschiedene Mittel wählt, so dass der Brechungsexponent des mittlern grösser ist als der des obern, aber kleiner als des untern. Man nimmt z. B. eine Linse aus Crownglas, dessen Brechungsexponent möglichst klein ist, legt dieselbe auf Flintglas mit möglichst grossem Brechungsexponent, und bringt zwischen dieselben Canadabalsam. Hat das Crownglas den Brechungsexponenten 1,47, das Flintglas 1,7, so liegt der Brechungsexponent des Canadabalsams zwischen beiden, er ist 1,536. Die Reflexionen geschehen dann in beiden Grenzflächen unter denselben

Verhältnissen, sie geben keine Phasendifferenz, und die Strahlen interferiren nur mit dem durch die verschiedenen zurückgelegten Wege erlangten Gangunterschiede.

Eine sehr hübsche Abänderung dieses Versuches gibt ein kleiner Apparat von Duboscq; derselbe setzt die untere Platte zur Hälfte aus Flintglas, zur Hälfte aus demselben Crownglas zusammen, aus welchem auch die Linse besteht, und legt die Linse dann so auf die Platte, dass die Berührungsstelle gerade auf der Schnittlinie der beiden Platten sich befindet. Bringt man dann zwischen Linse und Platte Canadabalsam, so erhält man zwei Systeme von Halbkreisen; auf dem Flintglas erscheinen die Ringe mit hellem, auf dem Crownglas mit dunklem Centrum, und der dunkle Ring über der einen Platte setzt sich als heller in der andern Hälfte des Ringsystems fort. Im weissen Lichte sind die beiden Hälften complementär gefärbt.

Es genüge an der Betrachtung dieser einzelnen Fälle, die eine neue Bestätigung der Fresnel'schen Reflexionstheorie bieten; andere Erscheinungen im polarisirten Lichte wird man mit derselben Leichtigkeit aus der Fresnel'schen Theorie ableiten.

Drittes Kapitel.

Von der Doppelbrechung des Lichtes.

§. 78.

Doppelbrechung des Lichtes im Kalkspath. Im §. 68 haben wir die Erscheinung mitgetheilt, dass ein in einen Kalkspath eintretender Lichtstrahl im Allgemeinen in zwei zerlegt wird, deren einer im Hauptschnitt polarisirt ist, und von denen der andere senkrecht zum Hauptschnitt polarisirt ist. Als Hauptschnitte definirten wir die Ebenen, welche die Axe in sich aufnehmen, bezeichneten aber in optischer Beziehung vorzugsweise jene dieser Ebenen als Hauptschnitt, welche zugleich das Einfallsloth in sich aufnimmt. Diese Ebene ist dann die Polarisationsebene des ordentlich gebrochenen Lichtstrahls. Die Schwingungen des Aethers in diesem Strahle geschehen senkrecht zum Hauptschnitt, also auch, da eine Richtung, welche auf einer Ebene senkrecht ist, zu jeder in der Ebene liegenden Richtung senkrecht ist, senkrecht zur Axe des Krystalles, welches auch der Winkel ist, welchen der ordentlich gebrochene Strahl mit der Axe bildet.

Die Polarisationsebene des ausserordentlich gebrochenen Strahles ist zum Hauptschnitte senkrecht; die Aetherschwingungen dieses Strahles geschehen also im Hauptschnitte, in jener Ebene, welche die Axe des Krystalles in sich aufnimmt. Dieselben sind senkrecht zu dem ausserordentlich gebrochenen Strahle, sie bilden also immer andere Winkel mit der Axe, je nach der Neigung,

welche der Strahl mit der Axe bildet. Ist der Strahl der Axe parallel, so sind die Schwingungen senkrecht zur Axe, ist der Strahl senkrecht zur Axe, so sind die Schwingungen mit ihr parallel; allgemein sieht man, bilden sie mit derselben immer einen Winkel, welcher denjenigen zwischen Strahl und Axe um 90° ergänzt.

Durch den Krystall pflanzen sich demnach nur Schwingungen fort, welche in zwei zu einander senkrechten Ebenen vor sich gehen, die einen sind senkrecht zum Hauptschnitt und senkrecht zur Axe, die andern geschehen im Hauptschnitt und können mit der Axe beliebige Winkel bilden. Diese beiden Componenten, in welche die einfallenden Lichtstrahlen immer zerlegt werden, pflanzen sich nun überdies durch den Krystall nach verschiedenen Gesetzen fort, da sie als gesonderte Strahlen den Krystall verlassen.

Betrachten wir jetzt die Brechung der Strahlen genauer, so sehen wir, dass der eine der beiden Strahlen, den wir als den ordentlich gebrochenen bezeichnen, so gebrochen wird, als es das bisher von uns angenommene Brechungsgesetz verlangt; sein Brechungsexponent ist constant, wie auch der Strahl durch den Krystall hindurchtreten mag; und der gebrochene Strahl liegt in der durch das Einfallsloth und den einfallenden Strahl bestimmten Ebene. Der andere Strahl, dem wir deshalb auch den Namen des ausserordentlich gebrochenen beilegten, weicht nach beiden Richtungen von dem Brechungsgesetz ab; sein Brechungsexponent ist verschieden, je nach dem Winkel, welchen er mit der Axe des Krystalles einschliesst, und er befindet sich nur dann mit dem einfallenden Strahle in derselben Ebene, wenn die Axe des Krystalls in der Einfallsebene liegt, letztere also ein Hauptschnitt des Krystalles ist, oder wenn die Axe des Krystalls zum einfallenden Strahle senkrecht ist, in allen andern Fällen tritt der gebrochene Strahl aus der Einfallsebene aus.

Nehmen wir zunächst den einfachsten Fall, dass die Einfallsebene zugleich ein Hauptschnitt ist, lassen also zum Beispiel die Lichtstrahlen in einer Ebene einfallen, welche durch die kurzen Diagonalen der Begrenzungsflächen eines Kalkspathrhomboeders gelegt ist, und bestimmen dann den Brechungsexponenten der Strahlen, so finden wir für den ordentlichen Strahl stets denselben Werth, nämlich 1,6543, der Brechungsexponent des zweiten Strahles ist aber verschieden, je nach dem Winkel, welchen der Strahl mit der Axe einschliesst, und zwar wird er um so kleiner, je grösser dieser Winkel ist; man findet ihn gleich 1,4833 für mittlere Strahlen, wenn der Strahl senkrecht zur Axe durch den Krystall hindurchtritt; er nimmt zu bis auf 1,6543, den Brechungsexponenten des ordentlichen Strahles, wenn die Neigung des Strahles von 90° gegen die Axe des Krystalles bis zu 0° abnimmt.

Die Messung dieser Brechungsexponenten lässt sich am besten dadurch ausführen, dass man aus einem Kalkspathkrystalle verschiedene Prismen herstellt, so dass die brechende Kante derselben senkrecht ist zur optischen Axe, dass aber die Seiten derselben gegen die Axe verschieden geneigt sind. Lässt

man dann den Lichtstrahl in der Richtung *ab* durch das Prisma treten, so dass der ausserordentliche Strahl immer mit den Seiten gleiche Winkel bildet, so findet man je nach der Lage der Axe *ac* den Brechungsexponenten verschieden. Fällt *ac* mit *ab* zusammen, so erhält man nur einen durchtretenden Strahl mit dem Brechungsexponenten 1,654; ist bei einem andern Prisma die Lage der Axe $ac' \perp ab$, so erhält man für *ab* den Brechungsexponenten 1,483. Man erhält dann aber noch einen zweiten Strahl nach *ac*, mit dem Brechungsexponenten des ordentlichen Strahles. Die gebrochenen Strahlen liegen aber alle in der Einfallsebene.

Dasselbe ist auch dann der Fall, wenn wir ein Prisma anwenden, dessen brechende Kante der Axe parallel ist, und als Einfallsebene einen zur brechenden Kante senkrechten Schnitt des Prismas nehmen. In dem Falle können wir die Brechungsexponenten beider Strahlen aus dem Minimum der Ablenkung ableiten, da dann der ausserordentliche Strahl immer senkrecht zur Axe durch den Krystall hindurchtritt.

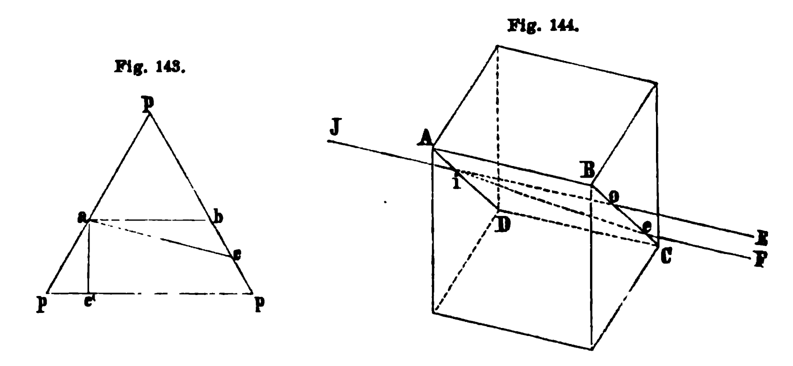


Fig. 143. Fig. 144.

Dass der ausserordentliche Strahl im Allgemeinen aus der Einfallsebene heraustritt, haben wir schon im §. 68 erwähnt, und bemerkt, dass derselbe, als wir ihn senkrecht auf eine natürliche Grenzfläche des Krystalls auffallen liessen, im Hauptschnitt verschoben erscheint. Man kann sich davon durch einen einfachen Versuch überzeugen. Lassen wir auf die natürlichen Begrenzungsflächen eines Kalkspathrhomboeders einen Lichtstrahl mit senkrechter Incidenz auffallen *Ji* Fig. 144, so treten zwei Strahlen aus der Fläche *BC* hervor. Der eine derselben *oE* geht ungebrochen hindurch, es ist die Verlängerung des einfallenden Strahles. Der zweite aber hat in dem Krystalle die Richtung *ie* angenommen und tritt als *eF* parallel mit *oE* hervor, wie wir daraus schliessen, dass auf einem Schirme, auf welchem wir die Strahlen auffangen, die von den beiden Strahlen herrührenden hellen Flecke immer gleich weit von einander entfernt sind, wie weit auch der Abstand des Schirmes von dem Krystalle ist.

Eine durch die beiden Strahlen gelegte Ebene schneidet den Krystall in der Ebene *ABCD*, im Hauptschnitt, ein Beweiss, dass der ausserordentliche

Strahl im Hauptschnitte verschoben ist. Drehen wir nun den Krystall um den einfallenden Strahl als Axe, so dreht sich auch die Ebene, welche die beiden Strahlen in sich aufnimmt, und zwar so, dass dieselbe immer der augenblicklichen Lage der Ebene *ABCD* parallel ist.

Das Gesetz, nach welchem die Brechung des Lichtes in einem Kalkspathe erfolgt, ist sonach ein ziemlich verwickeltes; indess gelang es schon Huyghens bald nach der Entdeckung der beschriebenen Erscheinungen durch den dänischen Physiker Erasmus Bartholinus [1]), durch eine einfache, derjenigen für isotrope Mittel analoge Construction dasselbe darzustellen [2]).

Was zunächst den ordentlichen Strahl betrifft, so ergibt sich aus dem Gesagten unmittelbar, dass derselbe in dem Krystall mit gleicher Geschwindigkeit sich fortpflanzt, welches auch die Richtung ist, in welcher er den Krystall durchsetzt.

Das Brechungsgesetz dieses Strahles ist also identisch mit dem, nach welchem das Licht bei dem Uebergange aus einem isotropen Mittel in ein anderes, z. B. aus Luft in Glas gebrochen wird; wir erhalten seine Richtung nach der in §. 20 entwickelten und aus der Undulationstheorie abgeleiteten Construction, und den Brechungswinkel r aus dem Einfallswinkel i durch

$$\frac{\sin i}{\sin r} = o = 1{,}6543.$$

Bestimmt man aber aus den gemessenen Brechungsexponenten des ausserordentlichen Strahles die Geschwindigkeiten desselben im Krystall, so geben die verschiedenen Werthe des erstern auch eine verschiedene Geschwindigkeit für diesen Strahl, je nach dem Winkel, welchen derselbe mit der Axe des Krystalles einschliesst. Denn die Geschwindigkeit der Fortpflanzung in dem zweiten Mittel ist dem Brechungsexponenten umgekehrt proportional; ist c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Luft, c' in dem Krystall, und e der Brechungsexponent des Strahles, wenn er mit der Axe den Winkel φ bildet, so ist

$$\frac{c}{c'} = e; \;\; c' = \frac{c}{e}.$$

Huyghens fand nun, dass, wenn man aus allen Werthen e die zugehörigen Werthe c' bestimmt, dieselben die Halbmesser einer Ellipse bilden, welche man um die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Strahles, wenn er sich parallel oder senkrecht der Axe fortpflanzt, als Axen beschreibt. Ist demnach OX (Fig. 145) die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Strahles, wenn er sich parallel der Axe fortpflanzt, OY diejenige, wenn er sich senkrecht zur Axe fortpflanzt, und wir construiren um OX als kleine, um OY als grosse

---

1) *Erasmus Bartholinus,* Experimenta crystalli Islandici disdiaclastici. Hafniae 1670.

2) *Huyghens,* Traité de la lumière. Leiden 1690. Man sehe *Beer,* Einleitung in die höhere Optik. Braunschw. 1853.

Axe eine Ellipse, so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in einer Richtung, welche mit der Axe den Winkel φ bildet, durch den Halbmesser OT dieser Ellipse gegeben, welcher mit der Axe OX der Ellipse denselben Winkel φ bildet.

Die gebrochene Welle entsteht nun nach der Huyghens'schen Construction durch alle die elementaren Wellen, welche von den Punkten der Grenzfläche, die von der einfallenden Welle getroffen werden, sich in dem zweiten Mittel verbreiten; und wir erhalten sie, wenn wir an die elementaren Wellenflächen, welche von den zuerst und zwar gleichzeitig getroffenen Punkten im zweiten Mittel sich ausbreiten, eine tangirende Ebene legen, welche zur Einfallsebene senkrecht ist, und welche überdies durch den Punkt geht, welcher in dem Augenblick Wellen auszusenden beginnt, in welchem die Welle gerade in das zweite Mittel übergetreten ist.

Ganz dieselbe Construction liefert uns auch die Welle des ausserordentlich gebrochenen Lichtes, nur haben hier die Wellen eine andere Form als bei der gewöhnlichen Brechung, sie besitzen, weil die Geschwindigkeit der Fortpflanzung nach verschiedenen Richtungen verschieden ist, nicht die Form einer Kugel, sondern die eines um die Axe des Krystalles gelegten Rotationsellipsoides.

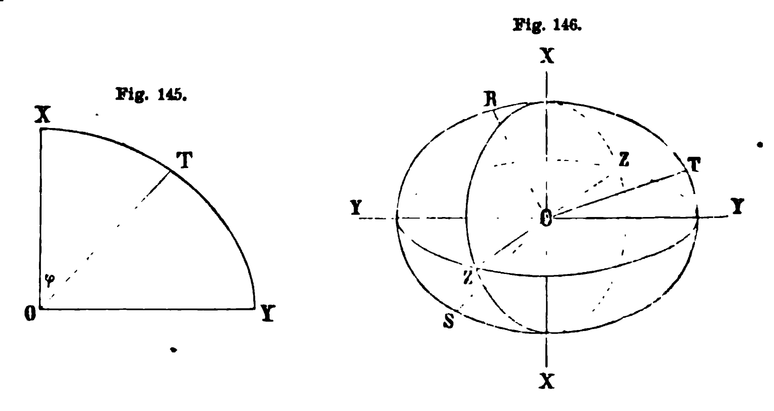


Fig. 145. Fig. 146.

Ist nämlich O (Fig. 146) ein Punkt im Innern des Krystalles, dessen Axe nach OX gerichtet ist, und nehmen wir an, dass in einem gegebenen Momente von O aus sich eine Lichtbewegung in dem Krystalle fortpflanze, so wird in der Richtung der Axe die Bewegung in einer bestimmten Zeit sich um die Strecke OX fortpflanzen. In derselben Zeit wird sich aber, wenn wir zunächst nur den Hauptschnitt OXY betrachten, die Lichtbewegung in der zur Axe senkrechten Richtung OY nach beiden Seiten um die Strecke OY fortpflanzen, welche zu der Länge OX sich verhält wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit senkrecht zur Axe zu derjenigen parallel der Axe. In der Richtung OR, OS, OT, welche mit der Axe die Winkel φ, φ', φ'' bilden, wird sich das Licht um solche Strecken fortpflanzen, dass die Endpunkte der

Strahlen R, S, T auf der um die beiden zu einander senkrecht stehenden Linien OY und OX beschriebenen Ellipse liegen.

Wie wir nun sahen, hängt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes nur von dem Winkel ab, welchen die Fortpflanzungsrichtung mit der Axe bildet. In einem zu dem ersten senkrechten Hauptschnitt OXZ werden daher die Verhältnisse ganz dieselben sein; die Grenze, bis zu welcher das Licht in diesem sich ausgebreitet hat, muss also eine der ersten ganz gleiche Ellipse XZX sein. Ebendasselbe muss auch in jedem der durch OX gelegten Hauptschnitte der Fall sein, so dass die Grenze, bis zu welcher sich das Licht in dem Krystalle vom Punkte O ausgebreitet hat, durch ein Rotationsellipsoid gegeben ist, welches wir erhalten, wenn wir um OX als Axe die Ellipse $XYXY$ rotiren lassen. Die Wellenfläche des ausserordentlichen Strahles ist also nicht eine Kugel, sondern ein Rotationsellipsoid, dessen Rotationsaxe gleich ist der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in der Richtung der Axe, und dessen Aequatorialradius gleich ist der Fortpflanzungsgeschwindigkeit senkrecht zur Axe. Die Lage des Ellipsoides im Krystall ist bestimmt durch die Lage der Axe des Krystalles; mit dieser fällt die Rotationsaxe zusammen.

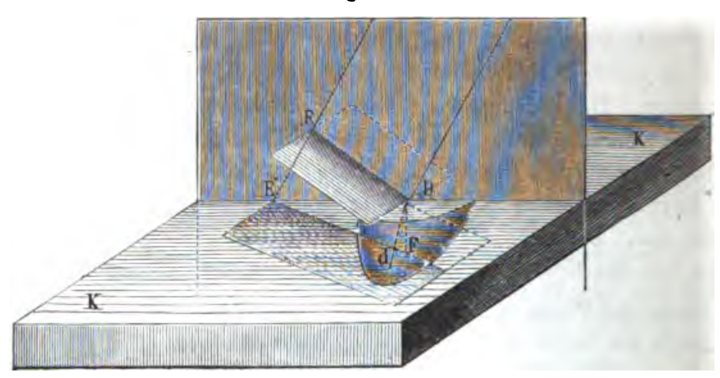
Ist nun der Punkt in der Oberfläche eines Krystalles gelegen, so ist die Wellenfläche der bei O in diese übertretenden Lichtbewegung gegeben durch die Hälfte des Ellipsoides, welche auf der einen Seite eines durch O gelegten Diametralschnittes sich befindet. Die Lage dieses Diametralschnittes wird bestimmt durch die Neigung der Axe gegen die Grenzfläche; ist die Axe zu dieser senkrecht, so ist $YZYZ$ jener Diametralschnitt, ist die Axe der Grenzfläche parallel, so ist es $XZXZ$; hat sie eine andere Lage, so ändert sich auch der Diametralschnitt.

Um daher die in dem Kalkspath sich fortpflanzende ausserordentliche Lichtwelle zu erhalten, haben wir als erste Elementarwelle nur das durch die Lage der Axe bestimmte halbe Rotationsellipsoid zu construiren; und an dieses die erwähnte Tangentialebene zu legen.

Ist demnach DE die Wellenfläche eines den Kalkspath KK treffenden Strahlencylinders, und tritt die Axe des Krystalles nach vorn aus der Einfallsebene hervor (Fig. 147), so construiren wir um den zuerst von der Lichtwelle getroffenen Punkt D der Grenfläche die Wellenfläche F des Krystalles in der angegebenen Weise mit den Dimensionen, wie sie der Zeit entsprechen, während welcher sich das Licht in dem ersten Mittel von E bis zur Grenzfläche fortpflanzt. Nennen wir die Zeit t, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit längs der Axe ω, diejenige senkrecht zur Axe ε, so ist die Axe des um die Krystallaxe zu legenden Rotationsellipsoides gleich ωt, der zur Axe senkrechte Aequatorialradius gleich εt. Wir legen dann durch den Punkt E' eine zur Einfallsebene senkrechte Tangentialebene, und diese ist dann die gebrochene Lichtwelle, welche, sich selbst parallel bleibend, in dem Krystall sich fortpflanzt.

Die Richtung des gebrochenen Strahles ist nun nach dem Huyghens'schen Principe gegeben durch die Verbindungslinie der Punkte D und d, des Mittelpunkts der Elementarwelle mit dem Punkte, in welchem dieselbe durch die sämmtliche Elementarwellen umhüllende Fläche oder berührende Ebene tangirt wird (Theil I, §. 126). Die Axe des gebrochenen Strahlenbündels und somit dieses selbst, ist demnach der Verbindungslinie des Mittelpunktes der Wellenfläche mit dem Punkte, in welchem dieselbe von jener Ebene tangirt wird, parallel.

Fig. 147.



Diese Verbindungslinie fällt nun im Allgemeinen nicht in die Einfallsebene, und ist auch nicht zur gebrochenen Wellenebene senkrecht, wie unmittelbar daraus folgt, dass der Halbmesser in einem Ellipsoid nicht auf der durch seinen Endpunkt gelegten Tangentialebene senkrecht steht. Ziehen wir von dem Mittelpunkte D des Rotationsellipsoides eine Senkrechte auf die zur Einfallsebene senkrechte Ebene der gebrochenen Lichtwelle, so ist diese zwar der Einfallsebene parallel; das heisst eine durch diese Linie und das Einfallsloth in D gelegte Ebene fällt mit der Einfallsebene zusammen. In dieser Ebene liegt aber der Halbmesser im Allgemeinen nicht, sondern in einer Ebene, welche wir durch die Normale der Welle und die Rotationsaxe des Wellenellipsoides legen, welche mit der Hauptaxe des Krystalles zusammenfällt.

Nur in dem Falle also, wenn die optische Axe in der Einfallsebene liegt, oder der Halbmesser senkrecht steht auf der gebrochenen Welle, derselbe also zusammenfällt mit der Normale der Welle, und somit diese identisch ist mit dem vom Punkte D auf die gebrochene Wellenebene herabgelassenen Loth, bleibt der ausserordentlich gebrochene Strahl in der Einfallsebene. Wir werden diese speciellen Fälle sofort näher betrachten.

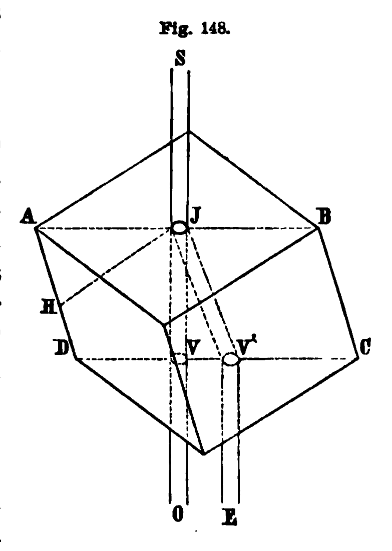
Bevor wir aber die Uebereinstimmung der Huyghens'schen Construction mit der Erfahrung näher nachweisen, ist es gut, auf einen Umstand aufmerksam zu machen, auf den Unterschied in den Verhältnissen des gebrochenen Strahles und der gebrochenen Lichtwelle.

Bei isotropen Mitteln, in welchen die Wellenfläche eine Kugel ist, fällt der Strahl, die Verbindungslinie des Wellenmittelpunktes mit dem Punkte, in welchem die elementare Welle von der umhüllenden Fläche oder berührenden Ebene getroffen wird, mit der Normale der Fläche im Berührungspunkte zusammen; es bedurfte dort also keiner Unterscheidung zwischen Strahl und Wellennormale oder Welle; was von dem einen galt, galt auch von dem andern. Speciell war die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Fortpflanzungsrichtung von Strahl und Welle dieselbe. Anders jedoch hier für das ausserordentlich gebrochene Licht, hier fällt Strahl und Wellennormale nicht zusammen, ersterer steht gegen die Wellenebene schief. In diesem Falle pflanzt sich also der Lichtstrahl nach einer andern Richtung und mit anderer Geschwindigkeit fort als die Lichtwelle. Dies ist auch, wie wir sofort ableiten werden, der Grund, weshalb bei senkrechter Incidenz ein gegen den einfallenden Lichtstrahl verschobener gebrochener Strahl auftritt, wenn die Axe gegen die brechende Fläche geneigt ist.

§. 79.

Vergleich der Huyghens'schen Construction mit der Erfahrung. Um den Nachweis zu liefern, dass durch die Huyghens'sche Construction in der That die Erscheinungen der Doppelbrechung vollständig dargestellt werden, wollen wir einige Fälle mittels derselben ableiten, und zwar zunächst den schon mehrfach erwähnten Fall des Durchtrittes eines Strahlencylinders durch einen natürlichen Kalkspathrhomboeder.

Fig. 148.



Es sei zu dem Ende *ABCD* Fig. 148 ein Kalkspathrhomboeder, auf dessen obere Fläche ein Bündel paralleler Lichtstrahlen *SJ* auffalle. Die optische Axe des Krystalles ist durch die Mittellinie der gleichseitigen Ecken *B* und *D* gegeben, und bildet somit nach unseren frühern Angaben mit jeder der Flächen *AB* und *DC* einen Winkel von 44° 37′. Legen wir durch das Einfallsloth und die in *JH* angedeutete Axe eine Ebene, so ist diese ein Hauptschnitt des Krystalles. Das Strahlenbündel zertheilt sich beim Eintritt in den Krystall, wie wir sahen, in zwei Theile, das eine folgt den gewöhnlichen Gesetzen der Brechung, es ist die Fortsetzung des einfallenden Bündels, und tritt nach *VO* in der Verlängerung von *SJ* aus dem Krystalle aus.

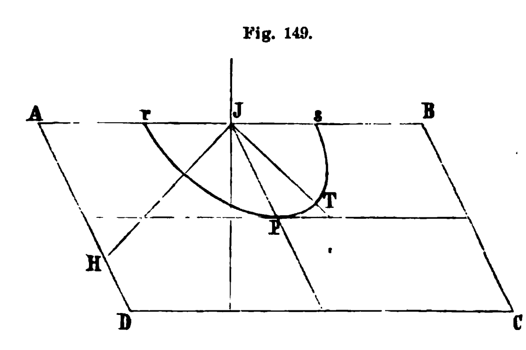
Dass dieses aus der Huyghens'schen Construction folgt, brauchen wir nicht besonders abzuleiten. Denn da die einfallenden Wellen der brechenden Fläche parallel sind, so sind es auch die gebrochenen Wellen, und da die

Wellennormale hier mit dem gebrochenen Strahle zusammenfällt, so steht der gebrochene Strahl auf der brechenden Fläche senkrecht, er ist die Verlängerung des einfallenden Strahles. In dieser muss er daher auch beim Austritt aus dem Krystall sich fortpflanzen. Die Schwingungen des gebrochenen Strahles geschehen senkrecht zur Axe, also auch senkrecht zum Hauptschnitt; letzterer ist die Polarisationsebene dieser Strahlen.

Die ausserordentlich gebrochenen Strahlen sind im Hauptschnitt, also in der Ebene *SJH* verschoben; sie pflanzen sich im Krystall nach *JV'* fort, und treten dann bei *V'* nach *V'E* parallel mit *VO* aus. Sie sind senkrecht zum Hauptschnitt polarisirt, ihre Schwingungen geschehen im Hauptschnitt.

Alles dieses gibt uns die Huyghens'sche Construction unmittelbar. Wir legen um irgend drei Punkte, welche von der der brechenden Fläche parallelen Wellenfläche gleichzeitig getroffen werden, die ellipsoidische Wellenfläche, und an dieselbe eine gemeinschaftliche Berührungsebene. Diese Berührungsebene wird, wie unmittelbar aus der vollkommenen Gleichheit der drei Wellenflächen, welche ihre Mittelpunkte in der brechenden Fläche haben, folgt, der brechenden Fläche parallel. Die im Berührungspunkt jeder Wellenfläche errichtete Normale ist daher senkrecht zur brechenden Fläche, somit dem Einfallslothe parallel. Wie wir sahen liegt nun der Halbmesser, den wir an den Punkt legen, in welchem eine Ebene ein Rotationsellipsoid berührt, in dem durch die Rotationsaxe und die Normale bestimmten durch das Ellipsoid gelegten Schnitt. Da nun die in dem Berührungspunkt auf der Wellenebene errichtete Senkrechte dem Einfallslothe parallel ist, so folgt, dass dieser Schnitt in die Ebene des Hauptschnittes fällt, und dass somit der gebrochene Strahl ganz im Hauptschnitt des Krystalls liegt. Um nun die Richtung des Strahles zu bestimmen, sei *ABCD* Fig. 149 jener Hauptschnitt, *J* einer der Punkte, um welche wir die Wellenfläche *F* construirt haben und *JH* die Richtung der Axe. Der Hauptschnitt, als ein durch die Rotationsaxe gelegter Schnitt des Ellipsoides, schneidet dasselbe in einer Ellipse, *rps*, deren kleine Axe in *JH* fällt, deren grosse Axe *JT* dazu senkrecht ist. Diese Ellipse wird nun im Punkte *p* von der Berührungsebene berührt, der Halbmesser *Jp* gibt uns also die Richtung der gebrochenen Strahlen. Wie man sieht sind dieselben im Hauptschnitte verschoben, und zwar so, dass der ausserordentliche Strahl weiter von der Axe entfernt ist als der ordentliche Strahl.

Fig. 149.



Die Schwingungsrichtung des ausserordentlichen Strahles liegt ganz in der Wellenebene, und zugleich muss sie auch durch den Strahl selbst gehen, wir erhalten demnach die Schwingungsebene, wenn wir durch den Strahl und die Wellennormale eine Ebene legen; diese Ebene ist aber der Hauptschnitt die Schwingungen des ausserordentlichen Strahles geschehen also im Hauptschnitte; er ist senkrecht zum Hauptschnitt polarisirt.

Wie wir sahen bleibt die Wellenfläche des ausserordentlichen Strahles der brechenden Fläche parallel; ist demnach die zweite Fläche *DC* der ersten *AB* parallel, so werden die Punkte derselben, welche überhaupt von der Welle getroffen werden, alle zugleich von der Welle getroffen; es pflanzen sich daher von allen diesen Punkten zugleich Elementarwellen in das folgende Mittel fort, und die allen gemeinsame Berührungsebene ist der zweiten brechenden Fläche wieder parallel. Ist nun das zweite Mittel ein isotropes, wie z. B. in dem gewöhnlichen Falle, wenn der Krystall von Luft umgeben ist, so fällt in diesem wieder der gebrochene Strahl mit der Wellennormale zusammen; und da diese dem Einfallslothe oder dem einfallenden Lichte parallel ist, so folgt, dass das aus dem Krystall austretende ausserordentliche Strahlenbündel *V′E* dem einfallenden parallel ist. Die Polarisationsebene desselben kann nicht geändert sein, da gar kein Grund dafür vorhanden ist; auch das austretende Bündel muss demnach senkrecht zum Hauptschnitte polarisirt sein.

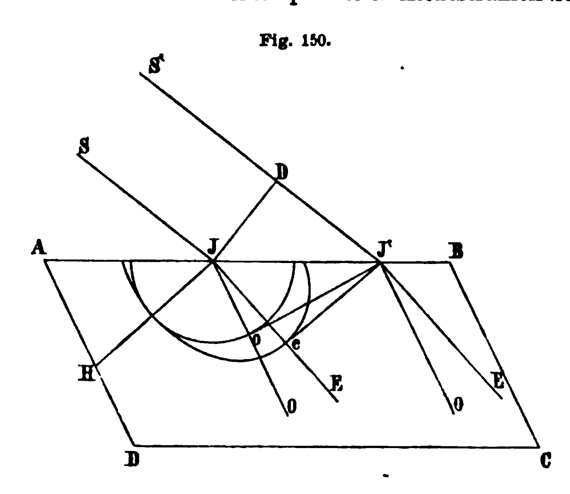
Alle Erscheinungen also, welche wir beim Durchtritte des Lichtes durch ein Kalkspathrhomboeder wahrgenommen haben, wenn ein Strahlenbündel die erste Fläche senkrecht traf, werden uns durch die Huyghens'sche Construction unmittelbar gegeben.

Wir bemerkten vorhin, dass im Allgemeinen die ausserordentlichen Strahlen aus der Einfallsebene heraustreten, und sahen im vorigen Paragraphen, wie die Huyghens'sche Construction diese Erscheinung ableitet; wir erwähnten dabei, dass jedoch in zwei Fällen der ausserordentliche Strahl in der Einfallsebene bleibt, wenn die Axe des Krystalles ganz in ihr liegt, der Hauptschnitt desselben also mit der Einfallsebene zusammenfällt, und wenn die Axe des Krystalles auf der Einfallsebene senkrecht ist. Beide Fälle lassen sich aus der Huyghens'schen Construction ableiten.

Was zunächst den ersten Fall betrifft, so sahen wir, dass die Normale der gebrochenen Welle immer in der Einfallsebene liegt, da die gebrochene Welle auf der Einfallsebene senkrecht ist. Der gebrochene Strahl liegt nun in der durch die Wellennormale und die Axe des Krystalls gelegten Ebene. Liegt daher die letztere ganz in der Einfallsebene, so fällt die durch beide gelegte Ebene mit der Einfallsebene zusammen, oder der ausserordentliche Strahl liegt ebenfalls in der Einfallsebene, welches auch der Winkel ist, unter welchem er die brechende Fläche trifft. Wir können demnach die Richtung beider Strahlen leicht durch eine ebene Construction erhalten. Es sei *ABCD* die Einfallsebene und zugleich der Hauptschnitt des Krystalles, *JH* die Rich-

tung der Axe (Fig. 150). Unter irgend einem Einfallswinkel i falle auf die Fläche AB ein Bündel paralleler Lichtstrahlen $SJ\,S'J'$. Den ordentlich gebrochenen Strahl $JO\,J'O'$ erhalten wir, wie früher, indem wir um J die kugelförmige Welle mit dem Radius Jo legen, dessen Länge in der bekannten Weise bestimmt ist. Da der ausserordentliche Strahl in derselben Ebene liegt, haben wir, um ihn zu erhalten, um die Axe JH nur den Durchschnitt der Einfallsebene und Wellenfläche zu legen; derselbe ist eine Ellipse; und die Tangente $J'e$ an diese Ellipse zu ziehen. Die Verbindungslinie JeE gibt die Richtung des ausserordentlich gebrochenen Strahles. Derselbe ist schwächer gebrochen als der ordentliche Strahl, und, wie die Figur zeigt, weiter von der Axe entfernt.

Fig. 150.



In diesem Falle ist es auch nicht schwierig, die Richtung des gebrochenen Strahles aus dem Einfallswinkel und der Lage der Axe zu bestimmen, indem wir die Lage des Punktes e aufsuchen, in welchem die durch den Punkt J' gelegte Tangente die Ellipse berührt. Wir haben dazu nur einige wenige Sätze aus der analytischen Geometrie der Ellipse anzuwenden. Nennen wir die Axen der Ellipse, es sind die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes senkrecht und parallel der Axe, ε und ω, von denen die letztere mit der Axe des Krystalls JH zusammenfallen soll, so ist die Gleichung der Ellipse bekanntlich

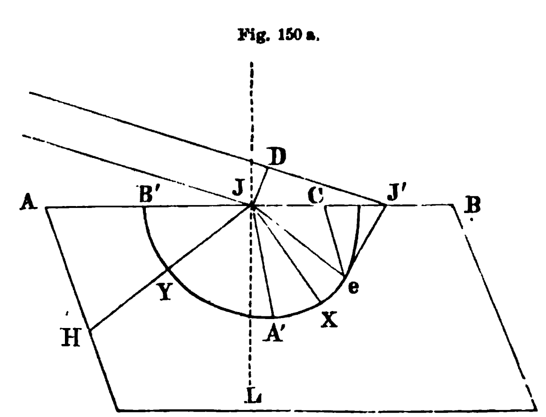
$$\frac{x^2}{\varepsilon^2} + \frac{y^2}{\omega^2} = 1,$$

wo die Axe x parallel ε gerechnet ist. Für unsere Rechnungen beziehen wir indess bequemer die Ellipse auf ein paar conjugirter Durchmesser, von denen der eine der Durchschnitt der Ellipse mit der brechenden Fläche AB sein soll; die Lage des andern ist dann dadurch gegeben, dass er die mit AB parallelen Sehnen der Ellipse halbirt. Ist Fig. 150a JY die eine, JX die andere Axe der Ellipse, JB' der Durchschnitt derselben mit AB, so ist JB' der eine und JA' der andere der conjugirten Durchmesser. Setzen wir nun $JA' = a$, $JB' = b$, und rechnen die y parallel JB', die x parallel JA', so wird die Gleichung der Ellipse bezogen auf diese Durchmesser

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Nennen wir nun den Winkel XJA', den der Durchmesser JA' mit der Axe JX bildet, φ, und den Winkel $B'JX$, den der Durchmesser JB' mit JX bildet, φ', so ist nach bekannten Sätzen der analytischen Geometrie

Fig. 150 a.



$$a^2 = \frac{\varepsilon^2 \omega^2}{\varepsilon^2 \sin^2 \varphi + \omega^2 \cos^2 \varphi}$$

$$b^2 = \frac{\varepsilon^2 \omega^2}{\varepsilon^2 \sin^2 \varphi' + \omega^2 \cos^2 \varphi'}$$

und zwischen den Winkeln φ und φ' besteht die Beziehung

$$\operatorname{tang} \varphi \,.\, \operatorname{tang} \varphi' = -\frac{\omega^2}{\varepsilon^2}.$$

Nennen wir nun den Winkel $B'JY$, den die Axe des Krystalls mit der Fläche AB bildet, α, so ist

$$\varphi' = 90 + \alpha,$$

woraus sich φ, a und b berechnen lassen.

Um nun die Richtung des gebrochenen Strahles zu bestimmen, haben wir nur die Coordinaten des Punktes e, nämlich $y' = JC$ und $x' = Ce$ zu berechnen, denn für diese haben wir

$$\frac{y'}{x'} = \frac{\sin CeJ}{\sin CJe}.$$

Von diesen Winkeln ist $CJe = 90^0 - r$; $CeJ = eJA' = eJB' - A'JB'$. Nun ist der Winkel $eJB' = 90 + r$, der Winkel $A'JB' = XJB' - XJA'$, also gleich $\varphi' - \varphi$. Nennen wir diese Differenz ψ, so wird

$$CeJ = 90 + r - \psi$$

und

$$\frac{y'}{x'} = \frac{\sin(90 + r - \psi)}{\sin(90 - r)} = \frac{\cos(r - \psi)}{\cos r} \quad . \; . \; . \; . \quad (a).$$

Die Werthe von y' und x' erhalten wir, indem wir die Gleichung der an die Ellipse gezogenen Tangente einführen; dieselbe ist

$$\frac{x'}{a^2} \cdot x + \frac{y'}{b^2} \cdot y = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (b),$$

worin eben x' und y' die Coordinaten des Punktes e bedeuten, wo die Tangente die Ellipse berührt. Wird demnach $x = x'$ und $y = y'$, so wird

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (c).$$

Eine zweite Gleichung zur Bestimmung der Werthe von x' und y' bekommen wir durch die Bemerkung, dass die Tangente durch den Punkt J' geht, somit, dass für $x = 0$ $y = JJ'$ wird. JJ' ist nun gleich $\frac{DJ'}{\sin i}$; oder

da DJ' die allen Constructionen zu Grunde liegende Längeneinheit ist, indem die Axen der Ellipse jene Längen sind, durch welche das Licht im Krystall parallel und senkrecht zur Axe sich fortpflanzt, während in Luft es sich durch DJ' fortpflanzt, ist

$$JJ' = \frac{1}{\sin i},$$

dem wir indess, da wir die positive Seite der y nach JB' gerechnet haben, das negative Vorzeichen geben müssen. Damit wird

$$-\frac{y'}{b^2} \cdot \frac{1}{\sin i} = 1,$$

$$y' = -b^2 \cdot \sin i$$

und indem wir diesen Werth in die Gleichung (c) einführen

$$x' = \pm a \cdot \sqrt{1 - b^2 \sin^2 i}.$$

Führen wir diese Werthe von x' und y' in die Gleichung (a), so wird

$$-\frac{b^2 \sin i}{a\sqrt{1 - b^2 \sin^2 i}} = \cos \psi + \sin \psi \cdot \operatorname{tang} r,$$

somit

$$-\operatorname{tang} r = \frac{b^2 \sin i + \cos \psi \cdot a\sqrt{1 - b^2 \sin^2 i}}{\sin \psi \cdot a \cdot \sqrt{1 - b^2 \sin^2 i}},$$

worin das negative Vorzeichen bedeutet, dass der gebrochene Strahl zur Rechten des Einfallslothes liegt, oder dass r vom Einfallslothe aus zur Rechten zu rechnen ist, während wir die Winkel sonst von Je zur Linken rechneten.

Wir haben bei dieser Entwicklung vorausgesetzt, dass wenn α kleiner als 90^0 ist, der einfallende Strahl auf derselben Seite des Einfallslothes liegt wie die Axe. Wenn der einfallende Strahl im andern Quadranten läge, etwa die Richtung JD hätte, so würde der Punkt J' auf die andere Seite von J fallen, JJ' wäre also positiv

$$JJ' = \frac{1}{\sin i}.$$

Der Werth von x' würde derselbe bleiben, und damit würde

$$\operatorname{tang} r = \frac{b^2 \sin i - \cos \psi \cdot a \cdot \sqrt{1 - b^2 \sin^2 i}}{\sin \psi \cdot a\sqrt{1 - b^2 \sin^2 i}}.$$

Der Winkel r würde positiv, das heisst der einfallende Strahl läge an der linken Seite des Einfallslothes.

Die Gleichung für tang r vereinfacht sich in zwei Fällen, wenn nämlich die Axe in die brechende Fläche fällt, $\alpha = 0$ ist, oder zur brechenden Fläche senkrecht ist, $\alpha = 90^0$ wird. In beiden Fällen wird $\psi = 90^0$. Denn wir hatten

$$\psi = \varphi' - \varphi$$

$$\operatorname{tang} \varphi' \cdot \operatorname{tang} \varphi = -\frac{\omega^2}{\varepsilon^2};\ \operatorname{tang} \varphi = -\frac{\omega^2}{\varepsilon^2 \operatorname{tang} \varphi'};$$

aus ersterer Gleichung folgt

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{\operatorname{tang} \varphi' - \operatorname{tang} \varphi}{1 + \operatorname{tang} \varphi' \operatorname{tang} \varphi},$$

und indem wir für tang φ seinen Werth einsetzen

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{\varepsilon^2 \operatorname{tang} \varphi' + \frac{\omega^2}{\operatorname{tang} \varphi'}}{\varepsilon^2 - \omega^2}.$$

Wegen $\varphi' = 90^0 + \alpha$ ist

$$\operatorname{tang} \varphi' = -\frac{1}{\operatorname{tang} \alpha},$$

somit

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{\varepsilon^2 + \omega^2 \operatorname{tang}^2 \alpha}{(\varepsilon^2 - \omega^2) \operatorname{tang} \alpha}.$$

Wie man sieht ist sowohl für $\alpha = 0$ als für $\alpha = 90^0$ ψ gleich 90^0, in beiden Fällen wird also

$$\operatorname{tang} r = \mp \frac{b^2 \sin i}{a \,.\, \sqrt{1 - b^2 \,.\, \sin^2 i}}.$$

Die Werthe von φ, φ', a, b ergeben sich dann aus den betreffenden Gleichungen:

1. $\alpha = 90^0$, die Platte ist senkrecht zur Axe des Krystalls geschnitten.

$$\varphi' = 180^0; \quad \operatorname{tang} \varphi' = 0; \quad \operatorname{tang} \varphi = \infty; \quad \varphi = 90^0;$$
$$a = \omega; \quad b = \varepsilon.$$

Die conjugirten Durchmesser werden die Axen der Ellipse, die Axe ε ist parallel AB, der von uns gewählten Axe der y, die Axe ω steht senkrecht auf AB. Es wird

$$\operatorname{tang} r = \mp \frac{\varepsilon^2 \,.\, \sin i}{\omega \,.\, \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 i}}.$$

2. $\alpha = 0$, die Platte ist parallel der Axe des Krystalls geschnitten.

$$\varphi' = 90^0; \quad \operatorname{tang} \varphi' = \infty; \quad \operatorname{tang} \varphi = 0; \quad \varphi = 0;$$
$$a = \varepsilon; \quad b = \omega.$$

Die conjugirten Durchmesser werden wieder die Axen, die Axe b ist parallel AB,

$$\operatorname{tang} r = \mp \frac{\omega^2 \sin i}{\varepsilon \,.\, \sqrt{1 - \omega^2 \sin i}}.$$

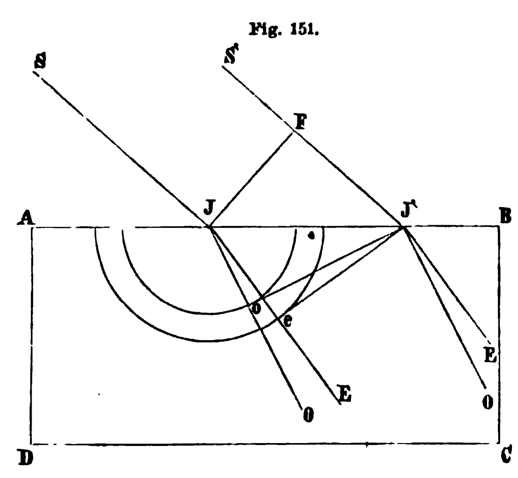
Indem man die Verschiebung des ausserordentlichen Strahles beim Durchtritt durch eine planparallele Platte misst, kann man diese Resultate durch den Versuch prüfen. Malus hat bei seinen Untersuchungen über Doppelbrechung die Uebereinstimmung der Theorie mit der Erfahrung nachgewiesen [1]).

1) *Malus*, Théorie de la double réfraction. Paris 1810.

Wir haben vorhin weiter gesehen, dass der gebrochene Strahl ganz in der Einfallsebene bleibt, wenn die optische Axe senkrecht zur Einfallsebene ist; es folgt das unmittelbar daraus, dass dann die Rotationsaxe des Wellenellipsoides senkrecht zur Einfallsebene ist. Die zur Einfallsebene senkrechte, also der Rotationsaxe parallele Berührungsebene, welche uns die ausserordentliche Welle liefert, berührt deshalb die Wellenfläche in einem Aequatorialabschnitt, das heisst in einem durch den Mittelpunkt der Wellenfläche senkrecht zur Axe gelegten Schnitt. Da nun dieser Schnitt ein Kreis ist, so trifft die im Berührungspunkt errichtete Normale den Mittelpunkt der Wellenfläche, sie ist also zugleich ein Halbmesser der Ellipse. In diesem Falle sind also auch für den ausserordentlichen Strahl Wellennormale und Strahl identisch. Da nun die Wellennormale immer in der Einfallsebene liegt, so also auch in diesem Falle der ausserordentliche Strahl.

Ist demnach Fig. 151 *ABCD* der Durchschnitt eines Krystalles, dessen Axe senkrecht zur Einfallsebene, der Ebene der Zeichnung ist, und *SJS'J'* ein die obere Fläche treffendes Strahlenbündel, so erhalten wir zunächst die ordentlich gebrochenen Strahlen *JO* nach der gewöhnlichen Construction.

Fig. 151.



Um die ausserordentlich gebrochenen Strahlen zu erhalten, müssen wir um den Einfallspunkt *J* nur einen Kreis legen, dessen Radius *Je* gleich ist der Strecke, durch welche das Licht sich im Krystall senkrecht zur Axe fortpflanzt, während es in der Luft die Strecke *FJ'* zurücklegt, also für Kalkspath

$$Je = \frac{FJ'}{1{,}488},$$

und dann von *J'* aus an den Kreis eine Tangente ziehen. *JeE* ist dann die Richtung des ausserordentlichen Strahles, und der Brechungswinkel r ist gegeben durch

$$\frac{\sin i}{\sin r} = e,$$

wenn e der Brechungsexponent des senkrecht zur Axe sich fortpflanzenden Strahles ist.

Ist die Einfallsebene nicht senkrecht zur Axe, sondern bildet sie mit der durch die Axe senkrecht zur brechenden Fläche gelegten Ebene einen Winkel φ, so ist die Brechungsebene des ausserordentlichen Strahles nicht mehr die Einfallsebene; wie erwähnt zeigt das auch die Huyghens'sche Construction.

Nennen wir den Winkel, den die Brechungsebene des ausserordentlichen Strahles mit der Axenebene bildet, φ', so wird

$$\sin \varphi' = \frac{\varepsilon^2 \cdot \sin \varphi}{\sqrt{\omega^4 \cos^2 \varphi + \varepsilon^4 \sin^2 \varphi}},$$

wenn wieder, wie vorhin, ω die Rotationsaxe des Ellipsoides ist, und der Brechungswinkel wird, wenn i der Einfallswinkel ist,

$$\operatorname{tang} r = \frac{\sin i \cdot \sqrt{\varepsilon^4 \sin^2 \varphi + \omega^4 \cos^2 \varphi}}{\varepsilon \cdot \sqrt{1 - \sin^2 i \, (\varepsilon^2 \sin^2 \varphi + \omega^2 \cos^2 \varphi)}} .$$

Dieser Ausdruck für tang r gibt auch sofort die zuletzt betrachteten beiden Fälle; setzen wir $\varphi = 0$, so fällt die Axe in die Einfallsebene, und es wird, wie vorhin,

$$\operatorname{tang} r = \frac{\omega^2 \sin i}{\varepsilon \cdot \sqrt{1 - \omega^2 \sin^2 i}} .$$

Wird $\varphi = 90^0$, so wird auch $\varphi' = 90^0$ und

$$\operatorname{tang} r = \frac{\varepsilon \cdot \sin i}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 i}} .$$

Da ε die Strecke ist, durch welche das Licht senkrecht zur Axe sich fortpflanzt, während es in der Luft die Strecke 1 zurücklegt, so ist

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{1}{\varepsilon}; \quad \varepsilon \cdot \sin i = \sin r;$$

$$\operatorname{tang} r = \frac{\sin r}{\cos r} .$$

§. 80.

Einaxige Krystalle. Der Kalkspath ist nicht der einzige Krystall, in welchem die in den vorigen §§. beschriebenen und durch die Huyghens'sche Construction abgeleiteten Erscheinungen der Doppelbrechung des Lichtes sich zeigen, sondern alle zu den beiden krystallographischen Systemen mit einer Hauptaxe, dem tetragonalen oder quadratischen und dem hexagonalen Systeme gehörigen Krystalle zeigen ganz ähnliche Erscheinungen.

Den Gestalten des tetragonalen oder quadratischen Systemes liegt ein rechtwinkliges dreiaxiges Kreuz zu Grunde, von denen zwei Axen in einer Ebene liegen und unter einander gleich sind; die dritte Axe, welche auf dieser senkrecht steht und von den beiden andern verschieden ist, ist die Hauptaxe des Krystalles. Fällt Licht auf eine Platte eines Krystalles aus diesem System, so erleidet es im Allgemeinen eine Doppelbrechung, ausser dann, wenn die gebrochenen Strahlen der krystallographischen Hauptaxe parallel, die gebrochene Wellenebene also zu derselben senkrecht ist.

Das hexagonale System wird am bequemsten auf vier Axen bezogen, von welchen drei in einer Ebene liegen und sich unter einem Winkel von 60° schneiden; die vierte steht auf dieser Ebene senkrecht; die drei ersten sind unter einander an Grösse gleich, die vierte ist entweder grösser oder kleiner,

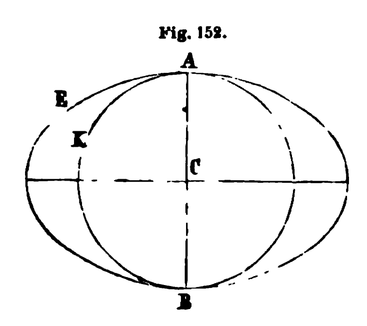
sie ist daher die krystallographische Hauptaxe. Auch diese Krystalle ertheilen dem Lichte im Allgemeinen eine Doppelbrechung; der eine der Strahlen folgt dem gewöhnlichen Brechungsgesetz, sein Brechungsexponent ist immer derselbe; der andere ist durch die entwickelte Huyghens'sche Construction mit ellipsoidischer Wellenfläche zu erhalten. Nur wenn die gebrochenen Strahlen der krystallographischen Hauptaxe parallel sind, tritt keine Doppelbrechung ein.

Die Krystalle dieser beiden Systeme haben also das Gemeinsame, dass sie bei der Brechung das Licht im Allgemeinen in einen ordentlichen und einen ausserordentlichen Strahl zerlegen, und dass es nur eine Richtung gibt, in der eine solche Doppelbrechung nicht stattfindet. Sie sind demnach in optischer Beziehung nicht verschieden und werden deshalb mit dem gemeinsamen Namen der optisch einaxigen Krystalle bezeichnet. Unter optischer Axe wird dann eben die Richtung verstanden, in welcher keine Doppelbrechung stattfindet, und wie erwähnt, fällt diese Richtung mit der krystallographischen Hauptaxe zusammen.

Die einaxigen Krystalle zerfallen aber nach einer andern Richtung in zwei grosse Klassen, in die positiven oder attractiven und in die negativen oder repulsiven Krystalle. Ein Repräsentant der letztern Klasse ist der Kalkspath; zu ihr gehören alle jene Krystalle, bei denen die Geschwindigkeit der ausserordentlichen Strahlen grösser, der Brechungsexponent derselben also kleiner ist als der der ordentlichen Strahlen. Das die Wellenfläche der ausserordentlichen Strahlen darstellende, um die Axe herumgelegte Rotationsellipsoid ist somit ein abgeplattetes, der zur Axe senkrechte Durchmesser des Aequatorialschnittes ist grösser als die Axe der Wellenfläche.

Man kann die Wellenflächen der beiden im Krystall sich fortpflanzenden Strahlen vereinigen und die beiden Flächen zusammen als die Wellenfläche der einaxig negativen Krystalle bezeichnen. Dieselbe besteht dann offenbar aus einer Kugel und einem Rotationsellipsoid, die wir erhalten, wenn wir den Kreis K und die Ellipse E (Fig. 152) um ihre gemeinsame Axe AB rotiren lassen. Die aus der Rotation des Kreises entstehende Kugel ist dann die Grenze, bis zu welcher sich in einer gegebenen Zeit von dem im Innern des Krystalls liegenden Punkte C die ordentlichen Strahlen fortgepflanzt haben, während das Ellipsoid die Grenze der gleichzeitig fortgepflanzten ausserordentlichen Strahlen darstellt. Die beiden Flächen berühren sich an den Endpunkten der kleinen Axe des Ellipsoides; die Wellenfläche der ordentlichen Strahlen ist ganz von derjenigen der ausserordentlichen eingeschlossen.

Fig. 152.



Der Name repulsive Krystalle für die zu dieser Klasse gehörigen rührt daher, weil der ausserordentlich gebrochene Strahl, wenn die Einfallsebene

ein Hauptschnitt des Krystalles ist, immer weiter von der Axe entfernt ist als der ordentliche Strahl und man deshalb bei Zugrundelegung der Emissionstheorie annahm, dass von der Axe der Krystalle eine abstossende Kraft ausgehe, welche einige Lichttheilchen der eingedrungenen Strahlen ablenke und so den ausserordentlichen Strahl veranlasse.

Die grössere Mehrzahl der einaxigen Krystalle gehört zu dieser Kategorie. Aus der von Beer[1]) gegebenen Zusammenstellung entnehmen wir folgende; die Brechungsexponenten der ordentlichen Strahlen sind mit o, die der ausserordentlichen mit e bezeichnet.

A. Tetragonale Krystalle.

Ammoniak, doppelt-arseniksaures	$o = 1,578$;	$e = 1,524$	Sénarmont[2]),
Ammoniak, doppelt-phosphorsaures	$o = 1,515$;	$e = 1,477$	Sénarmont,
Anatas	$o = 2,554$;	$e = 2,493$	Miller[3]),
Kali, doppelt-arseniksaures	$o = 1,592$;	$e = 1,536$	Sénarmont,
Kali, doppelt-phosphorsaures	$o = 1,507$;	$e = 1,476$	Sénarmont,
Kupferoxyd-Ammoniak, salzsaures	$o = 1,744$;	$e = 1,724$	Sénarmont.

B. Hexagonale Krystalle.

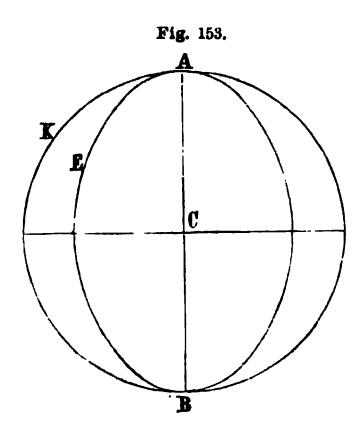
Apatit,			
Chlorcalcium,			
Kalkspath	$o = 1,6543$;	$e = 1,4833$	Malus[4]),
Korund,			
Natron, salpetersaures	$o = 1,481$;	$e = 1,251$	Marx[5]),
Rubin,			
Smaragd,			
Turmalin, weisser	$o = 1, 6366$;	$e = 1,6193$	Miller.

Lange Zeit glaubte man, dass sämmtliche einaxige Krystalle in diese Klasse gehörten, bis Biot im Jahre 1814 die Entdeckung machte[6]), dass in vielen Krystallen der ungewöhnliche Brechungsexponent der grössere sei. In diesen pflanzt sich also das Licht parallel der optischen Axe und somit als ordentlicher den gewöhnlichen Brechungsgesetzen folgender Strahl am schnellsten fort. Die ausserordentlichen Strahlen pflanzen sich immer langsamer fort, am langsamsten in einer zur optischen Axe senkrechten Richtung. Auch für diese Krystalle ist die Huyghens'sche Construction unmittelbar anwendbar, nur ist das Rotationsellipsoid, welches die Wellenfläche der ausserordentlichen Strahlen darstellt, ein anderes, es ist ein in die Länge gezogenes Rotations-

1) *Beer*, Einleitung in die höhere Optik. Braunschweig 1853.
2) *Sénarmont*, Annales de chim. et de phys. III. Sér. T. 33.
3) *Miller*, Poggend. Annal. LVII.
4) *Malus*, Théorie de la double réfraction. Paris 1810.
5) *Marx*, Schweigger Journal LVII.
6) *Biot*, Mémoires de l'Institut de France 1814.

ellipsoid, dessen der Axe parallele Rotationsaxe grösser ist als der Durchmesser des darauf senkrechten Aequatorialschnittes. Auch hier können wir die Wellenfläche des gebrochenen Lichtes gemeinsam durch eine Kugel und ein Rotationsellipsoid darstellen, welche wir erhalten, wenn wir den Kreis K und die Ellipse E (Fig. 153) um die beiden gemeinschaftliche Axe AB rotiren lassen. Die durch Rotation des Kreises K entstehende Kugel ist dann die Grenze, bis zu welcher der ordentlich gebrochene Strahl sich von einem Punkte C im Innern des Krystalles in einer gegebenen Zeit fortgepflanzt hat, während das Ellipsoid die Grenze ist, bis zu welcher sich die Lichtbewegung der ausserordentlichen Strahlen in derselben Zeit ausgebreitet hat. Die beiden Theile der Fläche, Kugel und verlängertes Rotationsellipsoid, berühren sich an den Endpunkten der grossen Axe des Ellipsoides, die Fläche der ordentlichen Strahlen umgibt also rings diejenige der ausserordentlichen Strahlen.

Fig. 153.



Da die ausserordentlichen Strahlen stärker gebrochen werden, sind sie der Axe näher gerückt als die ordentlichen Strahlen, sie schliessen mit der Richtung der Axe einen kleinern Winkel ein. Wegen der Annahme, dass die Axe der Krystalle einige der in den Krystall eingedrungenen Lichttheilchen anzöge und dadurch den ausserordentlichen Strahl erzeuge, nannte Biot diese im Gegensatz zu der ersten Klasse attractive Krystalle. Jetzt nennt man sie allgemein solche mit positiver Doppelbrechung.

Folgende Krystalle gehören in diese Kategorie:

A. Tetragonale Krystalle.

Apophyllit,
Kalk-Kupfer, essigsaures,
Rutil,
Schwerstein $o = 1{,}970$; $e = 2{,}129$,
Zirkon $o = 1{,}961$; $e = 2{,}015$,
Zinnstein.

B. Hexagonale Krystalle.

Amethyst,
Bergkrystall $o = 1{,}5471$; $e = 1{,}5563$ Rudberg[1]),
Dioptas $o = 1{,}667$; $e = 1{,}723$ Miller,
Eis,
Kali, schwefelsaures $o = 1{,}493$; $e = 1{,}502$ Sénarmont.

1) *Rudberg,* Poggend. Annal. XIV.

Um die Richtung der Strahlen in einem dieser Krystalle zu bestimmen, hat man nur die Wellenflächen um den Einfallspunkt zu bestimmen, indem man den Radius der Kugel und die Rotationsaxe des Ellipsoides dem reciproken Werthe des Brechungsexponenten o, die zweite Axe des Rotationsellipsoides oder den Durchmesser von dessen Aequatorialschnitt dem reciproken Werthe des ausserordentlichen Brechungsexponenten e proportional macht.

§. 81.

Physikalische Erklärung der Doppelbrechung. Die Doppelbrechung des Lichtes besteht nach den Mittheilungen der vorigen §§. darin, dass die an der Grenzfläche eines einaxigen Krystalles ankommende Lichtbewegung in zwei zu einander senkrechte Componenten zerlegt wird, deren eine in einer zur Axe des Krystalles senkrechten Ebene liegt, es sind die Schwingungen des ordentlichen Strahles, während die andere in einer Ebene liegt, welche durch die Axe des Krystalles gelegt wird.

Diese beiden Componenten pflanzen sich im Allgemeinen durch den Krystall mit verschiedenen Geschwindigkeiten fort, die erstere jedoch mit constanter, welches auch die Richtung ist, in welcher sie den Krystall durchsetzen, die letztere mit verschiedener Geschwindigkeit, je nach dem Winkel, welchen die Schwingungen mit der Axe des Krystalles bilden. Das Fortpflanzungsgesetz der Wellen und Strahlen, sowie die Polarisationsrichtung der ausserordentlichen Strahlen wird uns durch die Huyghens'sche Construction geliefert.

Eine physikalische Erklärung der Doppelbrechung hat daher die doppelte Aufgabe, erstens nachzuweisen, wie es kommt, dass eine Zerlegung des Lichtes in jene beiden Componenten stattfindet und dann das Gesetz aufzusuchen, nach welchem jede der beiden Componenten in dem Krystalle sich fortpflanzt; oder vielmehr, da jenes Gesetz vollständig durch die Huyghens'sche Construction gegeben ist, die letztere theoretisch zu begründen. Beides ergibt sich unmittelbar aus einer einfachen Hypothese über die Beschaffenheit des Lichtäthers im Innern der einaxigen Krystalle, auf welche wir leicht durch Beachtung der im dritten Abschnitt des ersten Theiles untersuchten Gesetze der Wellenbewegung geführt werden.

Denken wir uns einen durchaus homogenen cylindrischen Stab oder eine cylindrische gespannte Saite und versetzen diese in transversale Schwingungen. Ein solcher Stab verhält sich rings um die Axe durchaus gleich, und in welcher Richtung wir ihn auch stossen und schwingen lassen, für alle diese Schwingungen sind die Grössen, welche die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bestimmen, Elasticität und Dichtigkeit des Stabes sich genau gleich; alle diese Schwingungen pflanzen sich daher mit eben derselben Geschwindigkeit durch den Stab fort. Haben wir z. B. einen solchen Stab nach einer Richtung in Schwingung versetzt und stossen ihn dann nach einer andern Richtung,

so setzen sich die Schwingungen nach beiden Richtungen zusammen, und so lange der Stab schwingt, beschreibt jedes Theilchen desselben die resultirende Bahn, welche aus jenen Theilbewegungen sich ergibt. Stossen wir den Stab noch nach einer dritten, vierten etc., aber immer zur Axe senkrechten Richtung, so setzen auch die hieraus hervorgehenden Schwingungen mit den ersten sich zusammen und jedes Theilchen des Stabes beschreibt die aus allen diesen Impulsen resultirende Bahn, so lange der Stab schwingt. Könnten wir diesem Stabe in sehr kurzer Zeit Stösse nach allen zur Axe senkrechten Richtungen geben, so würden sich alle diese Schwingungen mit gleicher Geschwindigkeit durch denselben fortpflanzen, sie würden sich daher überall combiniren, und jedes Theilchen würde die aus allen Impulsen resultirenden Bahnen beschreiben.

Die Schwingungen des Lichtäthers, welche wir als Licht wahrnehmen, geschehen alle parallel den Lichtwellen, in diesen aber nach allen möglichen zur Wellennormale senkrechten Richtungen; welches nun auch in einem isotropen Mittel, also im leeren Raume oder in der Luft etc. die Richtung der Schwingungen sei, sie pflanzen sich immer mit derselben Geschwindigkeit fort. In einem unpolarisirten Lichtstrahl beschreibt jedes Lichttheilchen eine Bahn, welche aus den Impulsen nach allen Azimuthen resultirt. Ein sich in einem isotropen Mittel fortpflanzender Lichtstrahl verhält sich also gerade so wie der eben betrachtete homogene cylindrische Stab.

Denken wir uns jetzt aber einen Stab von elliptischem Querschnitt und versetzen diesen in Schwingungen. Weil die Dicke dieses Stabes nach verschiedenen Richtungen verschieden ist, ist auch die Elasticität des Stabes nach verschiedenen Richtungen verschieden, die durch eine der grossen Axe des Querschnittes parallele Biegung entwickelte Elasticität ist grösser als diejenige, welche durch eine Biegung nach einer andern Richtung entwickelt wird. Wir wollen der Kürze des Ausdruckes wegen die durch die erste Biegung entwickelte Elasticität, welche für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwingungen maassgebend ist, als die Elasticität des Stabes nach der grossen Axe, die andere als die Elasticität nach der Richtung der kleinen Axe bezeichnen; überhaupt soll, wenn von der Elasticität eines Mittels nach einer bestimmten Richtung die Rede ist, darunter immer die durch eine Biegung, oder durch Schwingungen, welche nach dieser Richtung geschehen, entwickelte Elasticität verstanden werden, welche die aus der Gleichgewichtslage verschobenen Theilchen zurückzieht und nach §. 122 des ersten Theils für die Oscillationsdauer und Geschwindigkeit der Fortpflanzung maassgebend ist.

Versetzen wir nun den Stab mit elliptischem Querschnitt in Schwingungen parallel der grossen Axe, so pflanzen sich die Schwingungen in dem Stabe am raschesten fort, versetzen wir ihn in Schwingungen parallel der kleinen Axe, so pflanzen sich diese am langsamsten fort. Stossen wir aber nun den Stab nach einer zwischen jenen beiden Richtungen liegenden, so beobachten wir immer (man sehe §. 139 des ersten Theiles) eine Zerlegung der dadurch

erzeugten Schwingungen nach der Richtung der grössten und kleinsten Elasticität; dieselben pflanzen sich unabhängig von einander durch den Stab fort, jede mit der ihr eigenen Geschwindigkeit. Wir schliessen das aus der Beobachtung der Curven, welche ein Punkt dieses Stabes bei einem solchen schiefen Stosse durchläuft.

Wir haben nun schon mehrfach gesehen, dass die Aetherschwingungen des Lichtes denselben mechanischen Gesetzen folgen, welche wir im dritten Abschnitt des ersten Theiles entwickelt haben. Wenn demnach eine Lichtwelle sich in einem Mittel fortpflanzt, dessen Elasticität nach verschiedenen Richtungen verschieden ist, so muss auch hier eine Zerlegung der Schwingungen nach der Richtung der grössten und kleinsten Elasticität stattfinden, welches auch die ursprüngliche Richtung der Schwingungen war. Jede dieser polarisirten Wellen pflanzt sich dann mit der durch die Elasticität nach der betreffenden Richtung bedingten Geschwindigkeit fort, gemäss der früher entwickelten Gleichung

$$c = C \cdot \sqrt{\frac{e}{d}} \cdot$$

Wenn nun in einem besondern Falle von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung auch die Richtung der Fortpflanzung abhängt, so werden sich die beiden senkrecht zu einander polarisirten Wellen von einander trennen müssen und jede nach der durch ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit bestimmten Richtung fortpflanzen.

In dem soeben Gesagten liegt nun sofort die Erklärung für die Theilung des Lichtes in zwei nach verschiedenen Richtungen sich fortpflanzende Strahlen bei seinem Eintritte in einen doppelbrechenden Krystall, wenn wir die Hypothese machen, dass die Elasticität des Aethers im Krystalle nach verschiedenen Richtungen eine verschiedene ist. Eine in den Krystall eintretende Welle unpolarisirten Lichtes muss sich dann in zwei polarisirte Wellen spalten, deren jede mit der ihr eigenen Geschwindigkeit sich fortpflanzt, und da die Fortpflanzungsrichtung derselben bei der Brechung von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit abhängt, so müssen diese Wellen nach verschiedenen Richtungen sich fortpflanzen.

Durch welche Constitution des Aethers diese verschiedene Elasticität bewirkt wird, darüber enthalten wir uns jeder Annahme; es kann dieselbe sehr verschieden sein; wir wollen nur erwähnen, dass durch Zulassung unserer Hypothese in die Undulationstheorie nicht der Vorwurf erhoben werden kann, dass wir dieselbe zu Gunsten einer neuen Thatsache modificiren. Im Gegentheil, es ist die Annahme der Anisotropie des Aethers nur eine Folgerung aus der Undulationstheorie, gestützt auf die mechanischen Gesetze der Wellenbewegung in homogenen nicht isotropen Mitteln. Ueberdies erkennen wir in dem Krystall selbst einen anisotropen Körper, welcher nach verschiedenen Richtungen hin verschiedene Eigenschaften hat, verschiedene Härte, Spaltbarkeit, Elasticität etc. besitzt. Da wir nun wissen, dass zwischen

den Molekülen des festen Körpers und denen des in ihm enthaltenen Aethers Wechselwirkungen stattfinden, so hat es zugleich nichts Auffallendes, dass sich die Anisotropie auch auf den in dem Krystall enthaltenen Aether ausdehnt, besonders wenn wir erkennen, dass die Anisotropie des Aethers mit der des Krystalles in innigster Beziehung steht.

Es würde nun leicht sein aus den optischen Erscheinungen abzuleiten, wie die Elasticität des Aethers in den einaxigen Krystallen beschaffen sein muss, damit die Doppelbrechung in der mitgetheilten Weise erfolgen kann; indess wird es kürzer und klarer sein, wenn wir den umgekehrten Weg einschlagen. Wir werden die Hypothese über die Elasticität des Aethers in den einaxigen Krystallen, auf welche Fresnel[1]) durch rein mechanische Betrachtungen geführt wurde, voranstellen und aus dieser dann das Gesetz ableiten, nach welchem die Lichtbewegung, sowohl die ausserordentliche als die ordentliche, im Krystall sich fortpflanzt. Die Uebereinstimmung des so erhaltenen Satzes mit der Huyghens'schen Construction ist dann ein Beleg für die Richtigkeit unserer Annahme.

Fresnel nimmt an, dass die Elasticität des Aethers im Krystall nach verschiedenen Richtungen verschieden ist, für Schwingungen in der Richtung der Axe ist sie am grössten bei negativen, am kleinsten bei positiven Krystallen. Bei negativen Krystallen nimmt sie stetig ab, so wie die betrachteten Schwingungsrichtungen mit der Axe grössere Winkel bilden, nach allen Richtungen jedoch, welche mit der Axe gleiche Winkel φ bilden, ist sie dieselbe. Am kleinsten ist sie in negativen Krystallen in einer zur Axe senkrechten Ebene, dort aber, da alle die möglichen in dieser Ebene liegenden Richtungen mit der Axe gleiche Winkel von 90^0 bilden, nach allen Richtungen dieselbe. Bei positiven Krystallen ist es umgekehrt, dort nimmt die Elasticität mit der Neigung der Schwingungsrichtungen gegen die Axe zu, und in allen zur Axe senkrechten Richtungen ist sie am grössten.

Das Gesetz, nach welchem sich die Elasticität in den einaxigen Krystallen mit der Schwingungsrichtung ändert, lässt sich durch eine rings geschlossene Fläche darstellen, welche Fresnel Elasticitätsfläche nennt. Dieselbe ist eine Rotationsfläche, deren Rotationsaxe in die optische oder krystallographische Hauptaxe des Krystalles fällt. Die Elasticität des Aethers nach irgend einer Richtung ist dann dem Quadrate des von dem Mittelpunkte in dieser Richtung an die Fläche gezogenen Halbmessers proportional. Die Curve, welche wir zur Erzeugung der Elasticitätsfläche um die Axe rotiren lassen müssen, bestimmt Fresnel folgendermassen. Ist die Elasticität des Aethers für Schwingungen, welche parallel der Axe geschehen, proportional β^2 und für solche, welche zu derselben senkrecht sind, proportional α^2, so ist sie für Schwingungen, welche mit der Axe irgend einen Winkel ψ bilden, parallel der

1) *Fresnel,* Mémoires de l'Acad. de Sciences Tome VII. Poggend. Annal. XXIII. Oeuvres complètes T. II. p. 487 ff.

Richtung der Schwingungen, proportional ϱ^2, wo dann ϱ aus der Gleichung bestimmt wird

$$\varrho^2 = \beta^2 \,.\, \cos^2 \psi + \alpha^2 \,.\, \sin^2 \psi.$$

Diese Gleichung der Elasticitätsfläche folgt schon unmittelbar aus der Annahme, dass die Elasticität mit der Richtung der Schwingungen sich ändert. Nach dieser Annahme soll die Elasticität, wenn ein Molekül in der Richtung der Axe um die Länge 1 aus der Gleichgewichtslage entfernt wird, gleich β^2 sein, senkrecht zur Axe gleich α^2. Wird nun dasselbe Molekül in der Richtung ψ um die Länge 1 aus der Gleichgewichtslage entfernt, so können wir die dasselbe dann bewegende Kraft in folgender Weise erhalten. Die Verschiebung parallel der Axe ist dann cos α, jene senkrecht zur Axe sin α, und die Componenten der das Molekül parallel diesen Richtungen zurücktreibenden Kraft R sind dann β^2 cos ψ und α^2 sin ψ; nach dem Satze vom Kräfteparallelogramm ist dann

$$R^2 = \beta^4 \cos^2 \psi + \alpha^4 \sin^2 \psi.$$

Die Richtung dieser Resultirenden, den Winkel φ, den sie mit der Axe bildet, erhalten wir dann nach demselben Satze aus

$$\cos \varphi = \frac{\beta^2 \cos \psi}{R}; \qquad \sin \varphi = \frac{\alpha^2 \sin \psi}{R},$$

und den Winkel $\psi - \varphi$, welchen diese Kraft mit der Richtung der Schwingung bildet, durch

$$\cos (\psi - \varphi) = \frac{\beta^2 \cos^2 \psi + \alpha^2 \sin^2 \psi}{R}.$$

Man sieht somit, dass bei allen Verschiebungen, die nicht parallel oder senkrecht zur Axe sind, die Richtung der Resultirenden nicht mit der Richtung der Schwingungen zusammenfällt; die in die Richtung der Schwingungen fallende Componente, die wir mit ϱ^2 bezeichneten, ist dann

$$\varrho^2 = R \cos (\psi - \varphi) = \beta^2 \cos^2 \psi + \alpha^2 \sin^2 \psi,$$

somit jene, welche wir vorhin als die von Fresnel gegebene Gleichung für die Elasticität parallel ψ anführten.

Die zur Schwingungsrichtung senkrechte Componente der Resultirenden brauchen wir nicht zu beachten, da diese, wie sofort näher hervortreten wird, zu longitudinalen gegen die Wellenebene senkrechten Schwingungen Anlass gibt, die, wie wir wissen, bei den Lichtbewegungen ausser Betracht sind.

Ist demnach AO Fig. 154 und Fig. 155 gleich β und $OS = \alpha$, Fig. 154 für negative, Fig. 155 für positive Krystalle, und beschreiben wir um diese beiden zu einander senkrechten Axen eine Curve $ASA'S'$, so dass die Halbmesser OT, welche mit der Axe einen beliebigen Winkel ψ bilden, bestimmt sind durch die Gleichung

$$OT^2 = AO^2 \,.\, \cos^2 AOT + OS^2 \,.\, \cos^2 S'OT = \beta^2 \,.\, \cos^2 \psi + \alpha^2 \,.\, \sin^2 \psi,$$

so würde diese Curve dem von Fresnel aufgefundenen Gesetz, nach welchem

die Elasticität des Aethers in einem Krystall sich ändert, genügen; das heisst, denken wir uns in einem Krystall in einer durch die Axe gelegten Ebene diese Curve construirt, so würde das Quadrat des in die Richtung OT fallenden

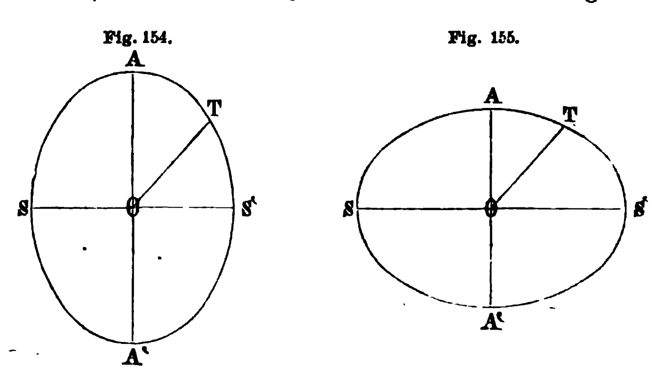


Fig. 154. Fig. 155.

Halbmessers der Curve der Elasticität des Aethers für Schwingungen, welche dieser Richtung parallel sind, proportional sein. Denken wir uns nun diese Curve um die Axe rotiren, so ist die entstehende Rotationsfläche die Elasticitätsfläche des Aethers; für Schwingungen, welche nach irgend einer Richtung geschehen, ist der Halbmesser der Fläche, welcher in dieser Richtung liegt, das Maass der Elasticität, seinem Quadrate ist die durch solche Schwingungen erregte Elasticität proportional. Bezeichnen wir dieselbe mit e, so ist

$$e = m \cdot OT^2 = m \cdot \varrho^2 = m\,(\beta^2 \cdot \cos^2\psi + \alpha^2 \cdot \sin^2\psi).$$

Wir erhalten nun die Fortpflanzungsverhältnisse einer in einen Krystall eindringenden nicht polarisirten Lichtwelle folgendermassen. Die Lichtwelle sei eine Ebene W und die Richtung, nach welcher sie zunächst im Krystalle sich fortpflanzt, bilde mit der Axe den Winkel φ. Wir denken uns nun um die Axe des Krystalles, den wir als negativ voraussetzen wollen, die Elasticitätsfläche E (Fig. 156) construirt, W sei die eintretende Wellenebene. Legen wir nun durch die Fläche E einen mit der eintretenden Wellenebene parallelen Diametralschnitt $tst's'$, so geben uns die Halbmesser dieses Schnittes Ot, Os, die Elasticität des Aethers für die Schwingungen, welche in der Welle diesen Richtungen parallel geschehen. Denn man erkennt sofort, dass die durch die Schwingungen nach Ot senkrecht zu Ot geweckte Componente der Resultirenden ebenfalls senkrecht gegen die Wellenebene $tst's'$ gerichtet ist, somit, als nur longitudinale Schwingungen erregend, ganz

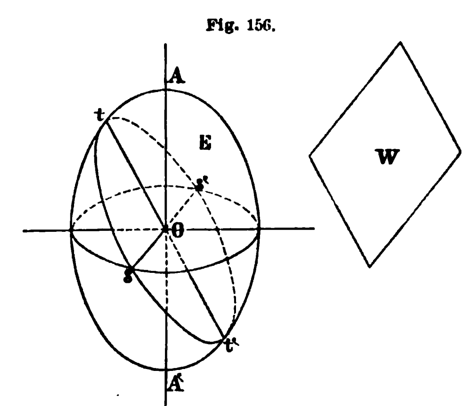


Fig. 156.

ausser Betracht kommt. Da nun die Fläche E durch die Rotation einer rings geschlossenen Curve entstanden ist, so ist sie selbst und deshalb auch jeder durch sie gelegte Schnitt rings geschlossen. Von den Halbmessern dieses Schnittes ist nun jedenfalls einer der grösste und einer der kleinste, ausser wenn der Schnitt senkrecht zur Axe, also ein Kreis ist; dann erhalten alle den kleinsten gleichen Werth α. Welches nun aber auch die Lage des Schnittes ist, immer fällt einer der Halbmesser, da der Schnitt durch den Mittelpunkt geht, in den Aequatorialschnitt; und da der Aequatorradius den kleinsten Werth von allen möglichen Halbmessern hat, so ist auch in diesem Schnitt der Radius Os, welcher in der Aequatorebene liegt, der kleinste.

Der grösste Halbmesser des Schnittes $ts't's'$ ist der zu Os senkrechte Ot, da dieser von allen der Axe am nächsten ist. Derselbe ist der Durchschnitt des durch die Axe gelegten zu $ts't's'$ senkrechten Schnittes $AtA't'$ und des Schnittes $ts't's'$, und bildet mit der Axe den Winkel $90^0 - \varphi$, er liegt also in dem durch die Axe gelegten auf Os senkrechten Hauptschnitte der Elasticitätsfläche.

Da nun immer eine Theilung der Schwingungen nach der Richtung der grössten und kleinsten Elasticität stattfinden muss, so zerspaltet sich die in den Krystall eindringende Welle in zwei, deren Schwingungen parallel Os, also senkrecht zur Axe und parallel Ot, also in einer durch die Axe gelegten Ebene und unter einer Neigung $90^0 - \varphi$ gegen die Axe geschehen.

Welches nun auch der Winkel φ sei, welchen die Normale der Welle mit der Axe bildet, es wird immer bei der Fortpflanzung der Welle durch den Krystall eine solche Theilung derselben eintreten müssen, denn immer schneidet ein der Welle paralleler Diametralschnitt die Elasticitätsfläche in einer solchen Curve, deren kleine Axe zu At' senkrecht ist, deren grosse in einem durch die Axe gelegten Schnitt auf der Wellennormale senkrecht ist und mit der Axe AA' den Winkel $90^0 - \varphi$ bildet. Nur in dem einen Falle, in welchem die Wellenebene W senkrecht zur Axe ist, schneidet ein ihr paralleler Diametralschnitt die Elasticitätsfläche in einem Kreise; in dem Falle ist also die Elasticität nach allen Richtungen gleich, es tritt keine Spaltung der Welle ein, sie pflanzt sich ungetheilt durch den Krystall fort.

Die Theilung der Wellen, wie sie durch den Versuch gegeben wird, folgt also unter Annahme dieser Elasticitätsverhältnisse unmittelbar, es müssen sich immer durch den Krystall zwei Wellen fortpflanzen, ausser wenn die Fortpflanzungsrichtung der Welle in die Axe des Krystalles fällt.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Wellen ist immer verschieden, deshalb muss auch im Allgemeinen bei dem Uebergange des Lichtes in den Krystall die Fortpflanzungsrichtung der Wellen verschieden sein. Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c einer Wellenbewegung haben wir früher ganz allgemein den Ausdruck erhalten

$$c = C \cdot \sqrt{\frac{e}{d}},$$

worin e die durch die Schwingungen in dem Mittel hervortretende elastische Kraft und d die Dichtigkeit des Mittels bedeutet. Für die erste der beiden Wellen, in welche W in dem Krystall zerlegt wird, ist nun e constant, nach welcher Richtung auch W in dem Krystalle sich fortpflanzt, und da die Dichtigkeit des Aethers in dem Krystalle als einem homogenen Mittel überall dieselbe ist, so folgt, dass für diese Welle die Fortpflanzungsgeschwindigkeit unabhängig von der Richtung ist, in welcher die Welle sich fortpflanzt. Bezeichnen wir den Aequatorialdurchmesser unserer Elasticitätsfläche mit α, so haben wir für diese Wellen

$$e = m \cdot \alpha^2$$

und somit für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω dieser Wellen

$$\omega = C \cdot \sqrt{\frac{m\alpha^2}{d}} \cdot$$

Setzen wir nun

$$C \cdot \sqrt{\frac{m}{d}} = A,$$

so wird

$$\omega = A \cdot \alpha.$$

Wenn daher im Innern des Krystalles im Punkte O eine Lichtbewegung beginnt, hat sich immer nach der Zeit t eine Lichtwelle um O ausgebreitet, deren Schwingungen senkrecht zur Axe geschehen und deren Grenze eine Kugel vom Radius $r = \omega t$ ist.

Ist aber der Punkt O ein Punkt in der Grenzfläche des Krystalles, in welchem eine ankommende Welle eine Lichtbewegung erzeugt, so wird auch von diesem in den Krystall sich eine solche Bewegung fortpflanzen, deren Grenze im Krystall eine Halbkugel vom Radius ωt ist. Es folgt somit, dass wir, um die Richtung der in den Krystall übergegangenen Wellenebene zu erhalten, die gewöhnliche Huyghens'sche Construction anwenden können. Die Schwingungsrichtung der so erhaltenen gebrochenen Wellenebene ist senkrecht zur Axe, also auch senkrecht zum Hauptschnitt, die Polarisationsebene des Strahles ist somit der Hauptschnitt des Krystalles. Die Verhältnisse des ordentlich gebrochenen Strahles ergeben sich also vollkommen so wie die Erfahrung sie festgestellt hat.

Die Oscillationsrichtung der zweiten im Krystall sich fortpflanzenden Welle bildet mit der Axe den Winkel $90^0 - \varphi$, die durch diese Oscillationen entwickelte Elasticität ist proportional dem Quadrate des mit der Axe den gleichen Winkel $90^0 - \varphi$ bildenden Durchmessers Ot, es ist demnach

$$e = m \cdot Ot^2$$

und deshalb die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle, welche dieser Richtung parallel oscillirt,

$$c = C \cdot \sqrt{\frac{m \cdot Ot^2}{d}} = A \cdot Ot.$$

Um nun die Wellenfläche dieser Wellen zu erhalten, das heisst die Grenze, bis zu welcher die Schwingungen, welche parallel der durch die Axe gelegten Ebene geschehen, sich fortpflanzen, wenn in O eine Lichtbewegung erregt wird, ist es nothwendig, die Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwingungen von dem Winkel, den diese oder die Fortpflanzungsrichtung mit der Axe bildet, zu bestimmen. Denn wenn in O eine Lichtbewegung erzeugt wird, pflanzen sich Wellenebenen W nach allen Richtungen fort, und jede dieser Wellen ergibt eine, deren Schwingungen in einer durch die Axe gelegten Ebene erfolgen; die Richtung der Schwingungen in dieser Ebene ist aber für die verschiedenen Wellen verschieden.

Da aber die Elasticitätsfläche eine Rotationsfläche ist, alle durch die Axe gelegten Schnitte sich somit ganz gleich verhalten, so genügt es, die Geschwindigkeit c der Fortpflanzung in einem solchen Diametralschnitt aufzusuchen. Die Linie, welche in dieser Ebene die von O aus gleichzeitig erreichten Punkte aufnimmt, haben wir dann nur um die Axe rotiren zu lassen, um die Fläche zu erhalten, bis zu welcher sich die Lichtschwingungen gleichzeitig in dem Krystall ausgebreitet haben.

Ist zu dem Ende wieder $ASA'S'$ ein durch die Axe der Elasticitätsfläche gelegter Schnitt, Fig. 157, in welchem Ot die Richtung der Schwingungen und der Halbmesser der Elasticitätsfläche ist, so dass

$$c = A \cdot Ot$$

und

$$Ot = \sqrt{\beta^2 \cos^2 (90^0 - \varphi) + \alpha^2 \sin^2 (90^0 - \varphi)} = \sqrt{\beta^2 \cdot \sin^2 \varphi + \alpha^2 \cdot \cos^2 \varphi},$$

so ist der Abstand der Wellenebene, deren Schwingungen parallel Ot geschehen, von dem Anfangspunkte O zur Zeit t nach dem Anfange der Bewegung

$$d = c \cdot t$$

$$= t \cdot A \cdot \sqrt{\beta^2 \sin^2 \varphi + \alpha^2 \cos^2 \varphi},$$

oder, wenn wir für t die Zeiteinheit einsetzen

$$d = \sqrt{A^2 \cdot \beta^2 \sin^2 \varphi + A^2 \alpha^2 \cdot \cos^2 \varphi}.$$

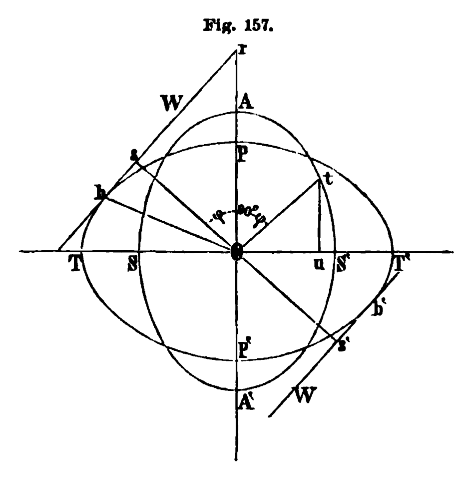


Fig. 157.

Nun ist $A\alpha$ die soeben mit ω bezeichnete Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes parallel der Axe AA; β^2 ist der Elasticität des Aethers für Schwingungen in der Richtung der Axe proportional, $A\beta$ also die Geschwindigkeit der Fortpflanzung des Lichtes senkrecht zur Axe. Bezeichnen wir diese, welche dem reciproken Werthe des Brechungsexponenten e (§. 80) proportional ist,

mit ε, so erhalten wir für d

$$d = \sqrt{\varepsilon^2 \cdot \sin^2 \varphi + \omega^2 \cdot \cos^2 \varphi} \; \ldots \; \text{I.}$$

Wie wir nun früher mehrfach sahen, ist die Wellenebene, welche sich in der Richtung Os fortgepflanzt hat, jene Ebene, welche die Wellenfläche, das heisst die Fläche, bis zu welcher die Lichtbewegung vom Punkte O aus nach allen Richtungen sich ausgebreitet hat, berührt. Wenn wir nun nachweisen, dass die Wellenebene W Tangentialebene an einem Ellipsoide ist, so folgt auch, dass dieses Ellipsoid die Wellenfläche der ausserordentlichen Strahlen in einem einaxigen Krystalle ist.

Es lässt sich nun in der That mit Hülfe einiger weniger Sätze über die Ellipse nachweisen, dass der Durchschnitt der zur Schnittebene ASA' senkrechten Wellenebene mit dieser Ebene, rb, Tangente an der Ellipse $PTP'T'$ ist, welche um den Punkt O mit den Axen $OP = \omega$ und $OT = \varepsilon$ beschrieben ist, indem wir zeigen, dass der Abstand einer mit Ot parallelen an diese Ellipse gelegten Tangente von dem Punkte O, $Os = d$ ist. Daraus folgt dann unmittelbar, dass die durch rs senkrecht zu diesem Schnitte gelegte Wellenebene W Tangentialebene an dem durch Rotation der Ellipse $PTP'T'$ um AA' entstehenden Rotationsellipsoide ist und somit, dass dieses Rotationsellipsoid die Wellenfläche der ausserordentlichen Strahlen in einem einaxigen Krystalle ist.

Bezeichnen wir die Abstände irgend eines Punktes der Ellipse $PTP'T'$ von der Axe PP' mit x und von der Axe TT' mit y, so besteht zwischen den die Lage des Punktes bestimmenden Werthen von x und y, wie schon mehrfach erwähnt, die Gleichung

$$\frac{x^2}{\varepsilon^2} + \frac{y^2}{\omega^2} = 1 \; \ldots \; (a).$$

Legen wir nun an diese Ellipse die mit Ot parallele Tangente br, welche also ebenfalls mit der Axe OA den Winkel $brO = 90^0 - \varphi$ und somit mit der Axe TT' den Winkel φ einschliesst, so gilt, ebenfalls nach bekannten Sätzen der analytischen Geometrie, für die zusammengehörigen Abstände x und y der zur Tangente gehörigen Punkte, die Gleichung

$$y = \operatorname{tang} \varphi \cdot x + q \; \ldots \; (b).$$

Da nun in dieser Gleichung $y = q$ wird, wenn $x = 0$ ist, so folgt, dass $q = Or$ gleich dem Abstande des Punktes r, in welchem die Tangente die Axe AO schneidet, von O ist. Für den senkrechten Abstand Os der Tangente von O erhalten wir daher, da

$$\frac{Os}{Or} = \sin Ors; \quad Os = q \cdot \cos \varphi.$$

Nennen wir nun die Coordinaten des Punktes b, in welchem die Tangente die Ellipse berührt, x' und y', so können wir die Gleichung der Tangente, wie in der analytischen Geometrie bewiesen wird, auch schreiben

$$y = -\frac{\omega^2 \cdot x'}{\varepsilon^2 \cdot y'} \cdot x + \frac{\omega^2}{y'} \; \ldots \; (c).$$

Die Richtigkeit der Gleichung (c) erkennt man schon daraus, dass, wenn x und y die Werthe x' und y' erhalten, zwischen diesen Werthen die Gleichung (a) bestehen muss, da der durch diese Werthe bestimmte Punkt auch zur Ellipse gehört. Wie man sieht, geht aber Gleichung (c) in Gleichung (a) über, wenn x und y diese Werthe annehmen, denn dann wird

$$\frac{y'^2}{\omega^2} + \frac{x'^2}{\varepsilon^2} = 1 \quad . \ . \ . \ . \ (a').$$

Da nun die Gleichungen (b) und (c) dieselbe Linie darstellen, so folgt

$$-\frac{\omega^2 x'}{\varepsilon^2 y'} = \text{tang}\ \varphi;\ q = \frac{\omega^2}{y'}$$

und somit

$$Os = \frac{\omega^2}{y'} \cdot \cos\varphi.$$

Um nun den Abstand Os nur durch ω, ε und φ wiederzugeben, entwickeln wir den Werth für y' aus (a') und den zuletzt erhaltenen Ausdruck für tang φ.

Wir erhalten dann aus (a')

$$\frac{x'^2}{\varepsilon^4} = \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{y'^2}{\omega^2 . \varepsilon^2}$$

und aus der Gleichung für tang φ

$$\frac{x'^2}{\varepsilon^4} = \frac{y'^2}{\omega^4} \cdot \text{tang}^2\ \varphi,$$

somit

$$\frac{1}{\varepsilon^2} = \frac{y'^2}{\omega^4}\left(\text{tang}^2\ \varphi + \frac{\omega^2}{\varepsilon^2}\right)$$

oder

$$\frac{\omega^2}{y'} = \sqrt{\varepsilon^2 . \text{tang}^2\ \varphi + \omega^2} = \sqrt{\frac{\varepsilon^2 \sin^2\varphi + \omega^2 \cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}}$$

und daraus schliesslich

$$Os = \frac{\omega^2}{y'} \cdot \cos\varphi = \sqrt{\varepsilon^2 \cdot \sin^2\varphi + \omega^2 \cos^2\varphi}.$$

Dieser Werth für Os ist, wie man sieht, genau gleich dem vorhin aufgefundenen für d. Der Abstand der an unsere Ellipse gezogenen mit Ot parallelen Tangente ist somit gleich demjenigen der Wellenebene von O. Es folgt also nach dem Vorigen, dass der Durchschnitt der Wellenebene W Tangente an der Ellipse $PTP'T'$ ist, und somit die Ebene W selbst Tangentialebene an dem durch Rotation der Ellipse um AA' entstehenden Rotationsellipsoide ist. Dieses Ellipsoid, dessen Axen die Strecken sind, durch welche das Licht sich gleichzeitig parallel und senkrecht zur optischen Axe des Krystalles fortgepflanzt hat, ist somit die Grenze, bis zu welcher die Lichtbewegung vom Punkte O aus gleichzeitig nach allen Richtungen hin sich ausgebreitet hat, wenn in dem im Innern des Krystalles liegenden Punkte O eine Lichtbewegung erregt ist.

Ist nun der Punkt O ein Punkt in der Oberfläche des Krystalles, welcher durch eine ankommende Welle in Schwingungen versetzt wird, so werden sich auch von diesem Schwingungen der Art in dem Krystalle fortpflanzen und die Fläche, welche zu einer bestimmten Zeit die Bewegungen begrenzt, wird die Hälfte des soeben bestimmten Ellipsoides sein, die wir erhalten, wenn wir durch O einen der brechenden Fläche parallelen Diametralschnitt legen. Eine solche Fläche war es aber, welche wir bei der Huyghens'schen Construction zur Bestimmung der ausserordentlich gebrochenen Wellen und Strahlen anwandten, wir erkennen somit, dass diese Construction auch theoretisch begründet ist, dass sie ihren Grund in der Beschaffenheit der Krystalle hat.

Der soeben abgeleitete Werth von OS gibt uns die Strecke, um welche sich in der Zeiteinheit eine Welle fortpflanzt, deren Normale mit der Axe den Winkel φ bildet, oder die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle. Wir können nun mit den gewonnenen Ausdrücken sofort auch die Richtung und Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Strahles, die Länge des zum Tangirungspunkt gezogenen Halbmessers Ob der Ellipse erhalten. Nennen wir den Winkel, den derselbe mit der Axe bildet T, so ist zunächst

$$\frac{x'}{y'} = \cot bOS = \operatorname{tang} T.$$

Aus den Gleichungen (b) und (c) leiteten wir vorhin ab

$$\frac{x'}{y'} = -\frac{\varepsilon^2}{\omega^2} \cdot \operatorname{tang} \varphi,$$

somit ist

$$\operatorname{tang} T = -\frac{\varepsilon^2}{\omega^2} \cdot \operatorname{tang} \varphi.$$

Für Ob erhalten wir

$$Ob^2 = x'^2 + y'^2 = Ob^2 \sin^2 T + y'^2$$

und aus der Gleichung der Ellipse

$$\frac{Ob^2 \sin^2 T}{\varepsilon^2} + \frac{y'^2}{\omega^2} = 1$$

$$y'^2 = \omega^2 \left(1 - \frac{Ob^2 \sin^2 T}{\varepsilon^2}\right),$$

somit

$$Ob^2 (1 - \sin^2 T) = \omega^2 \left(1 - \frac{Ob^2 \sin^2 T}{\varepsilon^2}\right)$$

und daraus

$$Ob^2 = \frac{1}{\frac{\cos^2 T}{\omega^2} + \frac{\sin^2 T}{\varepsilon^2}},$$

Wir können somit, sobald die Richtung, in welcher sich die Welle oder der Strahl fortpflanzt, bekannt ist, sofort das Verhalten des im Krystall sich fortpflanzenden Lichtes vollständig bestimmen.

§. 82.

Anwendung einaxiger Krystalle als Polarisationsapparate. Die beiden aus einem einaxigen Krystall austretenden Strahlen sind vollständig polarisirt, man kann sich daher solcher Krystalle am sichersten bedienen, um vollständig linear polarisirtes Licht zu erhalten, sicherer als dieses durch Reflexion geschehen kann, da durch diese fast immer, wenn auch nur schwach, elliptisch polarisirtes Licht erhalten wird.

In den meisten Fällen sind jedoch die doppelten Strahlen, welche uns die Krystalle liefern, unbequem, man hat daher auf verschiedene Weise bewirkt, dass nur einer von den beiden Strahlen in der gewünschten Richtung aus dem polarisirten Krystall austritt, dessen Polarisationsebene dann durch die Natur des Strahles gegeben ist.

Der einfachste Apparat dieser Art ist das achromatisirte Kalkspathprisma.

Man kittet ein rechtwinkliges Prisma aus einem Kalkspathkrystall, dessen brechende Kante der optischen Axe des Krystalles parallel ist, mit einem ganz gleichen Prisma aus Glas, dessen mittlerer Brechungsexponent gleich dem der ausserordentlichen Strahlen ist, so zusammen, dass ihre brechenden Kanten parallel aber entgegengesetzt liegen; so dass also ein Parallelepiped entsteht. Als Kitt benutzt man den sehr durchsichtigen Canadabalsam. Lässt man Licht senkrecht auf die Kathetenflächen dieser Combination fallen, welche mit den Hypothenusenflächen sich in den brechenden Kanten schneiden, so geht der ausserordentliche Strahl ungebrochen hindurch, der ordentliche wird abgelenkt, man erhält also einen polarisirten Strahl, dessen Polarisationsebene durch das Einfallsloth und eine der brechenden Kante parallele Linie bestimmt ist. Ist nämlich (Fig. 158) K das Kalkspathprisma und G das Glasprisma, so gehen nach §. 79 zunächst der ordentliche und der ausserordentliche Strahl bis b in gleicher Richtung fort. Da der Brechungsexponent des Glases gleich dem des Kalkspathes für die ausserordentlichen Strahlen ist, so gehen diese auch ungebrochen durch das Glas weiter. Für die ordentlichen Strahlen ist der Brechungsexponent des Glases kleiner als der des Kalkspathes, es tritt daher eine Ablenkung derselben nach der brechenden Kante ein, dieselben treten nach o aus. Aehnliches tritt in der Lage Fig. 159 ein, im Glasprisma G pflanzt sich das ankommende Licht ungebrochen fort, die ausserordentlichen auch durch das Kalkspathprisma; die ordentlichen jedoch, für welche der Brechungsexponent beim Uebergange aus Glas in Kalkspath grösser als eins ist, werden von der brechenden Kante fort gebrochen, sie treten nach o in anderer Richtung aus, als die ausserordentlichen Strahlen.

In etwas anderer Weise hat Senarmont[1]) aus Kalkspath einen polarisirenden Apparat hergestellt, er wendet zwei Prismen von Kalkspath an, von

1) *de Senarmont,* Annales de chim. et de phys. 3. Sér. T. L.

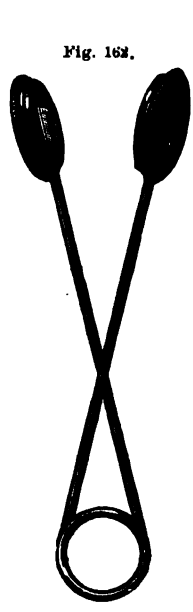
winkel der ordentlichen Strahlen, welcher gerade 68° betragen würde, wenn die ordentlichen Strahlen parallel AE' aufträfen, beträgt nun wegen der Ablenkung der Strahlen bei i immer mehr als 70°, diese Strahlen können deshalb in die Schicht nicht eindringen; sie müssen total reflectirt werden.

Ein so hergestelltes Prisma liefert uns demnach nur ein Strahlenbündel und zwar ein senkrecht zur Ebene AG vollkommen polarisirtes Bündel. Es ist deshalb das sicherste und bequemste Mittel, um ein ungefärbtes vollkommen polarisirtes Strahlenbündel zu erhalten.

Durch eine kleine Modification in der Construction des Nicol'schen Prismas hat Foucault[1]) demselben eine Form gegeben, welche gestattet dasselbe viel billiger herzustellen; er legt die vorher zerschnittenen Hälften eines Kalkspathrhomboeders in ihrer ursprünglichen Lage wieder zusammen, ohne indess eine Canadabalsamschicht dazwischen zu bringen, so dass die beiden Hälften durch eine dünne Luftschicht getrennt sind. Führt man den Schnitt so, dass er mit der Grenzfläche AC Fig. 161 einen Winkel von 51° bildet, so werden die ordentlich gebrochenen Componenten der parallel der Kante K oder in einer Neigung bis zu 4° gegen dieselbe in den Krystall eintretenden Strahlen total reflectirt, die ausserordentlichen gehen wie bei den Nicol'schen Prismen hindurch.

Von andern einaxigen Krystallen wendet man noch den Turmalin zur Herstellung von Polarisationsapparaten an. Man schneidet zu dem Ende aus einem Turmalin zwei planparallele Platten der Axe parallel heraus und fasst sie mittels Korkscheiben nach Art der Fig. 162 in Drahtringe, welche an einem mehrfach gebogenen Drahte befestigt sind und durch die Elasticität des Drahtes gegen einander gedrückt werden. Der Turmalin besitzt die Eigenschaft die ordentlich gebrochenen Strahlen ganz zu absorbiren und nur die ausserordentlichen Strahlen, deren Polarisationsebene in diesen Platten zur Axe des Krystalles senkrecht ist, hindurchzulassen. Die Absorption vertritt also hier die Stelle der totalen Reflexion bei den Nicol'schen Prismen.

Fig. 162.



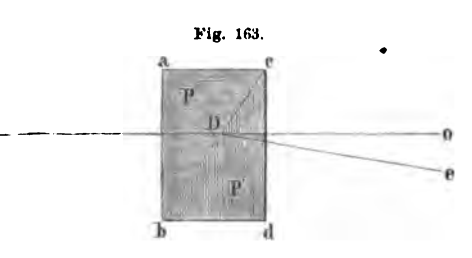
Dieser Polarisationsapparat, der sich durch seine grosse Einfachheit empfiehlt, hat nur den Nachtheil, dass meist wegen der dunklen Färbung der Krystalle auch die ausserordentlichen Strahlen sehr geschwächt werden. Ueberdies ist das polarisirte Licht in den Fällen immer gefärbt, zum Beobachten von Farbenerscheinungen ist daher der Apparat weniger geeignet. Dieser Apparat in etwas anderer Form ist zuerst von Marx angegeben[2]).

1) *Foucault*, Comptes Rendus. XLV. p. 239.
2) *Marx*, Schweigger Jahrbuch XLIX.

§. 83.

Rochon's Mikrometer [1]). Eine besondere Anwendung der Doppelbrechung in einaxigen Krystallen ist im Rochon'schen Mikrometer gemacht, welches dazu dient, aus der bekannten Entfernung eines Gegenstandes seine Grösse und aus der bekannten Grösse seine Entfernung zu bestimmen. Zwei Prismen P und P' aus Bergkrystall (Fig. 163) sind so hergestellt, dass in dem ersten *abc* die optische Axe des Krystalles zur Seite *ab* senkrecht ist, im zweiten dagegen der brechenden Kante *c* parallel, also zur Ebene der Zeichnung senkrecht ist. Die beiden bei *a* und *d* rechtwinkligen Prismen sind dann mit ihren Hypothenusenflächen an einander gekittet, so dass sie ein rechtwinkliges Parallelepiped geben. Fällt nun ein Lichtstrahl senkrecht oder nahezu senkrecht auf die Fläche *ab* des ersten Prismas, so pflanzt er sich ungebrochen und ungetheilt bis D fort. Wenn er bei D in das zweite Prisma tritt, zertheilt er sich in zwei Strahlen; der ordentliche, dessen Brechungsexponent constant ist, pflanzt sich ungebrochen fort, und tritt nach *o* parallel mit dem einfallenden Strahle aus. Ein Theil erleidet die ausserordentliche Brechung und wird, da der Bergkrystall ein positiver Krystall ist, von der brechenden Kante fortgebrochen, und da die brechende Kante auf der Einfallsebene senkrecht steht, in der Einfallsebene gegen *d* hin abgelenkt. Beim Austritt wird er nochmals gebrochen und tritt dann nach *e* aus. Die Ablenkung des Strahles hängt, da die Axe zur Einfallsebene senkrecht und die Incidenz bei ein und demselben Apparat als constant angesehen werden kann, nur von dem brechenden Winkel *bcd* ab, und kann leicht nach den im ersten Abschnitt entwickelten Sätzen aus diesem und dem bekannten Brechungsexponenten für die ausserordentlichen Strahlen berechnet werden. Es ist für einen

Fig. 163.



brechenden Winkel	30°	40°	50°	60°
die Ablenkung	19′30″	28′20″	40′	57′40″.

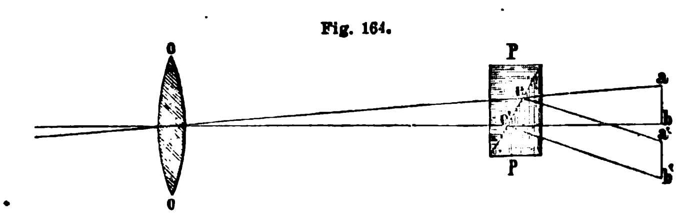
Diese für die senkrechte Incidenz berechneten Werthe gelten mit sehr geringer Abweichung, wenn, wie es in der Praxis vorkommt, der Winkel, welchen die einfallenden Strahlen mit dem Einfallsloth bilden, ein wenig von dem rechten Winkel abweicht.

Bringt man nun diese Combination zweier Prismen zwischen das Objectiv *o* (Fig. 164) eines Fernrohrs und das objective Bild *ab*, welches jenes von einem in der Entfernung x befindlichen Gegenstande entwirft, so sieht man durch das Ocular ausser dem ordentlichen Bilde auch noch das zweite

1) *Rochon*, Nova Acta Academiae Petropolitanae VI.

abgelenkte ausserordentliche Bild $a'b'$. Da der Winkel, um welchen die ausserordentlichen Strahlen abgelenkt werden, bei einem gegebenen Prisma

Fig. 164.



constant ist, so hängt der Abstand der gleichliegenden Punkte b und b' in den beiden Bildern nur ab von der Entfernung der Bildebene von dem Punkte im Mikrometer, nach welchem die ordentlichen und ausserordentlichen Strahlen convergiren. Sei e' dieser Punkt, und sei α der Winkel, welchen die ordentlichen und ausserordentlichen Strahlen mit einander bilden, so ist offenbar

$$bb' = e'b \,.\, \tang \alpha.$$

In den Fernrohren, in welchen das Mikrometer angebracht ist, kann man nun dasselbe verschieben, und an einer ausserhalb des Fernrohrs angebrachten Skala den Abstand der Prismen von der Hauptbrennebene ablesen. Verschiebt man nun das Mikrometer so weit, dass die beiden Bilder sich gerade berühren, so hat man, wenn man dann den Abstand der Prismen von der Hauptbrennebene bestimmt, die nothwendigen Daten, um aus der bekannten Grösse des Gegenstandes seine Entfernung zu bestimmen, oder aus der Entfernung die Grösse.

Die Verschiebung des Bildes bb' ist nämlich dann gerade gleich der Grösse des Bildes. Nennen wir nun die Grösse des Bildes y, diejenige des Gegenstandes Y, die Entfernung des Bildes von der zweiten Hauptebene f, die des Gegenstandes von der ersten Hauptebene x, und die Hauptbrennweite F, so ist

$$bb' = y = \frac{f}{x} \cdot Y.$$

Weiter ist nun

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{x},$$

$$f = \frac{x \,.\, F}{x - F},$$

$$y = \frac{x \,.\, F}{x\,(x - F)} \cdot Y = \frac{F}{x - F} \cdot Y.$$

Da nun immer F gegen x sehr klein ist, dürfen wir dafür setzen

$$y = \frac{F}{x} \cdot Y.$$

Nennen wir nun den Abstand der Prismen von der Hauptbrennebene a, so können wir, da wegen der immer sehr grossen Entfernung x, f nur sehr

wenig von F verschieden ist, auch die Entfernung $e'b$ gleich a setzen und erhalten dann

$$\frac{F}{x} \cdot Y = a \,.\, \text{tang}\, \alpha,$$

$$\frac{Y}{x} = \frac{a \,.\, \text{tang}\, \alpha}{F}.$$

Die Grösse $\frac{a \,.\, \text{tang}\, \alpha}{F}$ ist nun für jedes bestimmte mit einem solchen Apparat versehene Fernrohr constant, ist sie ein für allemal bestimmt und bezeichnen wir sie mit c, so wird

$$Y = cx$$

für die Grösse und

$$x = \frac{Y}{c}$$

für die Entfernung des beobachteten Gegenstandes, wenn x oder Y bekannt sind.

§. 84.

Doppelbrechung in zweiaxigen Krystallen. Die Brechungserscheinungen der drei übrigen Krystallsysteme mit drei ungleichen Axen, des isoklinischen oder rhombischen, des monoklinischen oder klinorhombischen, des triklinischen oder klinorhomboidischen, weichen von der Doppelbrechung in den beiden bisher betrachteten Systemen in mehrfacher Beziehung ab. Während nämlich das Licht bei seinem Eintritt in einen einaxigen Krystall im Allgemeinen in zwei Strahlen zerspalten wird, von denen der eine dem gewöhnlichen Brechungsgesetz folgt, der andere aber mittels der Huyghens'schen Construction aus dem die Wellenfläche dieser Strahlen darstellenden, für jeden Krystall constanten und constant liegenden Rotationsellipsoide erhalten werden kann, gibt es bei den Krystallen der drei andern Systeme keinen Strahl, welcher dem gewöhnlichen Brechungsgesetz folgt. Es tritt im Allgemeinen auch hier eine Spaltung der einfallenden Lichtwelle in zwei ein, die ihnen angehörigen Strahlen treten aber beide aus der Einfallsebene heraus, und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit beider Wellen ist verschieden, je nach der Richtung, in welcher sie den Krystall durchsetzen. Das Gesetz, nach welchem sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ändern, ist ein sehr verwickeltes.

Die Polarisationsebenen beider Strahlen in einaxigen Krystallen waren immer der durch den Krystall und das Einfallsloth gelegte Hauptschnitt und eine zu ihr senkrechte Ebene. Die beiden Strahlen in den zweiaxigen Krystallen sind auch immer senkrecht zu einander polarisirt, die Polarisationsebenen können aber je nach der Lage des Krystalles alle möglichen Richtungen haben.

Die drei vorhin erwähnten Krystallsysteme unterscheiden sich ferner von den einaxigen Krystallen dadurch, dass es hier mehrere Richtungen gibt, in

denen keine Doppelbrechung eintritt. Wir nannten bei den einaxigen Krystallen jene Richtung die Axe, in welcher eine Lichtwelle, ohne in zwei zu zerfallen, durch den Krystall hindurchgeht. In diesem Sinne besitzen die Krystalle der drei letzten Systeme zwei Axen, denn es gibt in jedem zu ihnen gehörigen Krystalle zwei Richtungen, in welchen sich nur eine Welle durch den Krystall fortpflanzt. Indess findet zwischen diesen Axen und denen der einaxigen Krystalle doch ein wesentlicher Unterschied statt; denn in den einaxigen Krystallen trat, wenn keine Doppelbrechung der Wellen stattfand, auch keine der Strahlen ein; Strahl und Wellennormale waren in dem Falle identisch, und der einen Welle entsprach ein Strahl. Bei den zweiaxigen Krystallen indess gehört zu der in der Richtung der optischen Axen sich fortpflanzenden ungetheilten Welle eine unendliche Anzahl von Strahlen, welche auf dem Mantel eines Kegels liegen, und welche als ein Strahlencylinder den Krystall verlassen, wenn eine planparallele Platte in der Richtung ihrer optischen Axe von einer Lichtwelle durchsetzt wird.

Noch zwei andere Richtungen sind in diesen Krystallen vorhanden, welche, freilich in einem etwas andern Sinne, auf den Namen einer optischen Axe Anspruch haben; sie werden daher secundäre optische Axen genannt. In dieser Richtung pflanzt sich nämlich durch den Krystall nur ein einziger Strahl fort; dem jedoch eine unendliche Anzahl von Wellenebenen angehören. Beim Austritt aus dem Krystall zertheilt sich daher der Strahl, welcher in dieser Richtung den Krystall durchläuft, in eine unendliche Menge von Strahlen, welche auf dem Mantel eines Kegels liegen, welcher nach dem Austrittspunkte des Strahles convergirt.

Schon diese wenigen Andeutungen über den Unterschied der einaxigen und zweiaxigen Krystalle genügen, um zu zeigen, dass die Doppelbrechung in den letztern eine viel verwickeltere ist als in den erstern. Auf experimentellem Wege die Gesetze derselben aufzusuchen, ist nicht wohl möglich. Das ist auch in der That nicht geschehen, sondern dieselben wurden zuerst in der classischen Abhandlung Fresnel's über die Doppelbrechung[1]) theoretisch aus den Principien der Undulationstheorie abgeleitet. Die von Fresnel und andern abgeleiteten Gesetze wurden dann später durch den Versuch bestätigt, und so wurde die Doppelbrechung in zweiaxigen Krystallen der entschiedenste Beweis für die Richtigkeit der Undulationstheorie, indem sie zeigte, dass das Princip derselben fruchtbar zu neuen Erscheinungen führte, welche der experimentirenden Physik entgangen waren. Damit war denn auch der Undulationstheorie der Sieg über die Emissionstheorie gesichert in dem heftigen Streite, welcher in den ersten Decennien dieses Jahrhunderts zwischen beiden gekämpft wurde.

---

1) *Fresnel,* Mémoires de l'Acad. de France. T. VII. Poggend. Annal. Bd. XXIII. p. 372. Oeuvres complètes. T. II. Man sehe auch *Herschel's* Optik. §. 997—1006.

Wir werden daher von dem bisherigen Gange abweichend diese Erscheinung ebenfalls an der Hand der Theorie untersuchen, da es nur so möglich ist, einen Einblick in dieselbe zu erhalten. Leider müssen wir uns hier jedoch mit einem allgemeinen Ueberblicke begnügen, da eine vollständige Ausführung und Ableitung der Einzelnheiten einen mathematischen Apparat erfordert, den anzuwenden die uns hier gestellte Grenze nicht gestattet.

Zur Ableitung der Lichterscheinungen in zweiaxigen Krystallen macht Fresnel über die Anisotropie des Aethers in denselben die allgemeinste Annahme; er nimmt an, dass die Elasticität desselben in allen durch einen Punkt gelegten Richtungen verschieden sei. Es ist hier keine Richtung vorhanden, welche die Eigenschaft der Hauptaxe hat, um welche sich die Elasticitäten symmetrisch gruppiren, so dass alle Richtungen, welche mit dieser gleiche Winkel bilden, auch gleiche Elasticität haben. Das Gesetz, nach welchem sich die Elasticität nach den verschiedenen durch einen Punkt gelegten Richtungen ändert, lässt sich auch hier durch eine ringsgeschlossene Fläche darstellen, welche drei zu einander senkrechte Axen hat, von denen jedoch nicht, wie bei den einaxigen Krystallen zwei unter einander gleich sind, sondern welche alle drei verschieden sind. Diese drei Axen nennt Fresnel die Axen der optischen Elasticität. In dem isoklinischen oder rhombischen System fallen diese Axen mit den drei auf einander senkrechten Axen des Krystalles zusammen. Sind nun Fig. 165 OX, OY, OZ die drei auf einander senkrechten Axen, und ist die Elasticität des Aethers, welche durch Schwingungen parallel OX erregt wird, gleich a^2, diejenige parallel der Y-Axe gleich b^2 und diejenige parallel der Z-Axe gleich c^2, so findet Fresnel, dass die Elasticität nach irgend einer Richtung OR, welche mit der Axe OX den Winkel α bildet, mit OY den Winkel β, mit OZ den Winkel γ, durch die Gleichung gegeben ist

Fig. 165.

$$r^2 = a^2 \, . \cos^2 \alpha + b^2 \, . \cos^2 \beta + c^2 \, . \cos^2 \gamma$$

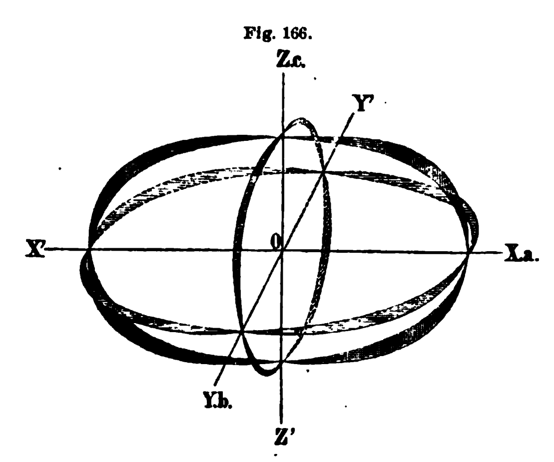
und indem wir die Winkel α und β und γ alle möglichen Werthe annehmen lassen, erhalten wir die Elasticitäten nach allen möglichen durch O gelegten Richtungen.

Die Endpunkte der Längen r, deren Quadraten die Elasticität des Aethers nach dieser Richtung proportional ist, liegen auf einer ringsgeschlossenen Fläche, welche, wie der Mathematiker Magnus [1]) gezeigt hat, durch folgende Construction erhalten werden kann. Man construire um die drei Axen a, b, c, von denen $a > b > c$ sei, ein Ellipsoid (Fig. 166); und lege dann an die

1) *L. J. Magnus,* Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie des Raumes. *Beer,* Einleitung in die höhere Optik. Braunschweig 1853.

verschiedenen Punkte dieses Ellipsoides Tangentialebenen. Von dem Mittelpunkte O dieses Ellipsoides lasse man dann auf diese Tangentialebenen Senkrechte hinab. Die Punkte, wo diese Senkrechten die Tangentialebenen schneiden, sind dann Punkte der Elasticitätsfläche, das heisst die Länge der Senkrechten vom Mittelpunkte O bis zu dem Punkte, wo sie die Tangente schneiden, genügt der von Fresnel angegebenen Gleichung

Fig. 166.



$$r^2 = a^2 \,.\, \cos^2\alpha + b^2 \,.\, \cos^2\beta + c^2 \cos^2\gamma.$$

Dem Quadrate dieser Länge ist also die Elasticität nach dieser Richtung proportional.

Die Richtigkeit dieser Construction ergibt sich schon aus unsern Entwicklungen des §. 81; denn aus denselben folgt unmittelbar, dass die drei Hauptschnitte der so erhaltenen Fläche der von Fresnel aufgestellten Gleichung entsprechen. Für den Hauptschnitt XZ z. B. ist der Winkel $\beta = 90^0$, somit $\cos\beta = 0$, für die in diesen fallenden Halbmesser ist deshalb

$$r^2 = a^2 \,.\, \cos^2\alpha + c^2 \,.\, \cos^2\gamma$$

und da sich dann α und γ zu 90^0 ergänzen

$$r^2 = a^2 \,.\, \cos^2\alpha + c^2 \,.\, \sin^2\alpha.$$

Die an diesen Hauptschnitt des Ellipsoides gelegten Tangentialebenen sind nun senkrecht zur Ebene XZ, und die Durchschnittslinie der Tangentialebenen mit der Ebene XZ sind Tangenten an der den Hauptschnitt bildenden Ellipse. Im §. 81 haben wir aber bereits den Nachweis geliefert, dass wenn wir an eine Ellipse, deren Axen a und c sind, senkrecht zu einem Halbmesser, der mit der Axe a den Winkel α bildet, eine Tangente ziehen, der senkrechte Abstand dieser Tangente von dem Mittelpunkte der Ellipse r gegeben ist durch die Gleichung

$$r^2 = a^2 \,.\, \cos^2\alpha + c^2 \sin^2\alpha.$$

Daraus folgt also, dass der Punkt, wo die Senkrechte diese Tangente trifft, ein Punkt der Elasticitätsfläche ist, somit dass wir den der Ebene XZ parallelen Schnitt der Elasticitätsfläche in der von Magnus angegebenen Weise erhalten, indem wir an den Hauptschnitt XZ des Ellipsoides alle möglichen Tangenten legen, und auf dieselben Senkrechte vom Mittelpunkt herablassen. Die Punkte, wo die Senkrechten die Tangenten treffen, bilden den XZ parallelen Hauptschnitt der Elasticitätsfläche. Gleiches gilt für die andern Hauptschnitte, und damit für alle Schnitte der Elasticitätsfläche.

Wenn wir nun an alle Punkte des Ellipsoides Tangentialebenen legen, und auf alle diese Ebenen von dem Mittelpunkte aus Senkrechte herablassen, so liegen alle die Punkte, in welchen diese Senkrechten die Tangentialebenen schneiden, auf einer Fläche, deren Halbmesser offenbar alle der von Fresnel für die Elasticitäten nach diesen Richtungen aufgefundenen Gleichung genügen.

Die Quadrate dieser Halbmesser geben uns also die Elasticität, welche durch Schwingungen nach der Richtung derselben erregt wird. Die Fläche ist somit die Elasticitätsfläche, das heisst, jene Fläche, deren Halbmesser uns die Elasticität nach der Richtung der Radien in der angegebenen Weise liefert.

Von dieser Fläche erhellt nun nach der angegebenen Construction sofort, dass sie eine ringsgeschlossene Fläche ist, welche das Ellipsoid überall umhüllt und dasselbe an den Endpunkten der drei Axen berührt, da die an den Endpunkten der Axen an das Ellipsoid gelegten Tangentialebenen auf den Axen senkrecht stehen. Die drei Axen des Ellipsoides sind somit auch die Axen der Elasticitätsfläche, und der Mittelpunkt des erstern ist zugleich der Mittelpunkt der letztern. Fig. 166 zeigt ausser den Durchschnitten durch das um die drei Axen a, b, c gelegte Ellipsoid mit den drei durch $OXOY$, $OXOZ$, $OYOZ$ gelegten Ebenen auch die Durchschnitte der Elasticitätsfläche mit eben denselben Ebenen. Diese Schnitte, welche je zwei Axen der Fläche aufnehmen, sind die Hauptschnitte der Fläche. Eine Betrachtung derselben zeigt, wie die Elasticität von der Richtung der X-Axe aus nach allen Seiten hin stetig abnimmt, aber in jeder durch die Axe gelegten Ebene nach einem andern Gesetz, in der Ebene XZ von a bis c, in der Ebene XY von a bis b, und in der zwischen diesen beiden liegenden Ebenen von a bis zu einem zwischen b und c liegenden Werthe. Ebenso ändert sich die Elasticität stetig, wenn man von einer der andern Axen ausgeht; von Z aus nimmt sie nach allen Seiten zu, von Y aus in der Richtung gegen X hin zu, gegen Z hin ab.

Ein Schnitt der Fläche, welche wir durch den Mittelpunkt legen, schneidet dieselbe immer in einer ringsgeschlossenen Curve, in welcher zwei auf einander senkrechte Axen den grössten und den kleinsten Durchmesser dieser Schnittcurven bilden. Ferner ist es leicht zu übersehen, dass es jedoch zwei ganz bestimmte durch die Axe OY gelegte und zur Ebene XZ senkrechte Schnitte durch die Fläche gibt, in welchen diese beiden auf einander senkrechten Durchmesser und mit diesen alle übrigen Durchmesser der Schnittcurve einander gleich werden. Denn denken wir uns zunächst einen Schnitt durch die Fläche gelegt, welcher die Axen OY und OZ in sich aufnimmt, so sind b und c offenbar auch die Axen dieses Schnittes. Denken wir uns nun diesen Schnitt um die Axe OY gedreht, so wird die in OY fallende b auch für alle die dann entstehenden Schnitte eine Axe sein, während die andere zu ihr senkrechte Axe immer in der Ebene ZX liegt und in dieser von c bis a wächst. Da nun unserer Annahme nach $c < b$, aber $a > b$, so muss es eine

bestimmte Lage des Schnittes geben, für welche die in der Ebene XZ liegende Axe gerade gleich b wird, also die beiden Axen gleich werden. Dann werden es aber auch alle übrigen Durchmesser, und der Schnitt wird ein Kreis. Solcher Kreisschnitte gibt es aber offenbar zwei und nur zwei, denn wir kommen zu denselben sowohl wenn wir den Schnitt ZY von der Linken zur Rechten, als auch wenn wir ihn von der Rechten zur Linken sich drehen lassen.

Denken wir uns jetzt in einem zweiaxigen Krystall diese Elasticitätsfläche um einen Punkt construirt, und nehmen an, dass sich nach irgend einer Richtung durch den Krystall eine Wellenebene fortpflanze. Zur Bestimmung der Fortpflanzungsverhältnisse legen wir dann durch die Elasticitätsfläche einen der Wellenebene parallelen Diametralschnitt. Die Halbmesser dieses Schnittes geben uns dann die Elasticitäten für die verschiedenen in der Wellenebene vorhandenen Schwingungen. Die soeben angestellte Betrachtung hat nun ergeben, dass die Richtungen der grössten und kleinsten Elasticität mit den beiden auf einander senkrechten Axen des Diametralschnittes zusammenfallen. Nach dem im §. 81 herangezogenen Principe wird sich daher die Welle in zwei zerspalten, deren Schwingungsrichtungen mit den Axen des Schnittes parallel sind, und welche sich mit verschiedener, durch die Quadrate der Halbaxen bestimmten Geschwindigkeit durch den Krystall fortpflanzen. Es werden sich daher im Allgemeinen durch den Krystall nach einer und derselben Richtung, wenn eine Wellenebene in denselben eintritt, zwei senkrecht zu einander polarisirte Wellen mit verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzen.

In zwei Fällen wird das jedoch nicht der Fall sein, immer dann, wenn die Wellenebene einem der beiden Kreisschnitte der Elasticitätsfläche parallel ist. Denn in den Fällen ist für die in den Krystall eintretenden Schwingungen keine Richtung einer grössten und kleinsten Elasticität vorhanden, sondern für alle Schwingungen ist die Elasticität die gleiche. Es tritt demnach keine Spaltung der Wellen ein, sondern in der Richtung der Normale für Kreisschnitte pflanzt sich nur eine Welle mit der Geschwindigkeit

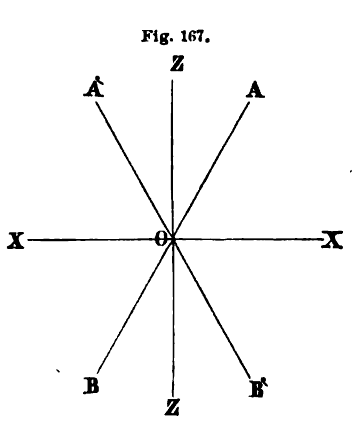
$$v = A \,.\, b$$

durch den Krystall fort. Da wir nun die Richtung in einem Krystall, in welchem sich nur eine Welle durch den Krystall fortpflanzt, als optische Axe definirten, so folgt, dass die auf den Kreisschnitten senkrechten Richtungen optische Axen sind, dass also die Krystalle, welche diese Elasticitätsfläche besitzen, zwei optische Axen haben. Da die Kreisschnitte immer zu der Ebene senkrecht sind, welche die grösste und kleinste Axe der Elasticitätsfläche in sich enthält, so folgt, dass ihre Normalen oder die optischen Axen immer in der durch die Axen der grössten und kleinsten Elasticität bestimmten Ebene liegen, oder dass eine durch die beiden optischen Axen gelegte Ebene immer die Axen der grössten und kleinsten Elasticität in sich aufnimmt, während die Axe der mittlern Elasticität auf dieser Ebene senkrecht steht.

Da ferner, wie aus der Ableitung der Kreisschnitte unmittelbar hervorgeht, die beiden Kreisschnitte mit der durch die Axe der mittlern und klei-

nern Elasticität gelegten Ebene gleiche Winkel einschliessen, so folgt weiter, dass die Axe der kleinern Elasticität den einen der von den beiden optischen Axen eingeschlossenen Winkel halbirt. Da nun die Axe der grössten Elasticität mit den drei soeben betrachteten Richtungen in einer Ebene liegt und auf der Axe der kleinsten Elasticität senkrecht steht, so folgt, dass die Axe der grössten Elasticität den andern der von den optischen Axen gebildeten Winkel halbirt. Welche dieser beiden Halbirungslinien aber die Axe der grössten und kleinsten Elasticität ist, d. h. wenn AB und $A'B'$ (Fig. 167) die optischen Axen eines Krystalles sind, ob die Halbirungslinie des stumpfen Winkels OX oder die des spitzen Winkels OZ die Axe der kleinsten Elasticität ist, das hängt ab von dem Verhältniss der mittlern Elasticitätsaxe zu den beiden andern. Liegt der Werth von b näher bei dem von a als von c, so liegen die Kreisschnitte offenbar näher bei der durch die Axe der grössern und mittlern Elasticität gelegten Ebene, die optischen Axen nähern sich daher der Axe der kleinsten Elasticität, diese halbirt den spitzen Winkel der beiden Axen. Krystalle, bei welchen das der Fall ist, nennt man optisch positive. Wenn dagegen die Axe der mittlern Elasticität derjenigen der kleinsten Elasticität näher liegt, so liegen die Kreisschnitte dieser Axe, ihre Normalen der grössern Axe näher. Der spitze Winkel der beiden optischen Axen wird deshalb dann von der Axe der grössten Elasticität halbirt, und der stumpfe von derjenigen der kleinsten Elasticität. Solche Krystalle nennt man negative.

Fig. 167.



Ohne Rücksicht darauf, welche die Axe der grössten, welche diejenige der kleinsten Elasticität ist, nennt man die Halbirungslinie des spitzen Winkels der beiden optischen Axen, die erste, jene des stumpfen Winkels die zweite Mittellinie des Krystalles.

Wenn nun in einem Krystalle die optischen Axen durch Beobachtung gegeben sind, so ist man im Stande die zur Construction der Elasticitätsfläche des Krystalles nothwendigen Constanten a, b, c zu erhalten. Jede derselben ist der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes, dessen Schwingungen der einen der drei Elasticitätsaxen parallel sind, proportional. Man kann daher die Grössen bestimmen, dadurch, dass man die Brechungsexponenten der Wellen bestimmt, welche sich parallel den Hauptschnitten der Elasticitätsfläche fortpflanzen. Wenn die Wellen senkrecht zum Hauptschnitt XZ sind, so ist immer eine Axe des mit der Welle parallelen diametralen Hauptschnittes die Axe b; welche Neigung also auch die Wellennormale gegen die Axe X oder Z habe, die eine der beiden Wellen pflanzt sich mit der constanten Geschwindigkeit Ab fort. Von den beiden Wellen, in welche

sich eine einfallende Welle zerlegt, deren Normale in die durch die beiden optischen Axen gelegte Ebene fällt, pflanzt sich also eine nach dem gewöhnlichen Brechungsgesetz für isotrope Mittel fort. Wenn man demnach aus einem zweiaxigen Krystall ein Prisma schleift, dessen Grenzflächen senkrecht sind zur Ebene der optischen Axen, dessen brechende Kante somit parallel ist der Axe der mittlern Elasticität, wenn man dann in einer zur brechenden Kante senkrechten Ebene einen Lichtstrahl durch dieses Prisma gehen lässt, so wird dieser Lichtstrahl in zwei zerlegt, von denen der eine dem gewöhnlichen Brechungsgesetze folgt. Bestimmt man den Brechungsexponenten desselben nach der im ersten Abschnitte auseinandergesetzten Methode, so ist die mittlere Axe b der Elasticität dem reciproken Werthe dieses Brechungsexponenten proportional. Denn bezeichnen wir den Brechungsexponenten mit β, die Geschwindigkeit des Lichtes in der Luft mit v, diejenige im Krystall mit v_b, so ist

$$\beta = \frac{v}{v_b},$$

und da nach §. 81

$$v_b = A \,.\, b,$$

so ist

$$b = \frac{v}{A \,.\, \beta} = \frac{C}{\beta}.$$

Schleifen wir aus dem Krystall ein zweites Prisma, dessen Seiten mit der ersten Mittellinie der optischen Axen parallel sind, dessen brechende Kante senkrecht ist zur zweiten Mittellinie, so werden alle Strahlen, welche wir in einer zur brechenden Kante senkrechten Ebene in das Prisma eintreten lassen, in zwei zerfallen, von denen der eine nur Schwingungen besitzt, welche zur ersten Mittellinie parallel sind, welches auch im Uebrigen die Neigung der einfallenden Strahlen gegen das Einfallsloth ist. Ist die erste Mittellinie die kleinste Axe c, so erhalten wir den Werth derselben aus dem reciproken Werthe des Brechungsexponenten γ dieses den gewöhnlichen Brechungsgesetzen folgenden Strahles wie oben

$$c = \frac{C}{\gamma}.$$

Um den dritten Hauptbrechungsexponenten α und aus diesem die Elasticitätsaxe a durch den Versuch zu bestimmen, bedarf es noch eines dritten Prisma, dessen Seiten der zweiten Mittellinie der optischen Axen parallel sind, dessen brechende Kante also mit dieser zusammenfällt. Ein Lichtstrahl, welcher in einer zur brechenden Kante senkrechten Ebene in das Prisma eintritt, zerfällt dann in zwei. Die Schwingungen des einen sind immer der zweiten Mittellinie also der Elasticitätsaxe a parallel; dieser Strahl hat demnach den constanten Brechungsexponenten α, und aus dem gemessenen Werthe ergibt sich

$$a = \frac{C}{\alpha},$$

so dass wir aus diesen drei Brechungsexponenten für die drei Axen die zusammengesetzte Proportion erhalten

$$a : b : c = \frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\beta} : \frac{1}{\gamma}.$$

Man sieht demnach, wie es zur Bestimmung der optischen Constanten eines zweiaxigen Krystalles, das heisst derjenigen Grössen, welche zur Bestimmung der Brechung des Lichtes in demselben nothwendig gekannt sein müssen, zunächst der Kenntniss der Ebene bedarf, welche die optischen Axen aufnimmt, und in dieser die Richtung der Axen selbst. Bei den Krystallen des isoklinischen Systemes bedarf es dieser nicht, da bei diesen die Richtung der Elasticitätsaxen mit derjenigen der krystallographischen Axen zusammenfällt, man also nur drei Prismen herzustellen braucht, deren brechende Kanten den drei krystallographischen Axen parallel sind. Man kann daher bei diesen Krystallen aus den beobachteten Werthen α, β, γ die Lage und Neigung der Axen bestimmen.

Bei den beiden andern Systemen dagegen fallen die optischen und krystallographischen Hauptrichtungen nicht zusammen, es bedarf deshalb hier immer zunächst einer Untersuchung über die Lage und Neigung der Axen. Das bequemste Mittel dafür liefern die Interferenzerscheinungen in Platten solcher Krystalle, welche wir im nächsten Kapitel betrachten werden.

§. 85.

Wellenfläche in zweiaxigen Krystallen. Durch die im vorigen Paragraphen vollständig bestimmte Fläche, welche uns die Elasticität des Aethers in einem zweiaxigen Krystalle nach jeder beliebigen Richtung liefert, sind wir im Stande, sowohl die Wellen als auch die Strahlen zu erhalten, welche in einem zweiaxigen Krystalle auftreten, wenn eine Lichtwelle in einen solchen Krystall eintritt.

Es ist dazu nur nothwendig, dass wir ähnlich wie in §. 81 die Wellenfläche aufsuchen, welche von den Wellenebenen stets berührt wird. Wenn es nun auch eine grössere Schwierigkeit bietet, die Rechnungen hier wie dort durchzuführen, da wir hier keine Rotationsfläche vor uns haben, in welcher alle Schnitte gleichwerthig sind, so ist es doch leicht, den allgemeinen Charakter der Wellenfläche zu erkennen und die Hauptschnitte derselben vollständig zu construiren.

Von dem Punkte im Innern des Krystalles aus, welcher der Mittelpunkt einer Wellenbewegung ist, pflanzen sich nach jeder Richtung zwei Wellen mit verschiedener Geschwindigkeit fort; jede dieser Wellen ist Tangentialebene an der Wellenfläche, die letztere muss demnach, ähnlich wie diejenige der einaxigen Krystalle aus zwei Theilen oder zwei Schalen bestehen, eine innere und eine äussere; die langsamer sich fortpflanzenden Wellen sind Tangentialebenen an der innern, die rascher sich fortpflanzenden Tangentialebenen an der äussern Schale. Die beiden Schalen können aber nicht, wie bei

den einaxigen Krystallen ganz in einander liegen und nur die beiden Endpunkte eines Durchmessers gemeinsam haben, da diese Krystalle zwei optische Axen haben, also von dem Mittelpunkte aus nach vier Richtungen hin, von denen je zwei eine gerade Linie bilden, sich die beiden Wellen mit gleicher Geschwindigkeit oder überhaupt nur eine Welle fortpflanzt. Diese Wellen müssen also Tangentialebenen an beiden Schalen zugleich sein.

Soweit es überhaupt möglich ist den Charakter der Wellenfläche ohne verwickelte Rechnung zu erhalten, erkennt man denselben aus der Betrachtung ihrer Hauptschnitte, das heisst der Curven, in welchen sie geschnitten wird durch die Ebenen, welche wir durch je zwei Axen der Elasticitätsfläche legen. Diese Schnitte geben uns zugleich an, wie weit sich die Lichtschwingungen gleichzeitig in diesen Ebenen ausbreiten.

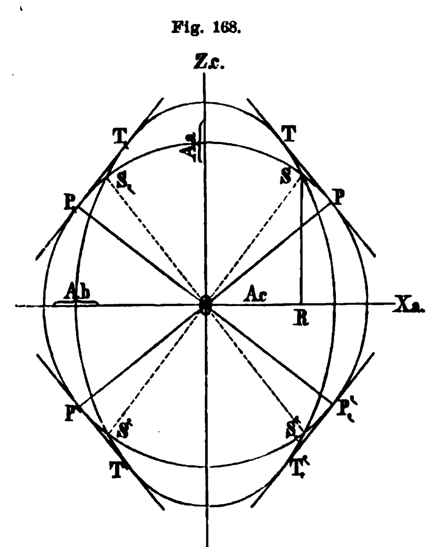
Wir erhalten sie durch eine Construction und Rechnung, welche derjenigen des §. 81 für die Wellenfläche in einaxigen Krystallen genau gleich ist.

Nehmen wir zunächst an, es pflanze sich eine Lichtbewegung parallel einer in der Ebene der optischen Axen, also in einer durch die Elasticitätsaxen a und c gelegten Ebene, liegenden Richtung fort. War die einfallende Lichtwelle unpolarisirt, so zerfällt sie nach ihrem Eintritt in den Krystall in zwei, von denen die eine parallel der mittlern Elasticitätsaxe, welche zur Fortpflanzungsrichtung senkrecht ist, ihre Schwingungen vollführt, unter welchem Winkel gegen die eine oder andere Axe die Richtung der Fortpflanzung auch geneigt ist. Diese Wellen pflanzen sich demnach mit constanter Geschwindigkeit nach allen in der Ebene XZ gelegenen Richtungen fort; sie sind nach allen Richtungen immer gleichzeitig gleichweit vom Anfangspunkt O und zwar um die Grösse

$$c = A \, . \, b$$

nach der Zeit $t = 1$ entfernt. Es folgt daraus, dass alle einen Kreis, den wir um O mit dem Radius $A . b$ (Fig. 168) beschreiben, berühren; und daraus dann weiter, dass dieser Kreis der Durchschnitt der Wellenfläche mit der Ebene XZ, derjenigen der optischen Axen, ist.

Fig. 168.



Die Schwingungen der zweiten der Wellen, in welche die eintretende Welle sich zertheilt, geschehen in der Ebene XZ und zwar, wenn die Richtung der Fortpflanzung mit der Axe c einen Winkel φ bildet, in einer Richtung, welche mit der Axe c den Winkel $90^0 - \varphi$, mit der Axe a den

Winkel φ bildet. Die Elasticität des Aethers nach dieser Richtung ist durch den Halbmesser r der Elasticitätsfläche gegeben und dieser ergibt sich aus

$$r^2 = a^2 \cdot \cos^2 \varphi + c^2 \cdot \sin^2 \varphi.$$

Dieser Ausdruck fällt zusammen mit demjenigen, welcher die Elasticität des Aethers für die Schwingungen der ausserordentlichen Strahlen im einaxigen Krystalle bestimmte; die Fortpflanzungsverhältnisse der Wellen, deren Schwingungen in der durch die Axen a und c gelegten Ebene geschehen, müssen demnach ganz dieselben sein, welche wir für eine beliebige Ebene in einem einaxigen Krystall erhielten. Die Durchschnitte der zu dieser Ebene senkrechten Wellenebenen mit dieser Ebene müssen demnach Tangenten an einer Ellipse sein, die um O mit den Axen $OZ = A \cdot a$ und $OX = A \cdot c$ beschrieben ist, also an einer Ellipse, welche durch die Gleichung dargestellt wird

$$\frac{Z^2}{A^2 a^2} + \frac{X^2}{A^2 c^2} = 1.$$

Denn parallel der Axe OX pflanzt sich das Licht in der Zeiteinheit um die Strecke Ac, parallel der Axe OZ um Aa fort.

Diese Ellipse ist demnach auch der Durchschnitt der einen Schale der Wellenfläche durch die Ebene ac. Die Wellenfläche wird also von dieser Ebene in einem Kreise und einer Ellipse geschnitten, von einem Kreise, dessen Radius Ab ist und von einer Ellipse, deren Mittelpunkt in den des Kreises fällt, und deren grosse Axe $OZ = Aa$, deren kleine Axe $OX = Ac$ ist.

Da nun $a > b > c$ ist, und somit auch $Aa > Ab > Ac$ ist, so folgt, dass der Radius des Kreises grösser als die kleine und kleiner als die grosse Axe der Ellipse ist. Die beiden Kurven, Kreis und Ellipse schneiden sich daher in vier Punkten S, S', $S_{,}$, $S_{,}'$, welche je zwei an den entgegengesetzten Endpunkten eines Kreisdurchmessers und symmetrisch zu den Axen a und c liegen, so dass die Verbindungslinien SS' und $S_{,}S_{,}'$ mit den Axen c und a gleiche Winkel einschliessen.

Für diejenigen Wellenebenen, welche den Kreisschnitten der Elasticitätsfläche parallel sind, ist die Elasticität des Aethers gleich b, ihr Abstand vom Anfangspunkt nach der Zeiteinheit also gleich Ab. Der Abstand der mit dieser Wellenebene parallel an die Ellipse gelegten Tangente von O ist also gleich dem Radius des Kreises, und somit ist diese Tangente auch Tangente des Kreises und zwar berührt sie den Kreis in dem Punkte P, wo die von O aus auf die Tangente herabgelassene Senkrechte die Tangente trifft.

Die durch diese Tangenten gelegten Wellenebenen sind also zugleich Tangentialebenen der innern und äussern Schale der Wellenfläche; nach der Richtung ihrer Normalen pflanzt sich also jedesmal nur eine Welle fort; die Richtung der letztern ist also diejenige der optischen Axen. Die Richtung der optischen Axen ist also durch die Normalen der Tangenten bestimmt, welche zugleich die Ellipse und den Kreis berühren.

Mit Hülfe dieses Satzes sind wir im Stande, aus den drei Hauptbrechungsexponenten, oder den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes parallel den drei Elasticitätsaxen den Winkel zu bestimmen, den die beiden optischen Axen mit einander bilden. Dieser Winkel ist doppelt so gross als der Winkel, den jede der optischen Axen mit der Axe c bildet. Bezeichnen wir letztern mit Z, so ist nach §. 81 der Abstand der den beiden Curven gemeinschaftlichen Tangente von dem Punkte O nach der Zeiteinheit

$$d = \sqrt{A^2 c^2 \, . \, \sin^2 Z + A^2 a^2 \, . \, \cos^2 Z}.$$

Da nun die Tangente auch den mit dem Radius Ab beschriebenen Kreis berührt, so ist zugleich $d = A \, . \, b$ und somit

$$b^2 = c^2 \, . \, \sin^2 Z + a^2 \cos^2 Z = c^2 + (a^2 - c^2) \, . \, \cos^2 Z,$$

$$\cos^2 Z = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}.$$

Der Winkel, welchen die beiden optischen Axen mit einander bilden, ist dann $2Z$. Der Cosinus des Winkels, den die optischen Axen mit der Elasticitätsaxe a bilden, ist dann der Sinus dieses Winkels; bezeichnen wir denselben mit X, so ist

$$\cos^2 X = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}.$$

In ebenderselben durch die Axen a und c gelegten Ebene liegen nun auch die beiden früher erwähnten secundären optischen Axen, die beiden Richtungen, in welchen zu mehreren Wellenebenen nur ein Strahl gehört. Wir definirten früher als Strahlen die Verbindungslinien der Wellenmittelpunkte mit den Berührungspunkten der zu den Strahlen gehörigen Wellenebenen. So sind OP und OT die zur Wellenebene PT gehörigen Strahlen, so dass den ungetheilten in der Richtung der optischen Axe sich fortpflanzenden Wellen mehrere Strahlen angehören.

In dem Punkte S nun, in welchem Kreis und Ellipse sich schneiden, lässt sich sowohl eine Tangente an den Kreis als auch an die Ellipse legen; die Linie OS ist also sowohl für die eine als auch die andere der durch diese Tangenten gelegten zur Ebene ab senkrechten Wellenebenen der zugehörige Strahl, die Richtungen OS sind also die optischen Axen für Strahlen, oder die secundären optischen Axen.

Um den Winkel zu erhalten, welchen die secundären optischen Axen mit einander bilden, haben wir nur die Länge OS des in die Richtung der optischen Axe fallenden Halbmesser der Ellipse ZSS' zu bestimmen.

Wir haben für dieselbe

$$OS^2 = OR^2 + SR^2 = x^2 + z^2.$$

Da S ein Punkt der Ellipse ist, so ist

$$\frac{x^2}{A^2 c^2} + \frac{z^2}{A^2 a^2} = 1; \quad z^2 = A^2 a^2 - \frac{A^2 a^2}{A^2 c^2} \cdot x^2.$$

Nennen wir nun den Winkel, welchen OS mit der Axe Z bildet, $ZOS = Z_1$, so ist

$$x = OR = OS \,.\, \sin Z_1.$$

Setzen wir diese Werthe von z und x in die Gleichung für OS, so wird

$$OS^2 = OS^2 \,.\, \sin^2 Z_1 + A^2 a^2 - \frac{A^2 a^2}{A^2 c^2} \cdot OS^2 \cdot \sin^2 Z_1,$$

$$OS = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 Z_1}{A^2 a^2} + \frac{\sin^2 Z_1}{A^2 c^2}}}.$$

Nun ist OS zugleich Radius des Kreises, also gleich $A \,.\, b$.

Daraus folgt

$$\frac{A^2 b^2 \,.\, \cos^2 Z_1}{A^2 a^2} + \frac{A^2 b^2 \,.\, \sin^2 Z_1}{A^2 c^2} = 1$$

oder

$$\cos^2 Z_1 = \frac{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}}.$$

In ähnlicher Weise erhält man für den Winkel $SOX = X_1$

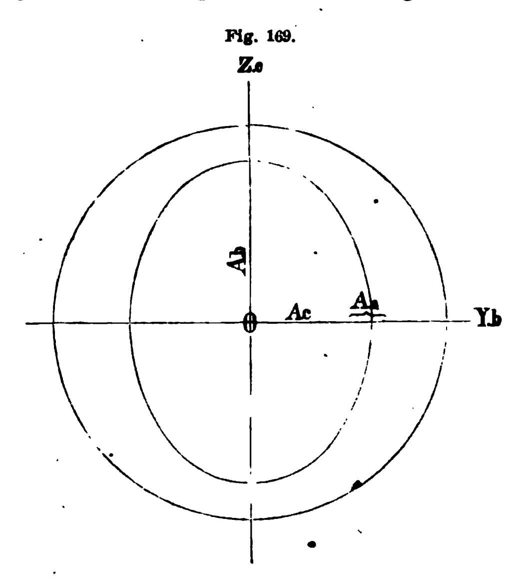
$$\cos^2 X_1 = \frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}},$$

so dass also die Winkel, welche die secundären optischen Axen mit den Axen a oder c, oder mit einander bilden, einfach dadurch erhalten werden, dass wir in den Ausdrücken für die wahren optischen Axen anstatt der Quadrate der Halbaxen der Elasticitätsfläche deren reciproke Werthe einsetzen. Wie man somit die Richtung der secundären optischen Axen ebenfalls aus den Versuchen berechnen kann, ist unmittelbar klar.

Pflanzt sich eine Lichtwelle in einer durch die Axe der mittlern Elasticität b und der kleinsten Elasticität c gelegten Ebene fort, so wird sich dieselbe in zwei senkrecht zu einander polarisirte Wellen zerspalten, von denen die eine ihre Schwingungen parallel der Axe der grössten Elasticität vollführt, welches auch die Richtung ist, in welcher die Welle sich fortpflanzt. Diese Wellen pflanzen sich daher mit der constanten Geschwindigkeit Aa fort, und nach der Zeiteinheit berühren die Durchschnitte der Wellen mit der Ebene ab einen mit dem Radius Aa beschriebenen Kreis Fig. 169, dieser Kreis ist somit der Durchschnitt der äussern Schale der Wellenfläche mit der Ebene, welche von den Elasticitätsaxen b und c, der mittlern und der kleinsten, bestimmt wird. Der zweite Durchschnitt oder derjenige der innern Schale ist, wie man durch ganz analoge Betrachtungen wie vorhin erhält, eine Ellipse, deren grosse Axe Ab in die Elasticitätsaxe c, deren kleine Ac in die Elasticitätsaxe b fällt. Diese Ellipse wird vollständig von dem Kreise umschlossen, ohne dass sie nur einen Punkt gemein haben. Diese beiden Curven haben daher weder

eine gemeinsame Tangente, noch auch für mehrere Tangenten eine gemeinsame Verbindunglinie des Mittelpunktes mit dem gemeinsamen Berührungs-

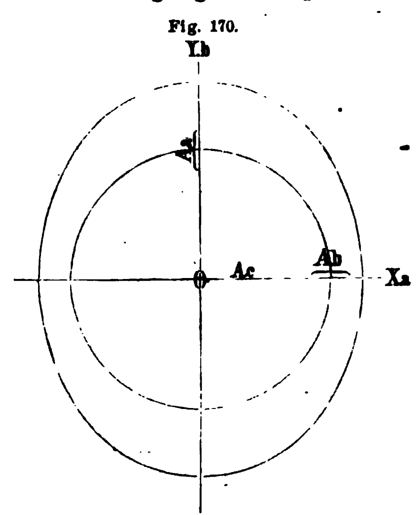
Fig. 169.



punkte. Es pflanzen sich daher nach jeder Richtung zwei Wellen und zwei Strahlen fort.

Wendet man ganz dieselben Betrachtungen auf den dritten durch die Wellenfläche gelegten Hauptschnitt an, welcher durch die Axen a und b der grössten und mittlern Elasticität bestimmt ist, so sieht man, dass zunächst die innere Schale durch einen Kreis geschnitten wird vom Radius Ac, da für die senkrecht gegen diesen Schnitt erfolgenden Schwingungen die Elasticität des Aethers immer proportional c^2 ist. Die äussere Schale wird von einer Ellipse geschnitten, deren grosse Axe Aa in die Axe der mittlern Elasticität b und deren kleine Axe Ab in die Axe der grössten Elasticität a (Fig. 170) fällt. Auch in diesem Hauptschnitte haben die beiden Schalen der Wellenfläche keinen gemeinsamen Punkt.

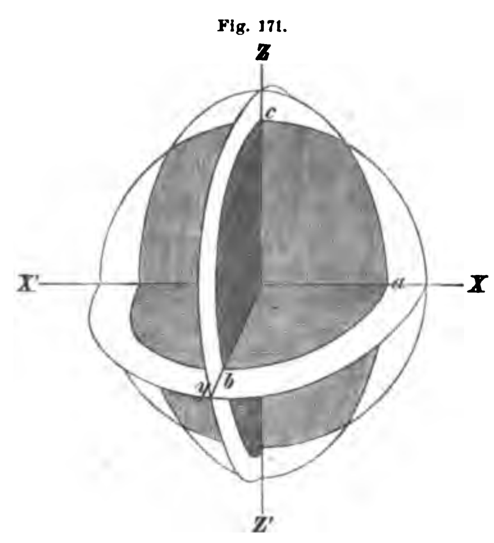
Fig. 170.



Einen Ueberblick über die Gestalt der Wellenfläche erhält man, wenn man wie in Fig. 171 die drei durch die Wellenfläche gelegten Hauptschnitte in einander fügt. Figur 171 ist perspectivisch darnach construirt. Die dr.

Hauptaxen der Elasticität sind wie bisher in das Axenkreuz X, Y, Z hineingelegt, so dass die grösste Axe a in die Axe OX, die mittlere in die Axe OY und die kleinste c in die Axe OZ gelegt ist. Dadurch kommt in die Ebene XZ der Durchschnitt durch die Wellenfläche Fig. 168 der Kreis mit dem Radius $A\,.\,b$ und die Ellipse mit den Axen $A\,.\,a$, welche in die Axe ZZ fällt, da die Elasticität senkrecht zu dieser Axe den grössten Werth a besitzt, und der Axe $A\,.\,c$, welche in der Richtung XX liegt.

Fig. 171.

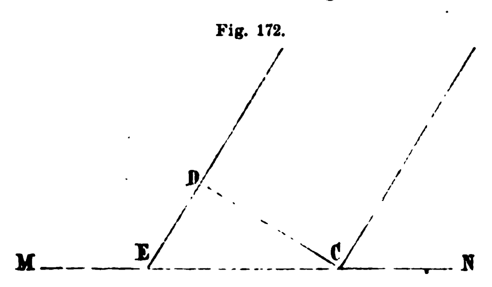


Der Durchschnitt Fig. 169, der Kreis mit dem Radius $A\,.\,a$ und der Ellipse mit den Axen $A\,.\,b$ in Z und $A\,.\,c$ in Y kommt in die Ebene YZ zu liegen, welche die Elasticitätsaxen b und c in sich aufnimmt.

Der Durchschnitt Fig. 170 kommt in die Horizontalebene XY zu liegen, der Kreis mit dem Radius $A\,.\,c$ als Durchschnitt durch die innere Schale und die Ellipse mit der in Y fallenden Axe $A\,.\,a$ und der in X liegenden Axe $A\,.\,b$ als Durchschnitt durch die äussere Schale.

Um nun die Richtung zu erhalten, nach welcher die beiden in einem zweiaxigen Krystall aus einer eintretenden Wellenebene hervorgehenden Wellen und Strahlen im Krystall sich fortpflanzen, wird man mit dieser Wellenfläche die Huyghens'sche Construction ausführen. Ist demnach Fig. 172 CD eine Wellenebene, welche die Oberfläche MN eines zweiaxigen Krystalles trifft, in dem die Richtung der optischen Axen und somit diejenige der Elasticitätsaxen bekannt ist, so muss man um den Punkt C, welcher zuerst von der eintretenden Lichtwelle getroffen wird, die Wellenfläche construiren und dann von dem Punkte E aus an die beiden Schalen derselben Tangentialebenen legen. Die Dimensionen derselben, oder die drei Axen Aa, Ab, Ac ergeben sich aus den drei Hauptbrechungsexponenten α, β, γ §. 84, indem

Fig. 172.



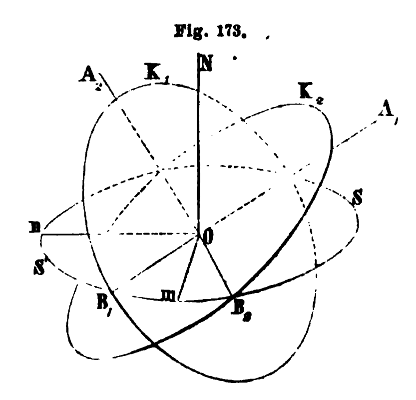
$$Aa = \frac{v}{\alpha}\,DE,\quad Ab = \frac{v}{\beta}\,DE,\quad Ac = \frac{v}{\gamma}\,DE$$

ist, da die Lichtbewegung sich nach den Richtungen der Axen um diese Strecken fortpflanzt, während sie in der Luft die Strecke *DE* zurücklegt, also während die Wellenebene vollständig in den Krystall übergeht.

Aus der complicirten Gestalt der Wellenfläche ergibt sich dann unmittelbar, dass im Allgemeinen beide gebrochenen Strahlen aus der Einfallsebene heraustreten, dass nur in seltenen Fällen einer derselben das gewöhnliche Gesetz der Brechung befolgen wird. Es würde zu weit führen, hier wie bei den einaxigen Krystallen einzelne Fälle zu betrachten [1]).

Ausser der Fortpflanzungsrichtung und Geschwindigkeit der Strahlen und Wellen bedarf es zur vollkommenen Bestimmung derselben noch der Bestimmung der Polarisationsrichtung derselben. Auch diese lässt sich, wenn man die Richtung der optischen Axen kennt, vollkommen bestimmen [2]). Sei zu dem Ende *ON* die Normale einer in den Krystall eingetretenen Welle Fig. 173 und *SS* der Schnitt, welcher der Wellenebene parallel durch die Elasticitätsfläche gelegt ist. Sind *Om* und *On* die Axen dieses Schnittes, so sind die Ebenen *NOm* und *NOn* die Oscillationsebenen der sich mit *NO* parallel fortpflanzenden Wellen. Sind nun K_1 und K_2 die Kreisschnitte der Elasticitätsfläche und OB_1 und OB_2 die Durchschnitte derselben mit der Ebene *SS'*, so ist

Fig. 173.



$$OB_1 = OB_2 = b,$$

da der Radius der Kreisschnitte die Axe der mittlern Elasticität ist. Die beiden gleichlangen Durchmesser OB_1 und OB_2 des Schnittes *SS'* sind aber gleich gegen die Axen des Schnittes geneigt, oder die Axe *Om* halbirt den spitzen Winkel, welchen OB_1 und OB_2 mit einander bilden. Die zu *Om* senkrechte Axe *On* halbirt dann den andern stumpfen Winkel, den die beiden Richtungen OB_1 und OB_2 einschliessen.

Legen wir nun durch die Normale OA_1 des Kreisschnittes K_1 und die Normale *ON* der Ebene *SS'* eine Ebene, so ist dieselbe senkrecht zu OB_1; und ebenso ist die durch *ON* und die Normale des Kreisschnittes OA_2 gelegte Ebene senkrecht zu OB_2. Diese beiden in *ON* sich schneidenden Ebenen bilden daher dieselben Winkel mit einander wie die Richtungen OB_1 und OB_2. Die Oscillationsebenen der beiden Wellen nämlich *NOm* und *NOn* halbiren also ebenso die Winkel, welche jene beiden Ebenen mit einander bilden, wie *Om* den Winkel B_1OB_2 und *On* den stumpfen Winkel der beiden gleichen

1) Man sehe einzelne Fälle in *Beer's* Einleitung in die höhere Optik.

2) *Beer*, Einleitung in die höhere Optik. p. 302.

Durchmesser halbirt. Daraus ergibt sich also für die Oscillationsrichtung der in einem zweiaxigen Krystall sich fortpflanzenden Wellen folgender Satz:

Die Oscillationsebenen der beiden einer gegebenen Richtung parallel in einem zweiaxigen Krystall sich fortpflanzenden Wellen sind die Halbirungsebenen der Winkel, welche die beiden durch jede optische Axe und die gegebene Richtung gelegten Ebenen mit einander bilden.

Wie man unmittelbar sieht, ergeben sich die Oscillationsebenen der Wellen, welche sich parallel einer in einem Hauptschnitt liegenden Richtung fortpflanzen, aus diesem Satze sofort so, wie wir sie eben ableiteten [1]).

§. 86.

Konische Refraction. Wir sahen im vorigen Paragraphen, dass eine zu einer der optischen Axen senkrechte Wellenebene den Durchschnitt, welchen man der Ebene der optischen Axen parallel durch die Wellenfläche eines zweiaxigen Krystalles legt, in zwei Punkten berührt.

Nach den Untersuchungen von W. R. Hamilton [2]) berührt nun die zu den optischen Axen senkrechte, den Kreisschnitten der Elasticitätsfläche parallele Wellenebene die Wellenfläche nicht nur in diesen Punkten, sondern in einem Kreise, dessen Durchmesser gleich ist dem Abstande *PT* (Fig. 168) der beiden Berührungspunkte in der durch die optischen Axen gelegten Ebene. Die Wellenfläche vertieft sich nämlich von allen Seiten her gegen *S* hin ähnlich wie von *P* und *T* aus; es bildet sich an dieser Stelle eine trichterförmige Vertiefung, deren oberer Rand von der durch *PT* zur Ebene der optischen Axen senkrecht gelegten Ebene berührt wird. Da nun die von dem Mittelpunkte einer Welle zu den Berührungspunkten einer Wellenebene hingezogenen Halbmesser die den Wellen zugehörigen Strahlen liefern, nach denen wir die Fortpflanzung des Lichtes wahrnehmen, so folgt, dass zu den in der Richtung der optischen Axen sich fortpflanzenden Wellen unendlich viele Strahlen gehören, welche auf dem Mantel eines Kreiskegels liegen. Wenn demnach auf eine planparallele, senkrecht zu einer der optischen Axen *AA'* Fig. 174 geschliffene Krystallplatte eine Wellenebene senkrecht auffällt, so wird diese Wellenebene ungebrochen durch den Krystall parallel der optischen Axe sich fort-

1) Ueber die Bestimmung der Wellenfläche und der Brechung in zweiaxigen Krystallen sehe man:

Fresnel, Ueber die doppelte Strahlenbrechung. Poggend. Annal. Bd. XXIII. Oeuvres complètes. T. II.

Neumann, Theorie der doppelten Strahlenbrechung. Poggend. Annal. Bd. XXV.

Stefan, Berichte der Wiener Akademie. Bd. L.

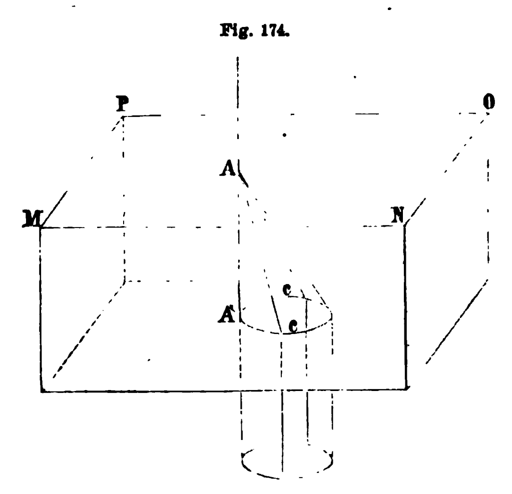
Ampère, Annales de chim. et de phys. XXXIX. p. 113. Poggend. Annal. Bd. XXX. p. 262.

Ferner eine Zusammenstellung der verschiedenen Methoden zur Ableitung der Wellenfläche. *Beer,* Einleitung in die höhere Optik. Man sehe auch *Radicke,* Handbuch der Optik. Berlin 1839.

2) *Hamilton,* Poggend. Annal. Bd. XXVIII.

pflanzen. In jedem Momente wird sie die um die Einfallsstelle A beschriebene Wellenfläche in dem Kreise CC berühren und die von der Einfallsstelle zu diesem Kreise CC gezogenen Halbmesser sind die Strahlen, in welche sich der eintretende Strahl spaltet. Im Innern des Krystalles muss daher ein einfallender Strahl sich in einen Strahlenkegel zerspalten, welcher von der Eintrittsstelle aus divergirt, dessen Basis, der Berührungskreis CC um so grösser wird, je dicker die Krystallplatte ist. Wenn nun die Welle an die zweite Grenzfläche des Krystalles ankommt, so tritt die Lichtwelle, da sie senkrecht gegen die Begrenzungsfläche im Krystall sich fortpflanzte, auch nach einer zu derselben senkrechten Richtung, also immer sich selbst parallel hervor, um nach der frühern Richtung und mit der frühern Geschwindigkeit in der Luft sich fortzupflanzen. Jeder, der im Krystall zu dieser Wellenebene gehörigen Strahlen gibt nun aber beim Uebergang der Welle in Luft zu einem gebrochenen Strahle Anlass, welcher, da die Welle sich jetzt in einem isotropen Mittel bewegt, auf der Wellenebene senkrecht ist. Aus dem Krystall tritt daher anstatt des einen in den Krystall tretenden Strahles eine unendliche Anzahl von Strahlen, welche auf dem Umfange eines Cylinders liegen, dessen Basis der Kreis CC an der zweiten Grenzfläche des Krystalles ist. In dem Innern dieses Cylinders treten keine Strahlen aus, das Innere muss also dunkel sein und somit ein in den Krystall eintretender Strahl denselben als ein Lichtring verlassen, dessen Durchmesser abhängt von der Dicke der Platte und den optischen Constanten des Mittels. Der Durchmesser dieses Ringes muss aber nach dem Austritt des Lichtes aus dem Krystall constant sein.

Fig. 174.



Was wir hier für einen in den Krystall eintretenden Strahl abgeleitet haben, muss auch für ein sehr schmales Strahlenbündel gelten; eine genauere theoretische Untersuchung zeigt, dass die Dicke des hellen Ringes derjenigen des eintretenden Bündels gleich sein muss. Ist R der Radius des Kreises CC und r der Radius des einfallenden Bündels, so ist $R + r$ der Radius des äussern, $R - r$ der des innern Umfanges des austretenden Lichtringes [1]).

Da im Innern des Krystalles der eintretende Strahl in diesem Falle in einen Kegel zerspalten wird, welcher nach dem Durchtritt als Cylinder sich

1) *Beer*, Einleitung in die höhere Optik. p. 354 ff.

fortpflanzt, so bezeichnete Hamilton diese Erscheinung als innere konische Refraction.

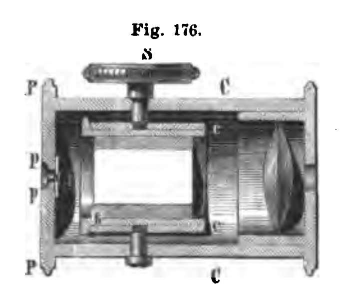
Nachdem Hamilton diese Erscheinung aus der Undulationstheorie abgeleitet hatte, gelang es Lloyd [1]) dieselbe auch experimentell am Arragonit nachzuweisen. Am leichtesten gelingt es nach der Angabe von Beer [2]) auf folgende Weise.

Der Arragonit, zum rhombischen System gehörig, krystallisirt in rhombischen Säulen (Fig. 175) *mm'*; die Winkel, in welchen sich die Säulenflächen *m* und *m'* schneiden, sind 116° 16' und 63° 44'. Die Flächen *g* nehmen die spitzen Ecken der Säule fort und die Fläche *k*, nach welcher der Krystall ziemlich deutlich spaltbar ist, schneidet die scharfen Kanten der Säule gerade ab. Die Axen des Krystalles und der optischen Elasticität sind die Axe der Säule *mm'* und die grosse und kleine Diagonale des Rhombus, den ein zur Axe senkrechter Schnitt der Säule ergibt.

Fig. 175.

In dem Arragonit ist die Axe der Säule die erste Mittellinie, die zur Fläche *k* senkrechte Diagonale die zweite, ein senkrecht zu *k* durch die Axe der Säule gelegter Schnitt ist also die Ebene der optischen Axen; diese bilden einen Winkel von 20° mit einander, also in der eben bestimmten Ebene mit der Säulenaxe einen Winkel von 10°. Schleift man daher an einen Arragonit zu jener Ebene senkrecht ein Flächenpaar an, welches mit den Ebenen *k* Winkel von 100° bildet, so stehen diese auf den optischen Axen senkrecht, eine von diesen Ebenen begrenzte Platte hat also die vorhin geforderte Eigenschaft. Man lässt die Platte recht dick und fasst sie mittels Kork in eine Hülse *h* Fig. 176, so dass die Krystallaxe der Axe des Cylinders *cc* parallel ist, in welchen die Hülse *h* hineingesteckt wird. Die Hülse *h* ist in dem Cylinder *cc* um dessen Axe drehbar, und der Cylinder kann mit dem Knopfe *S* um eine quer durch den Cylinder *CC* gehende Axe gedreht werden, an welcher er befestigt ist. Der Cylinder *CC* trägt an seinem einen Ende die Metallplatte *PP* mit der Oeffnung *pp*, hinter welche ein Staniolblättchen geklebt ist, welches in der Axe des Instrumentes ein feines Löchelchen besitzt. In dem andern Ende des Cylinders steckt eine Hülse mit Linse und Sehloch. Die Linse wird so eingestellt, dass man das durch die Doppelbrechung des Krystalles erzeugte Doppelbild der kleinen Oeffnung bei *p* scharf sieht. Durch

Fig. 176.

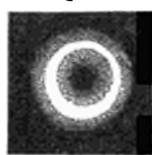


1) *Lloyd,* Poggend. Annal. Bd. XXVIII. p. 91.

2) *Beer* a. a. O. p. 364.

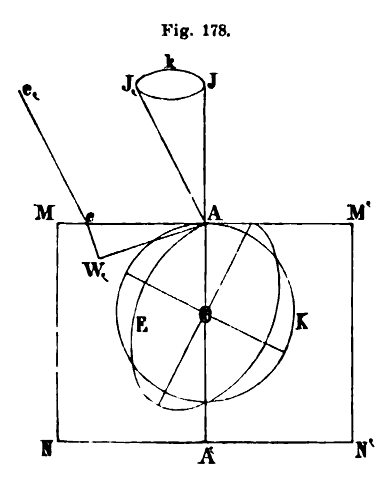
eine Drehung der Hülse *h* bringt man es nun dahin, dass, wenn der Knopf *S* gedreht wird, die beiden Bilder der Oeffnung nicht aus einer zur Axe von *S* senkrechten Ebene heraustreten; dann fällt die Ebene der optischen Axen des Krystalles mit dieser zusammen. Dreht man dann den Knopf *S* in dem einen Sinne, so sieht man, je mehr die optische Axe des Krystalles der Axe des Cylinders *CC* parallel wird, die beiden Bilder der Oeffnung sich nähern; in dem Augenblicke nun, wo sie in einander überzugehen scheinen, bildet sich der glänzende kleine Lichtring Fig. 177 mit dunkler Mitte, dessen Dicke der Grösse der beiden Bilder der Oeffnung gleich ist. Auch ohne Linse kann man denselben schon wahrnehmen und sich so auch überzeugen, dass derselbe nicht weiter wird, wenn das Auge sich von dem Krystall entfernt.

Fig. 177.



Noch eine zweite Art der konischen Refraction hat Hamilton[1]) aus einer genaueren Untersuchung der Wellenfläche abgeleitet und Lloyd[2]) durch den Versuch am Arragonit nachgewiesen, die äussere konische Refraction. Dieselbe tritt dann ein, wenn ein schmales Strahlenbündel einen zweiaxigen Krystall in der Richtung der secundären optischen Axen durchstrahlt. An den Punkt *S* (Fig. 168) des Hauptschnittes lassen sich zwei zum Hauptschnitte senkrechte Tangentialebenen an die Wellenfläche legen, denen beiden der Strahl *OS* angehört, und das Gleiche gilt für alle durch *OS* gelegten Schnitte, so dass an dem Punkte *S* eine unendliche Anzahl von Tangentialebenen gelegt werden kann, und für alle diese die Gerade *OS* der Halbmesser ist, welcher den Mittelpunkt der Wellenfläche mit dem Berührungspunkt verbindet.

Fig. 178.



Denken wir uns daher auf irgend eine Weise im Innern eines zweiaxigen Krystalles *MN* (Fig. 178) eine Lichtbewegung im Punkte *O* erregt. AA_1 sei die Richtung einer secundären Axe senkrecht zur Grenzfläche MM_1 und *MN* ein Schnitt, welcher der Ebene der optischen Axen parallel durch den Krystall gelegt ist. Der Durchschnitt der Wellenfläche mit dieser Ebene ist dann der Kreis *K* und die Ellipse *E*. Dem Strahl *OA* gehört dann in diesem Hauptschnitt als Wellenebene an, erstens die Ebene, welche die im Punkte *A* an den Kreis *K* gezogene mit *AM* paralle Tangente senkrecht zur Schnittebene *MN* gelegt wird, und zweitens jene Ebene, welche durch die Tangente AW_1, die in demselben

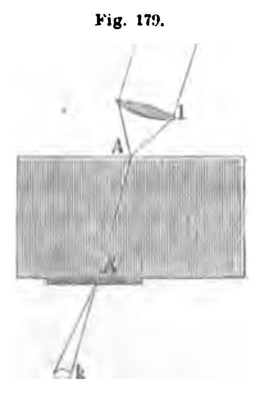
1) *Hamilton*, Poggend. Annal. Bd. XXVIII.
2) *Lloyd*, Poggend. Annal. Bd. XXVIII.

Punkte A an die Ellipse E gezogen ist, senkrecht zur Schnittebene MN gelegt wird. Jede dieser Wellenebenen tritt durch MM' in das isotrope Mittel aus; die erstere, welche der brechenden Fläche parallel ist, tritt parallel mit sich selbst nach AJ aus, die zweite, welche gegen die brechende Fläche geneigt ist, wird in der Richtung $W_1 e e_1$ gebrochen, sie pflanzt sich in der Luft von A aus nach AJ_1 fort. Diesen beiden Wellen entsprechen die beiden Strahlen AJ und AJ_1, welche von A aus divergiren. Ganz dasselbe, was von diesem Schnitt der Wellenfläche gilt, gilt für alle übrigen, und so tritt bei A das auf einem Kegelmantel, dessen Basis der Kreis k ist, liegende Strahlenbündel aus. Im Innern des Kegels befinden sich keine Strahlen, dasselbe ist dunkel; es tritt also bei A ein Lichtring aus, der immer breiter wird, je weiter man sich von MM entfernt, wenn man die ganze Oberfläche des Krystalles mit einer undurchsichtigen Platte bedeckt und nur bei A senkrecht über O eine kleine Oeffnung macht.

Wenn man nun auf diese Oeffnung von aussen ein konisches Strahlenbündel, dessen Basis der Kreis k ist, leitet, so werden die Wellenebenen, welche den auf dem Kegelmantel liegenden Strahlen angehören, so gebrochen, dass ihre Strahlen im Krystall sämmtlich in der Richtung AO sich fortpflanzen und dann wird bei A', an dem andern Endpunkte der optischen Axe, ein eben solcher Strahlenkegel den Krystall verlassen und als ein Lichtring der beschriebenen Art wahrgenommen werden, wenn man bis auf den Punkt A' die ganze Fläche NN undurchsichtig macht.

In dieser Weise nun hat Lloyd in der That die äussere konische Refraction nachgewiesen in einer Arragonitplatte, welche senkrecht gegen die erste Mittellinie geschliffen war, in welcher somit, wie wir sogleich zeigen werden, die secundären optischen Axen mit dem Einfallslothe einen Winkel von $9^0\ 56'\ 27''$ bilden. Er concentrirte mit einer Linse ein Bündel paralleler Sonnenstrahlen, so dass es als ein Strahlenkegel nach dem Punkte A der Oberfläche des Krystalles convergirte, und verschob auf der andern Seite des Krystalles ein mit einer feinen Oeffnung versehenes Metallblättchen und fand dann, wenn die Richtung AA' mit dem Einfallslothe einen Winkel von ungefähr 10^0 bildete, dass aus der Oeffnung A' ein Strahlenkegel der beschriebenen Art hervorging. Der Durchmesser desselben wurde um so grösser, je weiter der Schirm, auf welchem er den Ring projiciren liess, von dem Krystall entfernt wurde.

Fig. 179.



§. 87.

Optische Constanten zweiaxiger Krystalle. Damit ein zweiaxiger Krystall in optischer Beziehung vollständig bestimmt ist, bedarf es der

Kenntniss der Richtung und Grösse der Axen der Elasticitätsfläche, oder da die letztere den Hauptbrechungsexponenten umgekehrt proportional ist, der Kenntniss dieser. Kennt man diese Daten, so ist die Wellenfläche zu construiren, somit die Lichtbewegung im Innern des Krystalles vollkommen bestimmt.

Die Richtung der Elasticitätsaxen ist bei den zweiaxigen Krystallen nicht so einfach zu bestimmen, wie bei den einaxigen, wo sie immer mit den krystallographischen Axen gleiche Richtung haben; von den zweiaxigen Krystallen ist das nur der Fall bei den dem rhombischen System angehörigen. Die vollständig bekannten Krystalle gehören daher auch diesem Systeme an. Die optischen Axen liegen immer in einer durch zwei Krystallaxen bestimmten Ebene und symmetrisch zu den Axen des Krystalles, da die Elasticitätsaxen immer in den letztern liegen. Der Winkel zwischen den optischen Axen ist aber oft für verschiedene Farben verschieden, das heisst die Richtung der optischen Axen ist für die verschiedenen Farben eine andere. Die Aenderung in der Lage der Axe ist meist nur klein und immer stetig, so dass die Winkel der Axen für die brechbareren Strahlen immer kleiner oder grösser sind.

Wir lassen hier die Angaben für einige Krystalle folgen und bezeichnen dem §. 84 gemäss den kleinsten Brechungsexponenten mit α, den grössten mit γ, den mittlern mit β.

Arragonit [1]). Für Strahlen mittlerer Brechbarkeit ist

$$\alpha = 1{,}532;\ \beta = 1{,}686;\ \gamma = 1{,}690.$$

Daraus berechnet sich der Winkel, welchen die optischen Axen mit der Axe der kleinsten Elasticität c einschliessen, $Z = 80^0\ 58'$, derjenige mit der Axe der grössten Elasticität X zu $9^0\ 2'$. Die Axe der grössten Elasticität ist also die erste Mittellinie, der Krystall nach der Bezeichnungsweise des §. 84 ein optisch negativer. Der Winkel der optischen Axen ist $18^0\ 4'$. Für rothe Strahlen ist er kleiner $17^0\ 59'$, für violette grösser $18^0\ 27'$.

Der Winkel der secundären optischen Axen wird nach §. 85 für Strahlen mittlerer Brechbarkeit $19^0\ 53'$.

In welche der Krystallaxen die einzelnen Elasticitätsaxen fallen, ist im vorigen Paragraphen angegeben.

Topas [2]). Für Strahlen mittlerer Brechbarkeit ist

$$\alpha = 1{,}6145;\ \beta = 1{,}6166;\ \gamma = 1{,}6240.$$

Der Winkel der optischen Axen mit derjenigen der kleinsten Elasticität wird daraus $Z = 28^0\ 29'$, die Axe der kleinsten Elasticität ist also hier die erste Mittellinie, der Krystall ein positiver, der Winkel der optischen Axen $56^0\ 58'$. Er nimmt vom rothen Ende des Spectrums zum violetten hin ab. Der Winkel der secundären optischen Axen ist $56^0\ 42'$.

1) *Rudberg,* Poggend. Annal. Bd. XVII.
2) *Rudberg* a. a. O.

Der Topas krystallisirt in rhombischen Säulen, an denen als Stammform Prismenflächen auftreten, welche einen Winkel von $124^0\ 19'$ mit einander bilden. Die erste Mittellinie ist der Axe der Säule, die zweite der Makrodiagonale des erwähnten Prisma parallel.

Salpeter[1]). Für Strahlen mittlerer Brechbarkeit ist

$$\alpha = 1{,}333;\ \beta = 1{,}5046;\ \gamma = 5052.$$

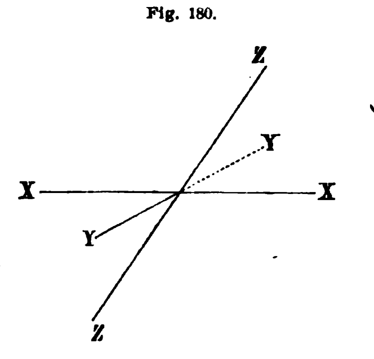
Daraus wird $Z = 86^0\ 55'$, der Krystall ist somit negativ, die Axe der grössten Elasticität ist die erste Mittellinie, der spitze Winkel der optischen Axen ist $6^0\ 10'$.

Die Krystallform des Salpeter ist derjenigen des Arragonites gleich und auch bei ihm ist die Säulenaxe die erste Mittellinie und die Makrodiagonale des Rhombus *mm* Fig. 175 die zweite Mittellinie.

Die Richtung der Elasticitätsaxen für die Krystalle der beiden andern Systeme lässt sich nicht aus der Krystallform bestimmen, sondern nur dadurch, dass man die optischen Axen aufsucht. Bei den klinorhomboidischen Krystallen hat sich noch gar keine allgemeine Beziehung zwischen den optischen und krystallographischen Hauptrichtungen auffinden lassen. Für die klinorhombischen gelten folgende Sätze.

Diesem System liegt ein Axenkreuz X, Y, Z Fig. 180 zu Grunde, von denen die Axe Y auf der Ebene der beiden andern senkrecht steht; diese, die Axe der Symmetrie, ist immer eine Elasticitätsaxe, die beiden andern Axen fallen daher in die Ebene XZ, ihre Richtung aber lässt sich aus den krystallographischen Verhältnissen nicht bestimmen.

Fig. 180.



Die Ebene der optischen Axen liegt nun entweder senkrecht auf der symmetrischen Ebene XZ oder sie fällt mit dieser Ebene zusammen.

In allen Fällen haben die optischen Axen der verschiedenen Farben verschiedene Richtungen. Steht die Ebene der optischen Axen auf XZ senkrecht, so kann die Axe Y erste oder zweite Mittellinie sein. Ist sie erste Mittellinie, so ändert die zweite in YZ liegende ihre Lage von Farbe zu Farbe; die Ebene der optischen Axen dreht sich um die Axe Y, wenn man von der einen Farbe zur andern übergeht, indem die in die Ebene der Symmetrie fallenden Elasticitätsaxen eine für die verschiedenen Farben verschiedene Lage haben. Ist die Axe der Symmetrie für alle Farben die zweite Mittellinie, so ändert die erste Mittellinie ihre Lage von Farbe zu Farbe.

1) *Miller,* Poggend. Annal. Bd. XXXVII.

Wenn die optischen Axen in die Ebene XZ fallen, so ist die erste Mittellinie für die verschiedenen Farben meist verschieden gelegen; da nun auch meist der Winkel, den die optischen Axen mit einander bilden, verschieden ist, so liegen die Axen um die Mittellinie für die Strahlen mittlerer Brechbarkeit nicht symmetrisch; es liegen daher im Allgemeinen in dem einen Axenbündel die Axen der brechbarern, in dem andern die der weniger brechbaren Strahlen der Mittellinie näher; und die Bündel, in welche die optischen Axen aus einander treten, sind verschieden gross [1]).

Viertes Kapitel.

Interferenz des polarisirten Lichtes.

§. 88.

Fresnel-Arago's Gesetze der Interferenz polarisirten Lichtes. Die beiden Lichtstrahlen, in welche das Licht bei seinem Durchtritt durch einen doppelbrechenden Krystall zerfällt, können in vielen Fällen zur Interferenz gebracht werden, und geben dann zu den schönsten und mannigfaltigsten Farbenerscheinungen Anlass. Dieselben lassen sich im Wesentlichen leicht ableiten, mit Hülfe der beiden noch übrigen von Fresnel und Arago aufgestellten Gesetze über die Interferenz polarisirten Lichtes, welche sich als drittes und viertes den beiden im §. 70 erwähnten Gesetzen anschliessen [2]).

Die beiden Gesetze sind folgende:

1. Zwei senkrecht zu einander polarisirte Strahlen können auf eine Polarisationsebene gebracht werden; sie interferiren dann mit einander, wenn sie ursprünglich nur eine Polarisationsebene besassen, wenn sie also durch die Zerlegung eines polarisirten Lichtstrahles entstanden sind. Bei der Bestimmung der Interferenz muss aber unter Umständen der Wegedifferenz der beiden Strahlen eine halbe Wellenlänge hinzugezählt werden, unter Umständen nicht.

2. Wenn zwei senkrecht zu einander polarisirte Strahlen aber aus nicht polarisirtem Licht entstanden sind, so interferiren sie nicht bei der Zurückführung auf eine Polarisationsebene.

Es wird unnöthig sein die experimentellen Beweise für diese Sätze, welche Fresnel und Arago führten, mitzutheilen, da sämmtliche Erscheinungen,

---

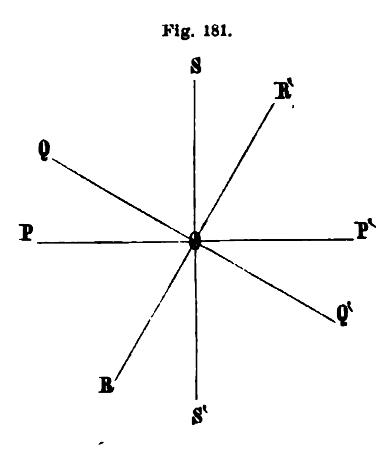
1) Weiteres *Beer,* Einleitung in die höhere Optik. *Grailich,* Krystallogr. optische Untersuchungen. Wien 1858. *Grailich* und *v. Lang,* Sitzungsberichte der Wiener Akademie. Bd. XXVII, XXXI, XXXIII. *v. Lang,* ebendort. Bd. XXXI u. XLV. *Descloiseaux,* Annales de Mines. T. XI u. XII. Comptes Rendus. LXII. p. 987. Poggend. Annal. Bd. CXXIX.

2) Poggend. Annal. Bd. XII. p. 376 ff.

welche wir noch zu betrachten haben, ebensoviel Beweise für die Richtigkeit derselben sind; wir wollen nur zeigen, dass dieselben sich unmittelbar aus der Undulationstheorie ergeben.

Denken wir uns zu dem Ende, dass ein polarisirter Strahl senkrecht auf eine doppelbrechende Platte eines Krystalles, etwa eine parallel der Axe aus einem Kalkspath geschnittene Platte falle. Es sei *PP'* (Fig. 181) die Schwingungsebene des auf den Krystall fallenden Lichtes, und *QQ'* die Richtung der Axe in demselben. Der einfallende Strahl wird dann in dem Krystall in zwei zu einander senkrecht polarisirte zerlegt, deren einer seine Schwingungen parallel *QQ'*, der andere parallel *RR'* vollführt. Fixiren wir den Moment, in welchem die Schwingungen des eintretenden Strahles in der Richtung *OP* geschehen, so sind in den beiden durch Zerlegung im Krystall entstandenen die Schwingungen nach *OQ* und *OR* gerichtet. Diese beiden Strahlen pflanzen sich nun durch den Krystall mit verschiedener Geschwindigkeit fort, die Länge der Welle eines nach *OQ* schwingenden Strahles ist grösser als die des andern. Sei der Krystall nun so dick, dass im Innern desselben *m* Wellen des ersten und *n* Wellen des zweiten Strahles sich befinden, wo *m* und *n* ganze Zahlen sind und *n* grösser als *m*, so werden beide Strahlen den Krystall ohne Phasendifferenz oder vielmehr mit einer Phasendifferenz von einer Anzahl ganzer Wellenlängen verlassen, das heisst, die Schwingungen werden an der Austrittsstelle zugleich von *O* nach *Q* und *R* geschehen. Da nun die Strahlen von der Austrittsstelle an sich in dem isotropen Mittel nach der gleichen Richtung und mit der gleichen Geschwindigkeit fortpflanzen, so werden von da an die Bewegungen des Aethers in den beiden Strahlen immer zugleich nach *Q* und *R* oder nach *Q'* und *R'* geschehen. Die Strahlen treten nun in ein Nicol'sches Prisma, welches so gestellt sei, dass die Schwingungsebene des aus demselben austretenden Strahles parallel *PP'* ist. In dem Prisma wird nun wieder jeder der beiden Strahlen *OQ* und *OR* in zwei zerlegt, deren einer nach *OP*, deren anderer nach *OS* schwingt. Letztere treten nicht durch den Nicol hindurch; die beiden ersten sind parallel polarisirt, und es ist klar, dass die Resultirende der Bewegung des Aethers in dem aus dem Nicol tretenden Strahle einfach die Summe der beiden nach *OP* zerlegten Componenten der beiden Strahlen ist.

Fig. 181.



Ist die Dicke der Platte eine andere, so wird der eine Strahl dem andern um eine andere Strecke voreilen; ist die durch den Geschwindigkeitsunterschied erlangte Phasendifferenz z. B. ein ungerades Vielfaches einer halben

Wellenlänge, so treten die beiden Componenten aus, indem die Bewegung in der einen nach OQ, in der andern nach OR' gerichtet ist. Von da an pflanzen sie sich in dem isotropen Mittel so fort, dass die Bewegungen immer gleichzeitig nach Q und R' oder nach Q' und R gerichtet sind. In dem Nicol gibt jeder der Strahlen eine in PP' fallende Componente, und zwar sieht man, dass die von QQ' herrührende Componente nach OP geht, wenn die von RR' stammende nach OP' geht und umgekehrt. In der gemeinsamen Polarisationsebene interferiren also die beiden Strahlen mit der Phasendifferenz einer halben Wellenlänge, mit derjenigen, welche sie durch die verschiedene Geschwindigkeit im Krystall erhalten haben. Gleiches gilt, welches auch die Phasendifferenz ist, welche zwischen den Strahlen in Folge der verschiedenen Geschwindigkeit, mit der sie den Krystall durchsetzt haben, besteht.

Ist aber der zweite Nicol, welcher die aus dem Krystalle austretenden Strahlen aufnimmt, so gestellt, dass die Schwingungen der aus ihm tretenden Strahlen parallel SS' geschehen, so wird es anders. Nach dieser Richtung geben die ohne Phasendifferenz aus dem Krystall austretenden Strahlen, die also zugleich nach OQ und OR schwingen, Componenten, von denen die erste nach OS, die zweite nach OS' gerichtet ist. Die Componenten haben entgegengesetzte Phase, sie interferiren mit der Phasendifferenz einer halben Wellenlänge. Um demnach die Interferenz zu bestimmen, muss zu der durch den Geschwindigkeitsunterschied der Strahlen im Krystall erlangten Phasendifferenz der Unterschied einer halben Wellenlänge hinzugezählt werden.

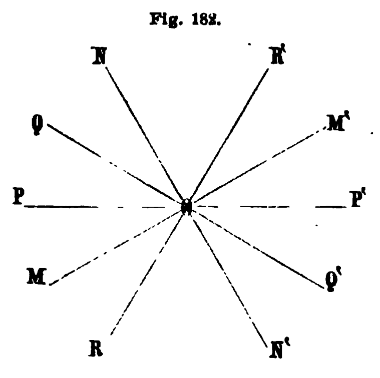
Ebenso in dem zweiten der betrachteten Fälle; die in den Nicol eintretenden Strahlen schwingen zugleich nach OQ und OR', ihre nach SS' zerlegten Componenten also beide nach OS, die Resultirende ist die Summe beider Componenten. Auch hier also muss zur Phasendifferenz in Folge des Geschwindigkeitsunterschiedes eine halbe Wellenlänge hinzugezählt werden, um die Interferenz zu erhalten.

Vergleichen wir die beiden verschiedenen Lagen des Nicol, so sehen wir, dass im ersten Falle die Polarisationsebene desselben mit der ursprünglichen Polarisationsebene in demselben Winkel zwischen den beiden Polarisationsebenen der getheilten Strahlen lag, im zweiten Falle in dem andern Winkel, den O und R mit einander bilden, als die ursprüngliche Ebene, und zugleich, dass eben darin der Grund für das verschiedene Verhalten liegt. Es ergibt sich demnach aus dieser Betrachtung, dem Fresnel'schen Satze gemäss, wenn ein polarisirter Strahl in zwei senkrecht zu einander polarisirte zerlegt wird, und diese dann in eine Polarisationsebene zurückgebracht werden, dass dieselben dann mit der inzwischen erlangten Phasendifferenz interferiren, wenn die neue Polarisationsebene in demselben Winkel zwischen den beiden Polarisationsebenen der getheilten Strahlen liegt als die frühere, dass aber zu der erlangten Phasendiffeeenz eine halbe Wellenlänge hinzugezählt werden muss, wenn die neue Polarisationsebene so liegt, dass die Polarisationsebene der

beiden Strahlen, in welche der ursprüngliche Strahl aus einander ging, noch weiter aus einander gehen müssen, damit dieselben wieder eine gemeinschaftliche Polarisationsebene erhalten.

Das zweite der angeführten Gesetze ist eine nothwendige Folge des ersten und der Beschaffenheit des natürlichen Lichtes. Wie wir sahen besteht das letztere aus einer raschen Folge von nach allen möglichen Richtungen polarisirtem Lichte. Falle nun auf unseren Krystall ein Strahl natürlichen Lichtes; derselbe wird in zwei zu einander senkrecht polarisirte zerlegt nach *QQ'* und *RR'*, und sei nun *PP'* die Polarisationsebene, auf welche die beiden Strahlen schlieslich zum Zwecke der Interferenz zurückgeführt werden. In dem natürlichen den Krystall treffenden Licht wird nun in einem bestimmten Moment die Schwingungsrichtung *MM'* sein, in einem folgenden, jedoch dem ersten unendlich nahen *PP'*, dann *QQ'*, dann *NN'* und noch später *RR'*, alle diese Schwingungsrichtungen treten in unendlich kurzer Zeit auf. Jede dieser Schwingungen wird nach *QQ'* und *RR'* zerlegt und schliesslich nach *PP'* geführt. Von diesen Schwingungsrichtungen des unpolarisirten Strahles fallen nun aber ebensoviel

Fig. 182.



mit *PP* in denselben Winkel *QOR*, als in den andern der von den beiden Polarisationsebenen gebildeten Winkel *QOR'*. Die erstern interferiren daher mit der im Krystall erhaltenen Phasendifferenz, bei den zweiten muss zur Phasendifferenz eine halbe Undulation hinzugezählt werden; geben daher erstere das Maximum der Helligkeit, so letztere das Minimum und umgekehrt, so dass die Wirkung sich aufhebt. Betrachten wir z. B. die beiden Schwingungsrichtungen *OM* und *ON*, und nehmen an, die Dicke des Krystalles sei so, dass in ihm die ordentlichen und ausserordentlichen Strahlen die Phasendifferenz $n\lambda$ erhalten. *OM* zerlegt sich dann nach *OQ* und *OR*, und beide geben eine Resultante nach *OP*, *ON* aber zerlegt sich nach *OQ* und *OR'*, ersteres gibt nach *PP'* zerlegt eine Schwingung nach *OP*, letzteres nach *OP'*, die Schwingungen sind also entgegengesetzt. Welches also auch die Phasendifferenz ist, welche die beiden Strahlen *OQ* und *OR* im Krystall erhalten, der zuletzt nach *PP* polarisirte Strahl wird immer die gleiche Helligkeit haben, da die Interferenzen sich immer aufheben.

Das zweite der erwähnten Gesetze ist also nicht so zu verstehen, dass die Vibrationen, welche aus zwei zu einander senkrechten Polarisationsebenen auf eine zurückgeführt werden, wenn sie aus natürlichem Lichte entstanden, überhaupt nicht auf einander wirken, sondern vielmehr so, dass die Wirkungen, weil sie von den Elementarschwingungen her entgegengesetzt werden, sich aufheben.

§. 89.

Farbenringe in Platten aus einaxigen Krystallen, welche senkrecht zur Axe geschnitten sind. Mit Hülfe dieser beiden Gesetze ist es nun leicht abzuleiten, welche Erscheinungen auftreten, wenn ein Bündel polarisirten Lichtes durch eine Krystallplatte hindurchtritt. Untersuchen wir zunächst die Erscheinungen, welche sich zeigen, wenn die Platten aus einaxigen Krystallen senkrecht zur Axe geschnitten sind.

Um dieselben wahrzunehmen, bringt man eine nicht zu dünne Platte, etwa 2^{mm} dick, welche von parallelen eben geschliffenen Seiten begrenzt ist, entweder zwischen die beiden Turmaline, der §. 82 erwähnten Turmalinzange, oder zwischen zwei in ähnlicher Weise gefasste Nicol'sche Prismen, oder besser noch in einen der zu diesem Zwecke besonders construirten Polarisationsapparate, den Nörremberg'schen oder Dove'schen Polarisationsapparat.

Den Nörremberg'schen Polarisationsapparat, wie ihn jetzt nach der Angabe Nörremberg's der Mechaniker Steeg zu Homburg verfertigt, zeigt Fig. 183.

Fig. 183.



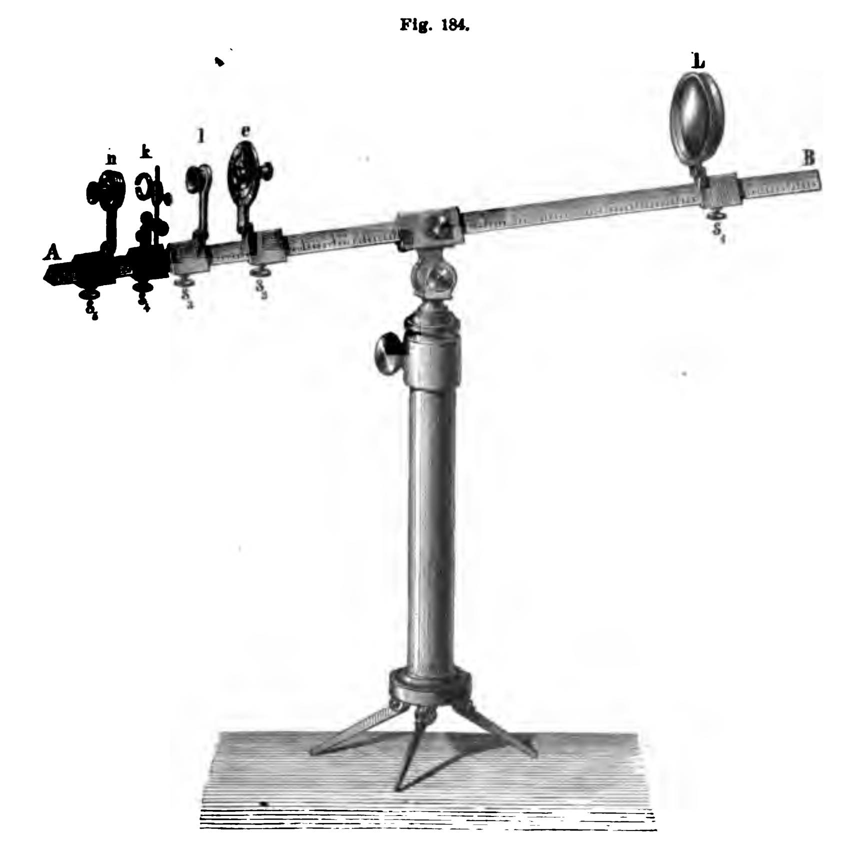
Von dem Auffangspiegel *R* wird das Licht des hellen Himmels auf den Spiegel *S* reflectirt, so dass es von diesem unter dem Polarisationswinkel zurückgeworfen senkrecht, also der Axe der Röhren *O* und *N* parallel in die Höhe geht. An dem obern Ende des kurzen Rohres *T* ist eine Linse von kurzer Brennweite gefasst, so dass die nahezu parallelen Strahlen, welche in das Rohr *T* eintreten, nach einem nahe über *T* liegenden Punkte convergiren. Auf die das Rohr *T* oben begrenzende Platte, den Objectivtisch, wird die zu untersuchende Krystallplatte gelegt. Der Punkt, nach welchem die Strahlen convergiren, liegt dann in der Krystallpatte ungefähr in der obern Grenzfläche. Nachdem die Strahlen den Krystall verlassen haben, treten sie divergirend in die Linse *L*, welche in dem untern Ende des Rohres *O* gefasst ist, und werden so wieder convergent, so dass sie nach dem über *N* befindlichen Auge convergiren. In der Röhre *N* befindet sich ein Nicol'sches Prisma, welches die Strahlen, ehe sie das Auge treffen, wieder auf eine Polarisationsebene zurückführt. Die Strahlen durchsetzen also den Krystall als ein convergirender Lichtkegel, und treffen dann das Auge als ein schwächer convergirender Kegel. Die Röhre *N* mit dem Nicol lässt sich in ihrer Fassung drehen, sie trägt eine

Marke, welche auf der Kreistheilung der Fassung die Lage der Polarisationsebene des Nicol anzeigt. Steht die Marke auf 0^0, so ist die Polarisationsebene des Nicol derjenigen des Polarisationsspiegels S parallel.

Im Dove'schen Polarisationsapparate, welchen der Mechaniker Hirschwald zu Berlin nach Dove's Angabe verfertigt, wird das Licht durch einen Nicol polarisirt.

Auf dem durch einen gewöhnlichen Fernrohrfuss getragenen dreiseitigen Prisma AB (Fig. 184) sind an den Hülsen s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 die verschiedenen

Fig. 184.



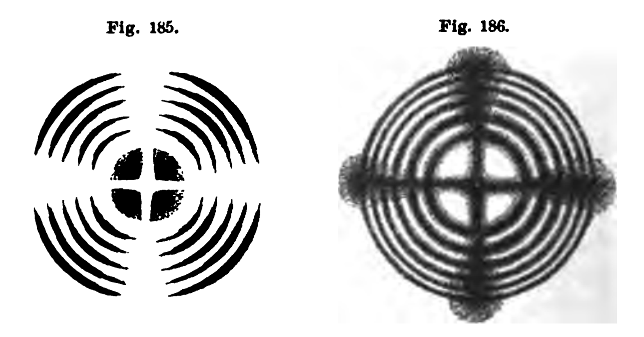
Theile des Apparates befestigt; s_1 trägt eine Sammellinse von ungefähr 40 Centimeter Brennweite, s_2 das polarisirende Nicol'sche Prisma und am Ende desselben gegen A hin eine Linse von ungefähr 4 Centimeter Brennweite. Die Scheibe, in deren Centrum das Rohr mit Nicol und Linse drehbar befestigt ist, trägt auf ihrem Rande eine Kreistheilung, auf welcher ein der Polarisationsebene des Nicol paralleler und an der den Nicol enthaltenden Röhre befestigter Radius einsteht. Der Ständer s_3 trägt eine Linse von ungefähr 4 Centimeter Brennweite, s_4 einen Ring, in welchem die Krystall-

platten befestigt werden können, und s_5 das zweite Nicol'sche Prisma, welches wie das erste in dem Centrum einer mit Kreistheilung versehenen Scheibe drehbar befestigt ist, und dessen Polarisationsebene ebenfalls durch einen mit der den Nicol enthaltenden Röhre fest verbundenen Radius angegeben wird.

Um mit diesem Apparate Versuche anzustellen, stellt man die Linse *L* so, dass die vom hellen Himmel oder einer Lampe auf sie fallenden Strahlen in der Vorderfläche *e* des Nicols vereinigt werden. Die von dort divergirend ausgehenden polarisirten Strahlen werden durch die beiden Linsen, die am Nicol drei Centimeter von der Einfallsebene *e* der Strahlen entfernte und die Linse *l*, welche von letzterer acht Centimeter entfernt ist, in einen convergenten Strahlenkegel verwandelt, der durch den Krystall und den zweiten Nicol, vor welchem noch eine schwache Zerstreuungslinse angebracht ist, in das hinter dem zweiten Nicol befindliche Auge dringt.

Bringt man nun in einen der erwähnten Polarisationsapparate eine planparallele senkrecht zur Axe geschnittene Platte eines einaxigen Krystalles, so sieht man, wenn die Polarisationsebene des zweiten Nicols oder Turmalins der Polarisationsebene des ersten oder derjenigen des Spiegels *S* im Nörremberg'schen Apparate parallel ist, und bei Anwendung homogenen Lichtes im Krystalle das Ringsystem Fig. 185 von abwechselnd hellen und dunklen

Fig. 185. Fig. 186.



Ringen, welches von einem weissen Kreuze durchsetzt ist, dessen Arme der Polarisationsebene parallel und zu ihr senkrecht sind. Die Mitte des Systemes ist hell, um dieselbe legt sich ein dunkler, um diesen ein heller, wieder ein dunkler Ring und so fort.

Ist dagegen die Polarisationsebene des zweiten Nicols zu derjenigen des den Krystall treffenden Lichtes senkrecht, so sieht man in dem Krystall das von einem schwarzen Kreuze durchsetzte Ringsystem (Fig. 186). Die Mitte der Erscheinung ist dunkel, dann folgt ein heller Ring, auf diesen ein dunkler u. s. f. Die Arme des schwarzen Kreuzes sind der Polarisationsebene des einfallenden Lichtes und derjenigen des zweiten Nicol parallel [1]).

---

1) Zuerst beobachtet von *Wollaston* im Kalkspath, von *Seebeck* und *Brewster*. *Lloyd*, Geschichte der Optik übers. von *Klöden*. Berlin 1836.

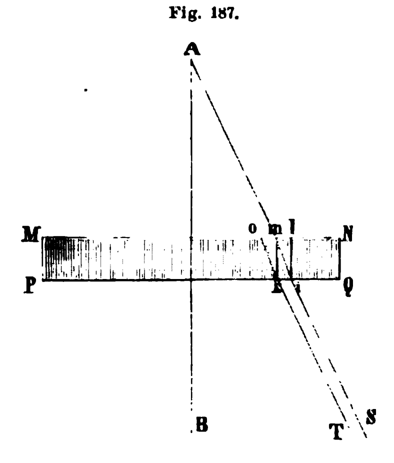
Die Ringe werden enger oder weiter, je kleiner oder grösser die Wellenlänge des angewandten Lichtes ist; wendet man anstatt des homogenen weisses Licht an, so verwandeln sich die hellen und dunklen Ringe in farbige von derselben Farbenfolge als die Newton'schen Ringe. Sind die beiden Polarisationsebenen der beiden Nicol parallel, so ist die Farbenfolge dieselbe wie bei den Newton'schen Ringen im durchgelassenen, sind sie gekreuzt, wie im reflectirten Licht. Im zweiten Falle sind also die Ringe complementär zu den im ersten Falle gefärbt.

In allen Fällen, das heisst mögen wir einfaches oder zusammengesetztes Licht anwenden, mögen die Nicols parallel oder gekreuzt sein, sieht man, dass die Ringe um so deutlicher werden, die Farbenunterschiede oder die Helligkeitsunterschiede um so mehr hervortreten, je weiter man von den Armen des hellen oder dunklen Kreuzes sich gegen die Mitte der zwischen den Kreuzesarmen enthaltenen Quadranten entfernt.

Diese Erscheinungen ergeben sich aus den bisher betrachteten Gesetzen der Doppelbrechung und Interferenz des polarisirten Lichtes folgendermassen[1]).

Wie wir sahen erhalten wir dieselben, wenn ein convergenter Strahlenkegel die Krystallplatte durchsetzt. Sei nun Fig. 187 *MNPQ* ein Durchschnitt durch eine senkrecht zur Axe geschliffene Kalkspathplatte, und *AB* die zu den Begrenzungsflächen der Platte senkrechte Axe des in das bei *A* befindliche Auge kommenden Strahlenkegels. Sei ferner das in die Platte eindringende Licht unter einem Winkel von 45° gegen die Durchschnittsebene *MNPQ* polarisirt, und befinde sich zwischen dem Auge und der Platte ein Nicol'sches Prisma, dessen Polarisationsebene derjenigen des einfallenden Lichtes parallel sei. Ein in der Axe *AB* den Krystall durchsetzender Lichtstrahl wird dann ungebrochen und unzertheilt bleiben, da jede durch die Axe gelegte Ebene ein Hauptschnitt des Krystalles ist, also der eintretende Strahl im Hauptschnitte polarisirt ist, und deshalb nicht doppelt gebrochen wird.

Fig. 187.



Anders jedoch verhält es sich mit dem Strahle *Tk*; dessen Polarisationsebene bildet mit der Ebene *MNPQ* einen Winkel von 45°, er zerfällt daher in zwei, einen ordentlich gebrochenen, welcher dem Hauptschnitte *MNPQ* parallel polarisirt ist, und einen ausserordentlich gebrochenen, dessen Polari-

1) Die vollständige Ableitung gab zuerst *Airy*. Cambridge Philos. Transact. vol. IV. Poggend. Annal. Bd. XXIII.

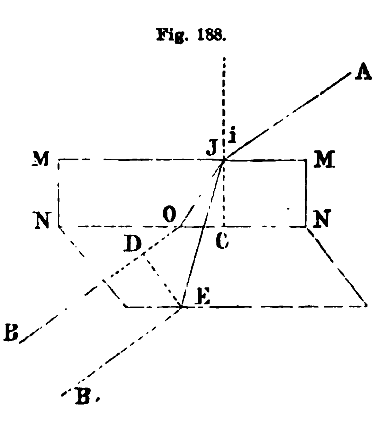
sationsebene zur Ebene *MNPQ* senkrecht ist. Ersterer pflanzt sich nach *km*, letzterer nach *ko* fort. Gleiches gilt für den Strahl *Si* und für alle, welche gegen die Axe des Krystalles oder des Strahlenkegels geneigt sind. Nun wird, da der Kegel ganz continuirlich mit Strahlen angefüllt ist, zu jedem Strahle *Tk* ein anderer *Si* so liegen, dass der von *Si* kommende ausserordentliche Strahl in demselben Punkte *m* und nach derselben Richtung *mA* den Krystall verlässt, wie der ordentlich gebrochene Strahl *km*, welcher von dem Strahle *Tk* herrührt. Denn denken wir uns von *A* aus den Strahl *Am* auf den Krystall fallen, so wird derselbe doppelt gebrochen nach *mk* ordentlich und nach *mi* ausserordentlich. Diese beiden Strahlen werden dann ein den Krystall nach unten hin verlassendes mit einander und mit *Am* paralleles Strahlenpaar liefern. In dem continuirlichen den Krystall treffenden Strahlenkegel gibt es nun aber immer zwei Strahlen, welche gerade so liegen, wie jenes Strahlenpaar, das aus *Am* entstehen würde; von diesen beiden Strahlen müssen daher bei *m* und nach der Richtung *mA* der ordentliche *km* und der ausserordentliche *im* aus dem Krystall austreten.

In *mA* pflanzen sich demnach zwei zu einander senkrecht polarisirte Strahlen fort. Diese beiden Strahlen sind aber in verschiedener Phase. Legen wir durch *i* eine zu den einfallenden Strahlen senkrechte Ebene *ie*, so sind in dieser die von derselben weit entfernten Lichtquelle kommenden Strahlen in gleicher Phase; von da an hat dann der eine der beiden Strahlen den Weg $ek + km$, der andere nur den Weg *im* zurückgelegt. Da ferner der eine Strahl *km* stärker gebrochen ist, so hat er sich im Krystalle langsamer fortgepflanzt, oder auf der Strecke *km* liegen eine grössere Anzahl von Wellenlängen oder Bruchtheilen derselben, als auf *im*. Der von *Tk* herrührende Theil des nach *mA* sich fortpflanzenden Strahles ist daher gegen den andern, zu ihm senkrecht polarisirten, um eine bestimmte Phasendifferenz verschoben. Diese beiden Strahlen werden nun in dem obern Nicol wieder auf eine der frühern parallele Polarisationsebene zurückgeführt; sie interferiren daher mit jener Phasendifferenz, welche sie auf den verschiedenen Wegen und durch die verschiedene Geschwindigkeit erhalten haben.

Es ist hiernach nicht schwierig mit Hülfe der früher abgeleiteten Gleichungen über die Richtung und Geschwindigkeit der gebrochenen Strahlen die Phasendifferenz und Intensität der nach dem Austritt aus dem Krystall interferirenden Strahlen zu berechnen. Sei zu dem Ende *MN* (Fig. 188) die Einfallsebene, *MM* der Durchschnitt derselben mit der einen, *NN* jener mit der andern Fläche des Krystalles, und setzen wir zunächst voraus, dass die Axe des Krystalles unter einem beliebigen Winkel gegen die Einfallsebene und die Grenzfläche des Krystalles geneigt sei. Ein unter dem Einfallswinkel *i* auf den Krystall auftreffender Strahl *AJ* wird dann bei seinem Eintritt in den Krystall doppelt gebrochen, der ordentliche Strahl tritt in der Richtung *JO* durch den Krystall, welche mit dem Einfallsloth den Winkel *r* bildet, welche in der Einfallsebene liegt, bei *O* verlässt derselbe in der

Richtung $OB \parallel AJ$ den Krystall. Der ausserordentliche Strahl JE liegt in einer Ebene, welche nach der Bezeichnung des §. 79 mit der Einfallsebene den Winkel $\varphi' - \varphi$ bildet; der Brechungswinkel in dieser Ebene ist r'; bei E verlässt der Strahl den Krystall in der Richtung EB, parallel OB und JA. Legen wir nun durch den Punkt E, in welchem der ausserordentliche Strahl den Krystall verlässt, eine Ebene senkrecht zur Richtung der austretenden Strahlen, welche den ordentlich gebrochenen Strahl in D trifft, so ist die Wegedifferenz, welche die Strahlen im Krystall erhalten haben, $JO + OD - JE$, während der ordentliche Strahl die Wege $JO + OD$ zurückgelegt, hat der ausserordentliche Strahl den Weg JE zurückgelegt. Es sei nun die Gleichung des bei J eintretenden Strahles

Fig. 188.



$$Y = \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Ist α der Winkel, den die Polarisationsebene desselben mit der Polarisationsebene des ordentlichen Strahles im Krystalle bildet, so ist die Gleichung des ordentlichen Strahles bei D

$$y = \cos \alpha \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \left(\frac{JO}{\lambda_0} + \frac{OD}{\lambda}\right)\right),$$

worin λ_0 die Wellenlänge des ordentlichen Strahles ist. Bildet dann die Polarisationsebene des zweiten Nicols mit der Polarisationsebene des ordentlichen Strahles den Winkel α', so wird nach dem Durchtritt durch den zweiten Nicol in einem Abstande x' von dem Punkte D

$$y = \cos \alpha' \cos \alpha \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + x'}{\lambda} - \left(\frac{JO}{\lambda_0} + \frac{OD}{\lambda}\right)\right).$$

Um ebenso die Gleichung des ausserordentlichen Strahles zu erhalten, müssen wir erwägen, dass in der Richtung JE sich nicht die ausserordentliche Welle, sondern der ausserordentliche Strahl fortpflanzt, dass wir somit in der Gleichung des ausserordentlichen Strahls für den Punkt E

$$z = -\sin \alpha \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{JE}{\lambda_1}\right),$$

in welcher $\sin \alpha$ das negative Vorzeichen hat, weil die Polarisationsebene des ausserordentlichen Strahles mit der des ersten Nicols den Winkel $90^0 + \alpha$ bildet, für λ_1 nicht die Wellenlänge der ausserordentlichen Welle, sondern die dieser auf dem Strahl entsprechende Länge einzusetzen haben. Wir erhalten dieselbe aus der im §. 81 abgeleiteten Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Strahles. Setzen wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im

leeren Raum oder in Luft gleich 1, so ist jene des Strahls in einer bestimmten Richtung des Krystalls gleich dem in diese Richtung fallenden Halbmesser ϱ des Wellenellipsoides. Daraus folgt also, dass die Länge λ_1, durch welche sich der Strahl im Krystalle fortpflanzt, während er sich in der Luft um die Strecke λ fortpflanzt, gegeben ist durch die Gleichung

$$\lambda_1 : \lambda = \varrho : 1$$
$$\lambda_1 = \lambda \,.\, \varrho.$$

Damit wird sonach

$$z = -\sin\alpha \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{JE}{\lambda \,.\, \varrho}\right),$$

oder nach dem Durchtritt durch den zweiten Nicol, da der Hauptschnitt desselben mit der Polarisationsebene den Winkel $90^0 - \alpha'$ bildet,

$$z = -\sin\alpha' \sin\alpha \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + x'}{\lambda} - \frac{JE}{\lambda \,.\, \varrho}\right).$$

Da nun die beiden Strahlen wieder in derselben Ebene polarisirt sind, so interferiren sie in der gewöhnlichen Weise, und die resultirende Intensität wird

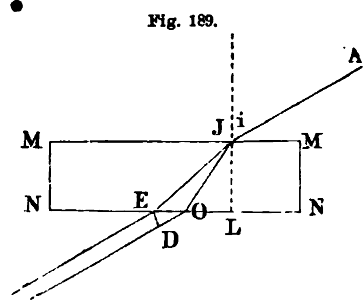
$$R^2 = (\cos\alpha' \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha' \sin\alpha)^2 - 2 \sin\alpha \sin\alpha' \cos\alpha \cos\alpha' \,.\, \cos 2\pi \frac{OD + JO\,\frac{\lambda}{\lambda_0} - \frac{JE}{\varrho}}{\lambda}.$$

Zur Bestimmung der Resultirenden haben wir demnach nur die Phasendifferenz

$$OD + JO\,\frac{\lambda}{\lambda_0} - \frac{JE}{\varrho} = \Delta$$

zu bestimmen. Wenn, wie in dem jetzt betrachteten Falle die Axe senkrecht zu den Grenzflächen der Krystallplatte ist, so fallen der ordentliche und der ausserordentliche Strahl in die Einfallsebene; wir erhalten dann zunächst für OD (Fig. 189)

Fig. 189.



$$OD = OE \,.\, \sin DEO = OE \,.\, \sin i.$$

Nun ist OE der Abstand der Punkte, in welchen die beiden Strahlen die untere Grenzfläche schneiden; sind wie vorhin die beiden Brechungswinkel $EJL = r'$, $OJL = r$, so ist

$$EO = \frac{OJ \,.\, \sin OJL}{\sin OEJ} = \frac{OJ \,.\, \sin (r' - r)}{\cos r'}.$$

Nennen wir nun die Dicke der Krystallplatte d, so ist

$$OJ = \frac{d}{\cos r}$$

und damit

$$OD = \frac{d \,.\, \sin i \,.\, \sin (r' - r)}{\cos r \,.\, \cos r'} = d\,(\sin i \tang r' - \sin i \tang r).$$

Weiter ist

$$JO \cdot \frac{\lambda}{\lambda_0} = d \cdot \frac{\sin i}{\cos r \cdot \sin r} = d \cdot \frac{1}{\omega \cdot \cos r},$$

da das Verhältniss der Wellenlängen gleich dem Brechungsexponenten des ordentlichen Strahles und dieses gleich dem reciproken Werthe der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω des ordentlichen Strahles ist, wenn die in der Luft gleich 1 gesetzt ist.

Um den letzten Theil der Phasendifferenz zu bestimmen, benutzen wir den §. 81 für den Halbmesser des Ellipsoides, der mit der Axe den Winkel T bildet, gefundenen Werth

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 T}{\omega^2} + \frac{\sin^2 T}{\varepsilon^2}}},$$

worin ε die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des ausserordentlichen Strahles senkrecht zur Axe bedeutet. Der Winkel T, den der ausserordentliche Strahl JE mit der Axe bildet, ist, da die Axe mit dem Einfallsloth zusammenfällt, gleich dem Brechungswinkel r', wir erhalten deshalb zunächst

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 r'}{\omega^2} + \frac{\sin^2 r'}{\varepsilon^2}}}.$$

Nach §. 79 ist nun der Brechungswinkel des ausserordentlichen Strahles, wenn die Axe senkrecht zur Krystallfläche ist, gegeben durch die Gleichung

$$\operatorname{tang} r' = \frac{\varepsilon^2 \sin i}{\omega \cdot \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 i}}.$$

Aus derselben folgt

$$\sin^2 r' = \frac{\varepsilon^4 \sin^2 i}{\varepsilon^4 \sin^2 i + \omega^2 (1 - \varepsilon^2 \sin^2 i)}, \quad \cos^2 r' = \frac{\omega^2 (1 - \varepsilon^2 \sin^2 i)}{\varepsilon^4 \sin^2 i + \omega^2 (1 - \varepsilon^2 \sin^2 i)}$$

und weiter

$$\varrho = \sqrt{\omega^2 + (\varepsilon^2 - \omega^2) \cdot \varepsilon^2 \sin^2 i}.$$

Da nun

$$JE = \frac{d}{\cos r'},$$

so wird schliesslich

$$\frac{JE}{\varrho} = \frac{d}{\omega \cdot \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 i}}.$$

Damit wird die ganze Phasendifferenz

$$OD + JO \frac{\lambda}{\lambda_0} - \frac{JE}{\varrho} = d \left\{ \sin i \operatorname{tang} r' - \sin i \operatorname{tang} r + \frac{1}{\omega . \cos r} - \frac{1}{\omega . \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 i}} \right\}.$$

Beachten wir nun, dass

$$\sin r = \omega \cdot \sin i, \quad \cos r = \sqrt{1 - \omega^2 \cdot \sin^2 i},$$

drücken wir $\operatorname{tang} r$ durch $\sin i$ und ω aus und setzen für $\operatorname{tang} r'$ seinen Werth in $\sin i$, ε und ω, so erhalten wir schliesslich, indem wir passend ordnen

$$\Delta = \frac{d}{\omega} \left\{ \frac{1 - \omega^2 \sin^2 i}{\sqrt{1 - \omega^2 \sin^2 i}} - \frac{1 - \varepsilon^2 \sin^2 i}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 i}} \right\}$$

oder

$$\varDelta = \frac{d}{\omega}\left(\sqrt{1 - \omega^2 \sin^2 i} - \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 i}\right),$$

oder die Phasendifferenz der interferirenden Strahlen hängt bei einem gegebenen Krystall nur ab von dem Winkel, den die den Krystall verlassenden Strahlen mit der Axe des convergirenden Strahlenbündels bilden, welches den Krystall durchsetzt. Daraus folgt, dass in einem um die Axe dieses Bündels gelegten Kreise die Phasendifferenz dieselbe ist, dass also, so weit die resultirende Intensität von dieser Phasendifferenz abhängt, sich um die Axe des Krystalls herum eine Anzahl von im homogenen Lichte heller und dunkler, im weissen Licht farbiger Kreise herum legen müssen.

Setzen wir die Dicke d nicht zu klein voraus, so wird der Winkel i immer so klein, dass wir $\sin^4 i$ gegen $\sin^2 i$ vernachlässigen können, so wird

$$\varDelta = \frac{d}{2\omega} \cdot (\varepsilon^2 - \omega^2) \sin^2 i.$$

Die Phasendifferenz wird ein ungerades Vielfaches von $\frac{\lambda}{2}$, wenn

$$\sin^2 i = (2n - 1)\frac{\omega}{\varepsilon^2 - \omega^2} \cdot \frac{\lambda}{d},$$

sie wird ein gerades Vielfaches, wenn

$$\sin^2 i = 2n \cdot \frac{\omega}{\varepsilon^2 - \omega^2} \cdot \frac{\lambda}{d}.$$

Der Durchmesser der hellen und dunklen Kreise bei homogenem Lichte wird gemessen durch tang i, oder bei den vorausgesetzten kleinen Werthen von i durch $\sin i$; es folgt somit, dass bei einem und demselben Krystall die Durchmesser der Quadratwurzel der Plattendicke umgekehrt und der Quadratwurzel aus der Wellenlänge direkt proportional ist, dass sie bei verschiedenen Krystallen von der Geschwindigkeitsdifferenz des ordentlich und ausserordentlich gebrochenen Strahles abhängt.

Mit Hülfe der so bestimmten Phasendifferenz $\varDelta$ haben wir die resultirende Intensität nach dem Durchtritte der Strahlen durch den zweiten Nicol zu berechnen. Dieselbe war

$$R^2 = (\cos\alpha \,.\, \cos\alpha')^2 + (\sin\alpha \,.\, \sin\alpha')^2 - 2\cos\alpha \,.\, \cos\alpha' \sin\alpha \sin\alpha' \,.\, \cos 2\pi\frac{\varDelta}{\lambda},$$

oder mit schon mehrfach angewandter Umformung

$$R^2 = \cos^2(\alpha + \alpha') + \sin 2\alpha \,.\, \sin 2\alpha' \,.\, \sin^2 \pi \frac{\varDelta}{\lambda}.$$

Nennen wir nun den Winkel, welchen die Polarisationsebene des zweiten Nicols mit der des ersten bildet χ, so ist

$$\alpha' = \chi - \alpha$$

$$R^2 = \cos^2\chi + \sin 2\alpha \cdot \sin(2\chi - 2\alpha) \cdot \sin^2 \pi \frac{\varDelta}{\lambda}.$$

Nehmen wir nun zunächst an, die beiden Nicols stehen parallel, also $\chi =$ 0, so wird

$$R^2 = 1 - \sin^2 2\alpha \,.\, \sin^2 \pi \frac{\varDelta}{\lambda}.$$

Der Ausdruck zeigt zunächst, dass, welches auch der Werth von Δ ist, für $\alpha = 0$ und $\alpha = 90^0$

$$R^2 = 1$$

ist, somit dass das Ringsystem von einem weissen Kreuze durchsetzt sein muss, dessen einer Arm der Polarisationsebene der beiden Nicols parallel ist, dessen anderer zu derselben senkrecht ist. Auch so lange der Werth von α nur wenig von 0^0 oder 90^0 verschieden ist, ist R nur wenig von 1 verschieden, es muss sich deshalb das weisse Kreuz nach beiden Seiten ausbreiten, und da bei grössern Kreisen gleichen Werthen von α längere Bögen entsprechen, müssen die Arme des Kreuzes in grössern Abständen von der Mitte breiter werden. Ist α beträchtlich von 0 verschieden, so werden die hellen und dunklen respective farbigen Ringe sichtbar; ist $\Delta = \frac{n+1}{2} \lambda$, so wird

$$R^2 = 1 - \sin^2 2\alpha = \cos^2 2\alpha,$$

ist $\Delta = n\lambda$, so wird $R^2 = 1$. Die Helligkeit schwankt somit zwischen 1 und $\cos^2 2\alpha$, der Helligkeitsunterschied wird am grössten für $\alpha = 45^0$, sie schwankt dort zwischen 1 und 0.

Ist dagegen $\chi = 90^0$, stehen die Nicols senkrecht, so wird

$$R^2 = \sin^2 2\alpha \,.\, \sin^2 \pi \frac{\Delta}{\lambda},$$

die Intensität wird also für $\alpha = 0$ und $\alpha = 90^0$ gleich 0, oder das Ringsystem erscheint von einem dunklen Kreuze durchzogen, dessen Arme parallel den beiden Polarisationsebenen der Nicols sind; dass dieses Kreuz nach beiden Seiten mit zunehmender Helligkeit sich ausbreiten muss und ebenso mit Entfernung von der Axe breiter wird, ergibt sich nach dem Vorigen unmittelbar. Ausserhalb der Mitte ist für $\Delta = (n + 1) \frac{\lambda}{2}$

$$R^2 = \sin^2 2\alpha,$$

für $\Delta = n\lambda$, $R^2 = 0$. Die Helligkeit schwankt somit zwischen $\sin^2 \alpha$ und 0, also für $\alpha = 45^0$ zwischen 1 und 0. Die Ringe sind in diesem Falle denen bei parallelen Nicols complementär gefärbt, da an einer und derselben Stelle im ersten Falle die Helligkeit $\cos^2 \alpha$, im zweiten Falle $\sin^2 \alpha$ ist.

Die Theorie erklärt demnach die Erscheinung in allen ihren Einzelnheiten ganz vollständig.

Die Ringerscheinungen zeigen sich in allen einaxigen Krystallen im Wesentlichen gleich, nur in einigen treten in Folge der eigenthümlichen Dispersionsverhältnisse des ausserordentlichen Strahles besondere Farbenvertheilungen auf. Besonders ausgezeichnet sind in der Beziehung Apophyllit, unterschwefelsaurer Kalk und Vesuvian. Der Apophyllit z. B. ist für blaues Licht positiv doppelbrechend, für rothes Licht negativ und für die dazwischen liegenden, also für Grün einfach brechend[1]). In Folge dessen erhalten die Farbenringe, da das Grün an keiner Stelle interferirt, einen eigenthümlichen graugrünen Ton.

1) *Herschel*, Cambridge Philos. Transact. vol. I.

§. 90.

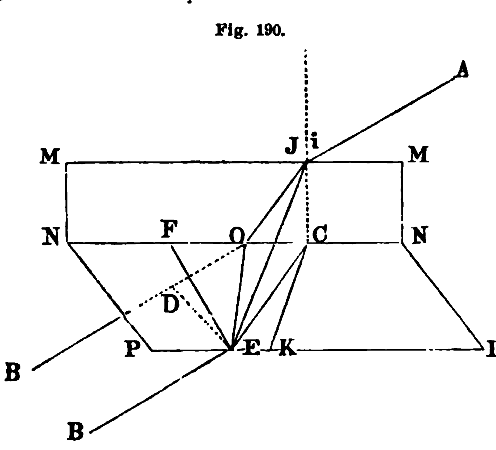
Erscheinungen in Blättchen und Platten, welche parallel der Axe aus einaxigen Krystallen geschnitten sind. Wenn man aus einem einaxigen Krystalle Platten parallel der Axe herausschneidet, und diese zwischen die beiden Nicols eines Polarisationsapparates bringt, so muss das die Platten durchsetzende Licht immer doppelt gebrochen werden, ausser wenn der Hauptschnitt derselben der Polarisationsebene des ersten Nicols parallel oder zu ihr senkrecht ist. Da die beiden senkrecht zu einander polarisirten Strahlen nun mit verschiedener Geschwindigkeit durch den Krystall sich fortpflanzen, so werden sie den Krystall mit verschiedener Phase verlassen, und so, wenn sie durch den zweiten Nicol auf eine Polarisationsebene zurückgebracht sind, zu Interferenzerscheinungen Anlass geben.

Nennen wir die Phasendifferenz der beiden im Krystall parallel und senkrecht zum Hauptschnitt des Krystalls polarisirten Strahlencomponenten Δ, den Winkel, welchen die Polarisationsebene der beiden Nicols mit einander bilden, χ, und den Winkel, welchen die Polarisationsebene des ordentlichen Strahles, welche in diesem Falle parallel der Axe des Krystalles, also für alle ordentlich gebrochenen Strahlen dieselbe ist, mit der Polarisationsebene des ersten Nicols bildet, α, so erhalten wir die resultirende Intensität durch die schon im vorigen Paragraphen abgeleitete Gleichung

$$R^2 = \cos^2 \chi + \sin 2\alpha \,.\, \sin 2 (\chi - \alpha) \,.\, \sin^2 \pi \frac{\Delta}{\lambda},$$

da wir diese Gleichung ohne Voraussetzung über die Lage der Axe abgeleitet haben. Wir haben nur den Werth von Δ entsprechend der jetzt angenommenen Lage der Axe abzuleiten. Um dahin zu gelangen sei wieder *MNNM* Fig. 190 ein Durchschnitt des Krystalls mit der Einfallsebene eines Strahles, der mit dem Hauptschnitt des Krystalles *JCK* den Winkel φ bilde; es sei *JOB* der ordentlich gebrochene, *JEB* der ausserordentlich gebrochene Strahl, dessen Brechungsebene mit dem Hauptschnitt den Winkel φ' bilde, so dass *ECO*, der

Fig. 190.



Winkel, den die Ebene des ausserordentlich gebrochenen Strahles *JCE* mit der Einfallsebene bildet, gleich $\varphi - \varphi'$ ist. Der ordentliche Brechungswinkel wieder r, der ausserordentliche r', und *NNPP* sei ein Theil der untern

Grenzfläche des Krystalles. Ziehen wir auch jetzt wieder $ED \perp OB$, so ist gerade wie bei der Ableitung des vorigen Paragraphen p. 552

$$\varDelta = OD + JO \cdot \frac{\lambda}{\lambda_0} - \frac{JE}{\varrho},$$

worin ϱ wieder der in die Richtung des gebrochenen Strahles fallende Halbmesser des Wellenellipsoides ist. Zur Bestimmung der einzelnen Theile von $\varDelta$ erhalten wir zunächst

$$OD = OE \,.\, \cos EOD,$$

worin OE die Verbindungslinie der Austrittspunkte der beiden Strahlen ist. Ziehen wir nun in der untern Grenzfläche des Krystalls $EF \perp NN$, so ist

$$OE = \frac{FO}{\cos EOF} = \frac{FC - OC}{\cos EOF}.$$

Hierin ist

$$FC = EC \,.\, \cos ECF = EC \,.\, \cos(\varphi - \varphi').$$

Da nun $EC = JC \,.\, \mathrm{tang}\, r'$, $OC = JC \,.\, \mathrm{tang}\, r$, so wird, wenn wir die Dicke der Platte $JC = d$ setzen,

$$OD = d \cdot (\mathrm{tang}\, r' \cdot \cos(\varphi - \varphi') - \mathrm{tang}\, r) \cdot \frac{\cos EOD}{\cos EOF}.$$

Um die beiden Cosinus zu bestimmen, denken wir uns um O eine Kugel gelegt, auf welcher dann die Bogen EOD, EOF und NOD ein sphärisches Dreieck bilden, dessen Seiten NOD und EOF, da die Grenzflächen des Krystalls senkrecht zur Einfallsebene sind, einen rechten Winkel einschliessen, so dass DOE die Hypotenuse dieses rechtwinkligen sphärischen Dreiecks ist. Daraus folgt nach einem bekannten Satze der sphärischen Trigonometrie

$$\cos DOE = \cos NOD \,.\, \cos EOF.$$

Da NOD der Winkel ist, den der austretende ordentliche Strahl mit der Grenzfläche bildet, so ist $\cos NOD = \sin i$

$$\frac{\cos DOE}{\cos EOF} = \sin i$$

und

$$OD = d \,.\, (\mathrm{tang}\, r' \,.\, \cos(\varphi - \varphi') - \mathrm{tang}\, r) \,.\, \sin i.$$

Zur Bestimmung von r' und φ' haben wir nach §. 79

$$\sin \varphi' = \frac{\varepsilon^2 \sin \varphi}{\sqrt{\varepsilon^4 \sin^2 \varphi + \omega^4 \cos^2 \varphi}}$$

$$\mathrm{tang}\, r' = \frac{\sin i \,.\, \sqrt{\varepsilon^4 \sin^2 \varphi + \omega^4 \cos^2 \varphi}}{\varepsilon \,.\, \sqrt{1 - \sin^2 i\, (\varepsilon^2 \sin^2 \varphi + \omega^2 \cos^2 \varphi)}},$$

worin ε und ω die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes senkrecht und parallel der Axe bedeuten. Berücksichtigen wir nun, dass

$$\sin r = \omega \,.\, \sin i; \;\; \mathrm{tang}\, r = \frac{\omega^2 \sin^2 i}{\sqrt{1 - \omega^2 \sin^2 i}},$$

so wird

$$OD = d \left\{ \frac{\sin^2 i\, (\varepsilon^2 \sin^2 \varphi + \omega^2 \cos^2 \varphi)}{\varepsilon \,.\, \sqrt{1 - \sin^2 i\, (\varepsilon^2 \sin^2 \varphi + \omega^2 \cos^2 \varphi)}} - \frac{\omega^2 \sin^2 i}{\omega \sqrt{1 - \omega^2 \sin^2 i}} \right\}.$$

Für $JO \cdot \frac{\lambda}{\lambda_0}$ erhalten wir, da $JO = \frac{d}{\cos r}$, $\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{1}{\omega}$,

$$JO \cdot \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{d}{\omega \cdot \cos r} = \frac{d}{\omega \cdot \sqrt{1 - \omega^2 \sin^2 i}}.$$

Um den letzten Theil der Phasendifferenz

$$\frac{JE}{\varrho} = \frac{d}{\cos r' \cdot \varrho}$$

zu erhalten, haben wir zunächst wieder ϱ aus der Gleichung des §. 81

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 T}{\omega^2} + \frac{\sin^2 T}{\varepsilon^2}}}$$

zu bestimmen, worin T der Winkel ist, welchen JE mit der Axe des Krystalles bildet. Den Cosinus dieses Winkels erhalten wir, wenn wir zunächst JE auf die Grenzfläche des Krystalles, welche die Axe des Krystalles aufnimmt, nach EC projiciren, und diese Projection auf die Richtung der Axe CK noch einmal projiciren. Die erste Projection ist $\sin r'$, und da die Brechungsebene des ausserordentlichen Strahles mit dem Hauptschnitte den Winkel φ' bildet, so wird

$$JE \cdot \cos T = JE \cdot \sin r' \cdot \cos \varphi',$$

somit

$$\cos T = \sin r' \cdot \frac{\omega^2 \cos \varphi}{\sqrt{\varepsilon^4 \sin^2 \varphi + \omega^2 \cos^2 \varphi}}.$$

Entwickeln wir nun aus $\tang r'$ den Werth von $\sin r'$, so erhält man nach einigen leicht zu übersehenden Reductionen

$$\cos T = \frac{\omega^2 \sin i \cdot \cos \varphi}{\sqrt{\varepsilon^2 - \omega^2 (\varepsilon^2 - \omega^2) \cos^2 \varphi \sin^2 i}}.$$

Daraus folgt

$$\sin T = \frac{\varepsilon \sqrt{1 - \omega^2 \sin^2 i \cos^2 \varphi}}{\sqrt{\varepsilon^2 - \omega^2 (\varepsilon^2 - \omega^2) \cos^2 \varphi \sin^2 i}}$$

und aus diesen beiden Ausdrücken ergibt sich unmittelbar

$$\varrho = \sqrt{\varepsilon^2 - \omega^2 (\varepsilon^2 - \omega^2) \cos^2 \varphi \sin^2 i}$$

und weiter, indem wir aus $\tang r'$ den Werth von $\cos r'$ entwickeln,

$$\frac{d}{\varrho \cdot \cos r'} = \frac{d}{\varepsilon \cdot \sqrt{1 - \sin^2 i (\varepsilon^2 \sin^2 \varphi + \omega^2 \cos^2 \varphi)}}.$$

Hieraus ergibt sich dann schliesslich für Δ, indem wir die mit gleichen Nennern versehenen Ausdrücke zusammenziehen

$$\Delta = d \left\{ \frac{1 - \omega^2 \sin^2 i}{\omega \cdot \sqrt{1 - \omega^2 \sin^2 i}} - \frac{1 - \sin^2 i (\varepsilon^2 \sin^2 \varphi + \omega^2 \cos^2 \varphi)}{\varepsilon \cdot \sqrt{1 - \sin^2 i (\varepsilon^2 \sin^2 \varphi + \omega^2 \cos^2 \varphi)}} \right\}$$

oder

$$\Delta = d \left\{ \frac{1}{\omega} \cdot \sqrt{1 - \omega^2 \sin^2 i} - \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{1 - \sin^2 i (\varepsilon^2 \sin^2 \varphi + \omega^2 \cos^2 \varphi)} \right\}.$$

Dieser Ausdruck für die Phasendifferenz zeigt, dass bei Platten, in denen die Axe parallel der Grenzfläche der Platten ist, die Phasendifferenz nicht allein von der Richtung des einfallenden Strahles, sondern auch von der Lage der Einfallsebene abhängig ist. Nur in einem Falle ist die Phasendifferenz von letzterer unabhängig, nämlich wenn der Einfallswinkel $i = 0$, wenn also ein paralleles zur Platte senkrechtes Strahlenbündel durch die Platte dringt. In dem Falle wird

$$\varDelta = d\left\{\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\varepsilon}\right\}$$

und die resultirende Intensität

$$R^2 = \cos^2\chi + \sin 2\alpha \,.\, \sin 2(\chi - \alpha) \sin^2 \pi \frac{d\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\varepsilon}\right)}{\lambda}.$$

Dieselbe hängt demnach nur ab von dem Winkel der beiden Polarisationsebenen, dem Winkel, welchen der Hauptschnitt des Krystalles mit der Polarisationsebene des ersten Nicols bildet, der Dicke der Platte und dem Unterschiede des ordentlichen und ausserordentlichen Brechungsexponenten der Platte. Bei einer gegebenen Platte ist demnach die Helligkeit im homogenen, die Färbung im weissen Lichte überall dieselbe, sie hängt dann nur von den Werthen χ und α ab. Ist χ gleich 0, sind also die beiden Nicols parallel gestellt, so wird

$$R^2 = 1 - \sin^2 2\alpha \,.\, \sin^2 \pi \frac{d\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\varepsilon}\right)}{\lambda},$$

ist $\chi = 90^0$, stehen die beiden Nicols senkrecht, so wird

$$R^2 = \sin^2 2\alpha \sin^2 \pi \frac{d\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\varepsilon}\right)}{\lambda}.$$

Die Intensitäten ergänzen sich also in diesen beiden Fällen zu 1, die Färbungen im weissen Licht sind complementär. Das Minimum der Intensität im homogenen Licht für den Fall, dass die Nicols parallel stehen, das Maximum für den Fall, dass sie gekreuzt sind, tritt ein, wenn $\alpha = 45^0$ ist, denn dann ist $\sin 2\alpha = 1$, und die resultirenden Intensitäten werden

$$R^2 = 1 - \sin^2 \pi \frac{d\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\varepsilon}\right)}{\lambda} \text{ oder } R^2 = \sin^2 \pi \frac{d\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\varepsilon}\right)}{\lambda}.$$

Im weissen Lichte werden dann die Färbungen der Platten am reinsten, und in den beiden Lagen zu einander complementär.

Man findet in der That alle diese Folgerungen in der Erfahrung bestätigt; bringt man eine dünne Platte zwischen zwei Nicols und macht das Gesichtsfeld so klein, dass nur die centralen Strahlen ins Auge gelangen, so erscheint bei parallelen Nicols das Gesichtsfeld weiss, wenn $d = 0$ ist. Dreht man die Krystallplatte, so wird es gefärbt, und die Färbung ist am reinsten, wenn $\alpha = 45^0$ ist; die Farbe ist jene, welche aus dem Weiss entsteht, wenn die

Farben fortgenommen werden, für welche die Phasendifferenz eine halbe Wellenlänge ist. Sind die Nicols gekreuzt, so ist das Gesichtsfeld dunkel, wenn $\alpha = 0$, es ist am hellsten, wenn $\alpha = 45^0$ ist, und die Farbe ist jene, welche sich aus denen zusammensetzt, für welche die Phasendifferenz eine halbe Wellenlänge ist, sie ist also complementär zu derjenigen bei parallelen Nicols.

Welche Farbe bei einer bestimmten Dicke eines Krystalls bei gekreuzten Nicols entsteht, lässt sich unmittelbar aus einer Vergleichung des für die Intensität in diesem Falle entwickelten Ausdruckes mit der für die Newton'schen Farbenringe im reflectirten Lichte geltenden Gleichung ableiten. Für letztere hatten wir bei senkrechter Incidenz (p. 354)

$$A^2 = 4\, a^2\, r^2 \,.\, \sin^2 \pi \frac{\varDelta}{\lambda},$$

worin $\varDelta$ die doppelte Dicke der Schicht an der Stelle des betrachteten Ringes bedeutet. Die Farbe der Krystallplatte bei einer Dicke d_1 ist deshalb dieselbe wie die eines Newton'schen Ringes, für eine Dicke der Schicht $\varDelta$, wenn

$$d \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\varepsilon}\right) = \varDelta$$

oder die Farbe bei einer Dicke d ist gleich der einer Luftschicht, deren Dicke gleich ist der Dicke der Platte multiplicirt mit der Differenz der beiden Hauptbrechungsexponenten des Krystalles. Bei parallelen Nicols ist die Färbung complementär. Die Aenderung der Farbe bei Aenderung der Plattendicke ist deshalb der Aenderung der Farbe in den Newton'schen Ringen bei Zunahme der Dicke der Luftschicht gleich.

Wächst die Dicke des Blättchens von 0 an stetig, so wird bei gekreuzten Nicols zuerst das Blau erster Ordnung auftreten, wenn die Phasendifferenz der brechbarsten Strahlen eine halbe Wellenlänge geworden ist; bei zunehmender Dicke, wenn die Phasendifferenz für Grün gleich einer halben Wellenlänge wird, ist diese Farbe im Maximum, aber auch Blau und Roth sind nicht weit von dem Maximum entfernt, es entsteht das Weiss erster Ordnung. Bei weiter zunehmender Dicke herrscht dann Gelb vor, dann Roth und darauf folgen die Farben der zweiten Ordnung, die der dritten und so fort, bis bei den höhern Ordnungen das Gesichtsfeld nicht mehr farbig erscheint. Letzteres tritt z. B. beim Quarz ein, sobald die Dicke der Platte $0^{mm},5$ wird [1]).

Lässt man ein schmales durch eine solche dicke Krystallplatte hindurchgegangenes Lichtbündel durch ein Prisma hindurchgehen, so fehlen, wenn wir die Nicols als gekreuzt voraussetzen, in dem Spectrum alle jene Farben, für welche

$$d \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\varepsilon}\right) = n\,\lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1$$

---

1) *Arago,* Mémoires de l'Académie de l'Institut de France 1811. *Biot,* Ebendort. *Fresnel,* Poggend. Annal. Bd. XII. Annales de chim. et de phys. XVII.

ist; man sieht also das Spectrum durch eine Anzahl schwarzer, den Fraunhofer'schen Linien parallelen Streifen durchsetzt, in ganz ähnlicher Weise wie bei den Talbot'schen Linien. Auch hier ist die Phasendifferenz zweier neben einander liegender Streifen um eine Wellenlänge verschieden, man kann deshalb durch Zählung derselben, wenn man zwei Wellenlängen als bekannt voraussetzt, jene der übrigen Farben bestimmen. Wenn man die Beobachtung an zwei Platten desselben Krystalls, aber verschiedener Dicke anstellt, und die Dicke der beiden Platten genau misst, kann man auch direkt die Wellenlängen erhalten. Am bequemsten wendet man dazu zwei keilförmig geschliffene Krystallplatten an, welche mit parallelen Axen in ähnlicher Weise zusammengelegt werden, wie die Quarzplatten des Babinet'schen Compensators. Befinden sich zwischen zwei Streifen, deren einer die Wellenlänge λ, deren anderer λ' hat, bei einer gemeinschaftlichen Dicke der beiden Platten gleich d, p Streifen, so ist

$$\frac{d\left(\frac{1}{\omega'}-\frac{1}{\varepsilon'}\right)}{\lambda'}-\frac{d\left(\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\lambda}=p, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2$$

worin nur λ und λ' unbekannt sind. Verändert man nun durch Verschiebung der Krystallkeile die Dicke der Platten allmählich, so verschieben sich die Streifen, und an der Stelle λ wird erst dann wieder ein Streifen auftreten, wenn die Dicke d_1 geworden, so dass

$$d_1\left(\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\varepsilon}\right)=(n+1)\,\lambda.$$

Hat man so durch stetiges Vergrössern der Dicke an der Stelle λ dann q Streifen vorübergehen sehen, und ist dadurch die gemeinschaftliche Dicke d_q geworden, so hat man

$$\frac{d_q\left(\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\lambda}=n+q.$$

Hieraus und aus der ersten Gleichung folgt

$$\lambda=\frac{\left(d_q-d\right)\left(\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\varepsilon}\right)}{q};$$

und mit dem so gefundenen Werthe von λ kann man dann nach der zweiten Gleichung die übrigen Wellenlängen bestimmen.

Nach dieser Methode hat Stefan die §. 67 erwähnten Wellenlängenmessungen ausgeführt.

Wenn ein convergentes Strahlenbündel durch die Platte hindurchtritt, so wird entsprechend der allgemeinen Gleichung für Δ die Phasendifferenz für die verschiedenen Stellen der Platte verschieden, nicht nur, weil für dieselben die Werthe von i, sondern auch weil die Werthe von φ verschieden sind. Bei Anwendung homogenen Lichtes werden daher die verschiedenen Punkte der Platte eine verschiedene Helligkeit zeigen müssen.

Die Punkte gleicher Helligkeit liegen auch hier auf Kurven, die aber nicht, wie bei den senkrecht zur Axe geschnittenen Platten, Kreise sind, sondern Hyperbeln wie in Fig. 191. Es treten vier Hyperbelsysteme auf,

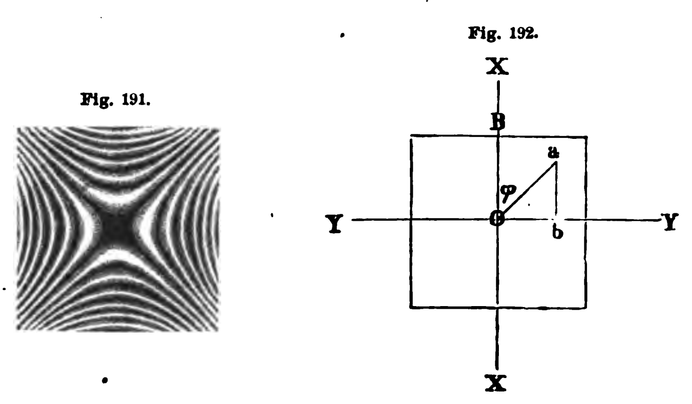


Fig. 191. Fig. 192.

deren Asymptoten mit der Richtung des Hauptschnittes in der Platte Winkel von nahezu 45^0 bilden; die letztern sind dunkel, wenn die Nicols gekreuzt sind [1]).

Dass diese Kurven Hyperbeln sein müssen, ergibt sich unmittelbar aus der allgemeinen Gleichung für die Phasendifferenz. Die Punkte gleicher Helligkeit sind auf der Platte jene, für welche die Phasendifferenz Δ einen constanten Werth hat; wir haben deshalb nur jene Punkte auf der Platte aufzusuchen, für welche Δ immer dasselbe ist. Am bequemsten gelangen wir dazu, indem wir die Phasendifferenz der verschiedenen Punkte der Platte anstatt durch i und φ durch Liniencoordinaten ausdrücken. Wir nehmen deshalb in der Platte ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt in der Mitte der Platte, das heisst dort liegt, wo die Axe des convergenten Strahlenbündels die Platte durchsetzt, und legen die Axe der x parallel der Axe des Krystalls, die Axe der y zu ihr senkrecht (Fig. 192). Die Einfallsebene eines im Punkte a die Platte durchsetzenden Strahles schneidet dann die Platte in der Verbindungslinie Oa des Plattenmittelpunktes mit dem Punkte a; der Winkel φ ist demnach gleich dem Winkel BOa, welchen die Verbindungslinie Oa mit der Axe bildet; es wird deshalb

$$\cos\varphi = \frac{ab}{Oa} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\sin\varphi = \frac{Ob}{Oa} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Um auch den Winkel i durch x und y auszudrücken, nennen wir den Abstand des Punktes, nach welchem das Strahlenbündel convergirt, und der senkrecht über O liegt, D; dann ist, da i der Winkel ist, welchen der in a

1) *J. Müller* (Freiburg), Poggend. Annal. Bd. XXXIII.

austretende Strahl in der durch Oa gelegten Ebene mit der durch O zur Platte senkrecht gelegten Richtung bildet,

$$\operatorname{tang} i = \frac{Oa}{D} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{D},$$

wofür wir auch bei dem immer sehr kleinen Werth von i setzen dürfen $\sin i$. Setzen wir diese Werthe in die allgemeine Gleichung für Δ

$$\Delta = d \left\{ \frac{1}{\omega} \cdot \sqrt{1 - \omega^2 \sin^2 i} - \frac{1}{\varepsilon} \cdot \sqrt{1 - \sin^2 i\,(\varepsilon^2 \sin^2 \varphi + \omega^2 \cos^2 \varphi)} \right\}$$

ein, so wird dieselbe

$$\Delta = d \left\{ \frac{1}{\omega} \cdot \sqrt{1 - \frac{\omega^2 (x^2 + y^2)}{D^2}} - \frac{1}{\varepsilon} \cdot \sqrt{1 - \frac{(\varepsilon^2 y^2 + \omega^2 x^2)}{D^2}} \right\}.$$

Ziehen wir die Wurzel angenähert aus, unter Voraussetzung, dass $\sin^4 i$ vernachlässigt werden darf, so wird

$$\Delta = d \left\{ \frac{1}{\omega} \left(1 - \frac{\omega^2 (x^2 + y^2)}{2 D^2} \right) - \frac{1}{\varepsilon} \left(1 - \frac{(\varepsilon^2 y^2 + \omega^2 x^2)}{2 D^2} \right) \right\}$$

und daraus

$$D^2 \left\{ \frac{\Delta}{d} \cdot \frac{2 \varepsilon}{\varepsilon - \omega} - \frac{2}{\omega} \right\} = \varepsilon\, y^2 - \omega\, x^2,$$

ein Ausdruck, welcher zeigt, dass die Punkte gleicher Helligkeit auf Hyperbeln liegen, deren Axen die Axe des Krystalls und die zu derselben senkrechte Richtung sind. Welche der Axen reell, welche imaginär ist, hängt von dem Vorzeichen des Ausdruckes auf der linken Seite ab. Für die Mitte der Platte erhalten wir den schon vorher abgeleiteten Werth der Phasendifferenz; denn setzen wir $x = 0$, $y = 0$, so wird

$$\Delta = d \left(\frac{\varepsilon - \omega}{\varepsilon\, \omega} \right).$$

Daraus folgt zunächst, dass die Helligkeit der Platte in der Mitte bei homogenem Lichte, die Färbung bei weissem Licht gleich ist jener, welche die Platte bei einem parallelen durch sie hindurchtretenden Strahlenbündel zeigt. Weiter ergibt sich daraus, dass im weissen Lichte die farbigen Kurven nur bei solchen Dicken der Platten sich zeigen, bei denen die Mitte noch farbig erscheint; sobald in der Mitte das Weiss höherer Ordnungen auftritt, sind die isochromatischen Kurven nicht mehr sichtbar. Um deshalb bei einigermassen dicken Platten die Kurven noch wahrzunehmen, ist es nothwendig, dieselben mit homogenem Lichte zu beleuchten.

Um nun die Lage der Hyperbeln genauer zu bestimmen, wollen wir den Unterschied zwischen der Phasendifferenz der Mitte und derjenigen an den verschiedenen Punkten der Platte einführen. Nennen wir diesen δ, so wird

$$\Delta = d \cdot \frac{\varepsilon - \omega}{\varepsilon\, \omega} + \delta$$

und damit

$$D^2 \cdot \frac{2\, \varepsilon\, \delta}{(\varepsilon - \omega)\, d} = \varepsilon y^2 - \omega\, x^2.$$

Für negative Krystalle ist nun der Nenner des Ausdrucks auf der linken Seite positiv, für diese erhalten wir dann zunächst ein System von Hyperbeln, dessen reelle Axen senkrecht sind zur optischen Axe; die Werthe dieser Axen erhalten wir, indem wir $x = 0$ setzen,

$$y = \pm D \sqrt{\frac{2\,\delta}{(\varepsilon - \omega)\,d}}$$

und nun für δ nach und nach die Werthe $\frac{\lambda}{2}, \frac{2\,\lambda}{2} \cdots n\,\frac{\lambda}{2}$ einsetzen; den Werthen $(2\,n + 1)\,\frac{\lambda}{2}$ entsprechen bei parallelen Nicols die dunklen, bei gekreuzten Nicols die hellen Hyperbeln. Lösen wir die letztere Gleichung nach δ auf, so wird

$$\delta = \frac{(\varepsilon - \omega)\,d}{2\,D^2} \cdot y^2,$$

es folgt also, dass mit zunehmender Entfernung von der Mitte in der Richtung senkrecht zur Axe die Phasendifferenz wächst, und zwar proportional dem Quadrate des Abstandes des betrachteten Punktes von der Mitte. Die Kurven gleicher Helligkeit rücken also um so näher zusammen, je weiter sie von der Axe entfernt sind.

Die Werthe von δ, welche an den verschiedenen Punkten der Axe stattfinden, erhalten wir, wenn wir in der allgemeinen Gleichung $y = 0$ setzen, und dann nach δ auflösen; sie werden

$$\delta = -\frac{\omega\,(\varepsilon - \omega)\,d}{2\,\varepsilon\,D^2} \cdot x^2.$$

Die Phasendifferenz ist also dort kleiner als in der Mitte, δ wird negativ. Setzen wir deshalb $\delta = -\,\delta'$, so wird

$$D^2 \cdot \frac{2\,\varepsilon\,\delta'}{(\varepsilon - \omega)\,d} = \omega\,x^2 - \varepsilon\,y^2,$$

oder ausser dem ersten Hyperbelsystem, dessen reelle Axe senkrecht zur Axe des Krystalles ist, tritt noch ein zweites auf, dessen reelle Axe parallel der Axe des Krystalles ist; auch diese Hyperbeln rücken einander um so näher, je weiter sie von der Mitte entfernt sind.

Diese beiden Hyperbelsysteme sind durch die Linien getrennt, welche dieselbe Phasendifferenz als die Mitte haben, für welche also $\delta = 0$ ist. Diese Richtungen sind die Asymptoten an den beiden Hyperbelsystemen. Die Lage derselben ergibt sich aus der Gleichung

$$\varepsilon y^2 - \omega\,x^2 = 0$$

$$y = x \cdot \sqrt{\frac{\omega}{\varepsilon}}.$$

Dieselben sind gerade Linien, deren Neigung β gegen die Axe des Krystalles hiernach gegeben ist durch

$$\tang \beta = \sqrt{\frac{\omega}{\varepsilon}}.$$

Die Neigung ist um so kleiner, je stärker die Doppelbrechung ist, sie nähert sich um so mehr 45°, je geringer der Unterschied des ausserordentlichen und ordentlichen Brechungsexponenten ist.

Den physikalischen Grund dafür, dass senkrecht zur Axe die Phasen grösser, parallel der Axe kleiner werden als in der Mitte, wenn der Einfallswinkel zunimmt, erkennt man leicht. In der Richtung y, senkrecht zur Axe treten die Strahlen stets in einer zur Axe senkrechten Richtung durch den Krystall, die Geschwindigkeit der Strahlen bleibt also dieselbe; da nun aber mit der grössern Neigung die im Krystall zurückgelegten Wege zunehmen, so muss die auf diesen Wegen erhaltene Phasendifferenz grösser werden. In der Richtung x, parallel der Axe wird dagegen mit der grössern Neigung der Strahlen auch der Winkel kleiner, den dieselben mit der Axe bilden, damit dann auch der Unterschied in den Geschwindigkeiten des ordentlichen und ausserordentlichen Strahles. Dass nun aus diesem Grunde trotzdem die mit verschiedenen Geschwindigkeiten durchlaufenen Wege grösser werden, die Phasenunterschiede kleiner werden müssen, erkennt man schon daraus, dass parallel der Axe selbst auf einem unendlich langen Wege keine Phasendifferenz mehr entsteht.

Ganz dieselben Ausdrücke, welche wir hier für negative Krystalle entwickelt haben, gelten auch für positive, nur dass an die Stelle von $\varepsilon - \omega$ jedesmal $\omega - \varepsilon$ tritt. Wir erhalten deshalb genau ebensolche Hyperbelsysteme wie sie Fig. 191 zeigt, und wie sie aus der gegebenen Discussion der allgemeinen Gleichungen folgen. Der einzige Unterschied, der zwischen beiden Arten der Krystalle besteht, zeigt sich in der Lage der Asymptoten. Denn da bei negativen Krystallen $\omega < \varepsilon$, bei positiven dagegen $\omega > \varepsilon$, so ist bei negativen der Winkel α stets kleiner, bei positiven stets grösser als 45°. Man kann daher durch Bestimmung des Winkels α den Charakter der Doppelbrechung eines Krystalles erkennen.

Bei hinreichend dünnen Platten treten an Stelle der hellen und dunkeln Hyperbeln farbige Hyperbeln auf, deren Ableitung sich unmittelbar ergibt.

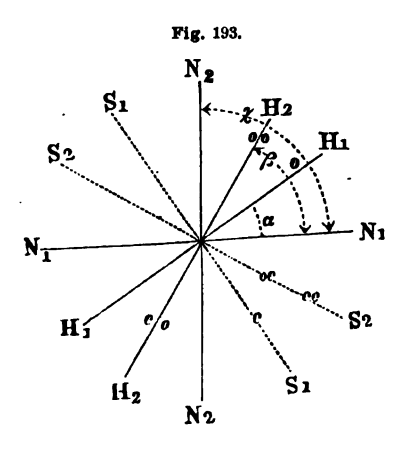
Aehnliche Farbenkurven zeigen auch anders aus den Krystallen geschnittene Platten; es würde jedoch zu weit führen, dieselben hier im Einzelnen zu beschreiben und abzuleiten, der in den ausführlich besprochenen beiden Fällen angewandte Weg führt immer zum Ziele, man hat nur um Δ zu bestimmen den der jedesmaligen Lage der Axe entsprechenden Werth von φ', r' und ϱ einzusetzen. Zuerst ausführlich untersucht sind dieselben von Müller in Freiburg [1]).

Um im weissen Lichte die farbigen Hyperbeln zu erhalten, darf nach dem Vorigen die Dicke der Platten nur eine sehr geringe sein, bei Quarz, dessen Doppelbrechung sehr gering ist, treten sie schon bei einer Dicke von $0^{mm},5$ nicht mehr auf; bei einfachen Platten dieselben darzustellen ist

1) *Müller*, Poggend. Annal. Bd. XXXV.

deshalb mit einiger Schwierigkeit verknüpft. Sehr viel bequemer kann man die Kurven aber erhalten, wenn man zwei Platten von wenig verschiedener Dicke anwendet und diese so zusammenlegt, dass ihre Hauptschnitte genau senkrecht zu einander stehen. Es bilden sich in dem Falle die Hyperbeln, wie sie einer Plattendicke entsprechen, welche gleich ist der Differenz der beiden Platten. Um dieses nachzuweisen, wollen wir die resultirende Intensität berechnen, wenn zwischen die beiden Nicols zwei Platten gebracht sind, deren Hauptschnitte mit einander einen Winkel β bilden, da wir diese Gleichungen noch an einer andern Stelle gebrauchen werden. Die Gleichung des an der Grenze des ersten Krystalls ankommenden Strahles sei

Fig. 193.



$$y = \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = \sin \xi.$$

Nun bilde der Hauptschnitt des ersten Krystalls $H_1 H_1$ (Fig. 193) mit der Polarisationsebene des ersten Nicols $N_1 N_1$ den Winkel α. Beim Eintritt in den Krystall wird dann der Strahl in einen ordentlichen und einen ausserordentlichen gebrochen; die Polarisationsebene $H_1 H_1$ des erstern bildet mit der des einfallenden Strahls den Winkel α, die des letztern $S_1 S_1$ mit $N_1 N_1$ den Winkel $90^0 + \alpha$. Nennen wir nun die Verschiebung der Phase des ordentlich gebrochenen Strahles δ_o, die des ausserordentlichen δ_e, so sind die Gleichungen beider Strahlen

$$y_o = \cos \alpha \,.\, \sin (\xi - \delta_o)$$
$$y_e = \cos (90 + \alpha) \,.\, \sin (\xi - \delta_e) = - \sin \alpha \sin (\xi - \delta_e).$$

Der Hauptschnitt des zweiten Krystalls bilde nun mit dem des ersten Nicol den Winkel β; jeder der beiden Strahlen gibt dann Anlass zu einem ordentlichen und einem ausserordentlichen Strahl, die wir mit y_{oo}, y_{eo}, y_{oe}, y_{ee} bezeichnen wollen. Die Polarisationsebene des ersten dieser Strahlen $H_2 H_2$ bildet mit y_o, aus welchem er entstanden ist, dann den Winkel $\beta - \alpha$. Die Polarisationsebene des zweiten ordentlichen Strahles y_{eo} bildet mit derjenigen des Strahles y_e, aus welchem er entstanden ist, den Winkel $\alpha + 90^0 - \beta$. Die Polarisationsebene $S_2 S_2$ des ersten aus y_o entstandenen ausserordentlichen Strahles y_{oe} bildet mit $H_1 H_1$ den Winkel $\beta + 90^0 - \alpha$, und die des zweiten ausserordentlichen Strahles y_{ee} mit der von y_e den Winkel $\beta + 90^0 - \alpha - 90^0 = \beta - \alpha$. Nennen wir nun die Verschiebung der Phase der ordentlichen Strahlen im zweiten Krystall δ_o', die der ausserordentlichen Strahlen δ_e', so werden die Gleichungen derselben nach dem Austritt aus dem zweiten Krystalle

$$y_{oo} = \cos (\beta - \alpha) \,.\, \cos \alpha \,.\, \sin (\xi - (\delta_o + \delta_o'))$$
$$y_{eo} = - \cos (\alpha + 90^0 - \beta) \,.\, \sin \alpha \,.\, \sin (\xi - (\delta_e + \delta_o')) =$$
$$- \sin (\beta - \alpha) \,.\, \sin \alpha \,.\, \sin (\xi - (\delta_e + \delta_o'))$$

$$y_{oe} = \cos(\beta + 90^0 - \alpha) \,.\, \cos\alpha \,.\, \sin(\xi - (\delta_o - \delta_e')) =$$
$$- \sin(\beta - \alpha) \,.\, \cos\alpha \,.\, \sin(\xi - (\delta_o + \delta_e'))$$
$$y_{ee} = - \cos(\beta - \alpha) \,.\, \sin\alpha \,.\, \sin(\xi - (\delta_e + \delta_e')).$$

Bildet nun die Polarisationsebene des zweiten Nicols $N_2\,N_2$ mit der des ersten den Winkel χ, so bildet die Polarisationsebene der ordentlichen Strahlen $H_2\,H_2$ mit $N_2\,N_2$ den Winkel $\chi - \beta$, jene der ausserordentlichen $S_2\,S_2$ mit $N_2\,N_2$ den Winkel $\beta + 90^0 - \chi$. Die vier der Polarisationsebene des zweiten Nicols parallelen Componenten werden dann

$$y_{oo} = \cos(\chi - \beta) \,.\, \cos(\beta - \alpha) \,.\, \cos\alpha \,.\, \sin(\xi - (\delta_o + \delta_o'))$$
$$y_{eo} = - \cos(\chi - \beta) \,.\, \sin(\beta - \alpha) \,.\, \sin\alpha \,.\, \sin(\xi - (\delta_e + \delta_o'))$$
$$y_{oe} = - \sin(\chi - \beta) \,.\, \sin(\beta - \alpha) \,.\, \cos\alpha \sin(\xi - (\delta_o + \delta_e'))$$
$$y_{ee} = - \sin(\chi - \beta) \,.\, \cos(\beta - \alpha) \,.\, \sin\alpha \sin(\xi - (\delta_e + \delta_e')).$$

Die Gleichung des resultirenden Strahles wird dann, da diese vier Strahlen dieselbe Polarisationsebene haben,

$$Y = y_{oo} + y_{eo} + y_{oe} + y_{ee}.$$

Um die resultirende Amplitude berechnen zu können, zerlegen wir jeden Strahl in zwei, deren erster die Phase ξ hat, deren zweiter gegen den ersten um eine viertel Wellenlänge verschoben ist, indem wir schreiben

$$y_{oo} = \cos(\chi - \beta) \cos(\beta - \alpha) \,.\, \cos\alpha \,.\, \cos(\delta_o + \delta_o') \,.\, \sin\xi$$
$$- \cos(\chi - \beta) \,.\, \cos(\beta - \alpha) \,.\, \cos\alpha \,.\, \sin(\delta_o + \delta_o') \,.\, \cos\xi$$

und ebenso für die übrigen drei Strahlen. Indem wir dann die je vier Strahlen gleicher Phasen direkt summiren, wird

$$Y = \Big[\cos(\chi - \beta) \left\{\cos(\beta - \alpha) \,.\, \cos\alpha \,.\, \cos(\delta_o + \delta_o') - \sin(\beta - \alpha) \,.\, \sin\alpha \cos(\delta_e + \delta_o')\right\}$$
$$- \sin(\chi - \beta) \left\{\sin(\beta - \alpha) \cos\alpha \,.\, \cos(\delta_o + \delta_e') + \cos(\beta - \alpha) \,.\, \sin\alpha \cos(\delta_e + \delta_e')\right\}\Big] \sin\xi$$
$$- \Big[\cos(\chi - \beta) \left\{\cos(\beta - \alpha) \,.\, \cos\alpha \,.\, \sin(\delta_o + \delta_o') - \sin(\beta - \alpha) \sin\alpha \,.\, \sin(\delta_e - \delta_o')\right\}$$
$$- \sin(\chi - \beta) \left\{\sin(\beta - \alpha) \cos\alpha \,.\, \sin(\delta_o + \delta_e') + \cos(\beta - \alpha) \,.\, \sin\alpha \,.\, \sin(\delta_e + \delta_e')\right\}\Big] \,.\, \cos\xi.$$

Die mit den eckigen Klammern umschlossenen Glieder dieser Ausdrücke bedeuten die Amplituden der beiden um eine viertel Wellenlänge von einander verschiedenen Strahlen; bezeichnen wir dieselben mit A und B, so ist nach §. 120 des ersten Theiles die resultirende Intensität

$$R^2 = A^2 + B^2.$$

Führt man diese Rechnungen durch, so erhält man nach allerdings ziemlich weitläufigen, jedoch keineswegs schwer zu übersehenden Reductionen für die resultirende Intensität schliesslich folgenden Ausdruck

$$R^2 = \cos^2\chi + \cos 2(\chi - \beta) \sin 2\alpha \,.\, \sin 2(\beta - \alpha) \,.\, \sin^2 \frac{\delta_e - \delta_o}{2}$$
$$+ \sin 2(\chi - \beta) \cos 2\alpha \,.\, \sin 2(\beta - \alpha) \,.\, \sin^2 \frac{\delta_e' - \delta_o'}{2}$$
$$+ \sin 2(\chi - \beta) \sin 2\alpha \,.\, \cos^2(\beta - \alpha) \,.\, \sin^2 \frac{(\delta_e - \delta_o) + (\delta_e' - \delta_o')}{2}$$
$$- \sin 2(\chi - \beta) \sin 2\alpha \,.\, \sin^2(\beta - \alpha) \,.\, \sin^2 \frac{(\delta_e - \delta_o) - (\delta_e' - \delta_o')}{2},$$

ein Ausdruck, welcher zeigt, dass die resultirende Intensität abhängig ist von der gegenseitigen Lage der Hauptschnitte und der Polarisationsebenen der Nicols. Im Allgemeinen treten, wie man sieht, vier Kurvensysteme auf, jedes derselben ist durch eins der vier letzten Glieder repräsentirt; das erste dieser Glieder gibt das Kurvensystem, wie es durch die in der ersten Platte erlangte Phasendifferenz der beiden Strahlen erzeugt wird; um dasselbe vollständig zu bestimmen haben wir nur für $\delta_e - \delta_o$ den für eine Platte bestimmten Werth von $2\pi \frac{\Delta}{\lambda}$, wie wir ihn vorhin ableiteten, einzusetzen. Das zweite Glied gibt die Kurven, wie sie die zweite Platte allein erzeugt, das dritte gibt ein Kurvensystem, welches von der Summe der in beiden Platten erzeugten Phasendifferenz abhängt und das letzte Glied die Kurven, welche durch die Differenz der durch beide Platten hervorgebrachten Phasendifferenz entsteht. Stehen die beiden Hauptschnitte auf einander senkrecht, ist also $\beta - \alpha = 90^0$, so verschwinden die drei ersten dieser vier Glieder, da $\sin 2\,(\beta - \alpha)$ und $\cos\,(\beta - \alpha)$ gleich 0 sind, und die resultirende Intensität wird

$$R^2 = \cos^2 \chi + \sin 2\,(\chi - \alpha)\,.\,\sin 2\alpha\,.\,\sin^2 \frac{(\delta_e - \delta_o) - (\delta_e' - \delta_o')}{2},$$

sie gibt also ein Hyperbelsystem, wie es eine Platte liefert, deren Dicke gleich ist der Differenz der Dicke der beiden Platten. Eine nähere Discussion desselben, sowie der Kurvensysteme des allgemeinen Falles würde zu weit führen, es möge nur darauf hingewiesen werden, dass wenn $(\beta - \alpha) = 90^0$, gar keine Interferenzkurven auftreten, wenn $\alpha = 0$; dass wenn $\beta - \alpha < 90^0$, in dem Falle nur das zweite Glied mit der Differenz $\delta_e' - \delta_o'$ übrig bleibt. Im weissen Lichte zeigen sich auch dann keine Kurven, wohl aber im homogenen Lichte[1].

§. 91.

Erscheinungen in senkrecht zur Axe geschnittenen Quarzplatten; Drehung der Polarisationsebene. Bei den einaxigen Krystallen zeigt eine senkrecht zur Axe geschnittene Krystallplatte zwischen gekreuzten Nicols nach §. 89 das Ringsystem mit dem dunkeln Kreuz; die Mitte des Gesichtsfeldes ist also stets dunkel, welches auch die Dicke der Platte ist. Von diesem Verhalten macht jedoch ein einaxiger Krystall, nämlich der Quarz eine Ausnahme. Betrachtet man eine senkrecht zur Axe geschnittene Quarzplatte in einem Polarisationsapparate mit grossem Gesichtsfeld, so erhält man anstatt der Ringfigur (Fig. 184), das in Fig. 194 dargestellte Ringsystem. Die Ringe, welche beim Kalkspath ganz nahe an der dunkeln Mitte anfangen, treten hier erst in einiger Entfernung

Fig. 194.



1) Genaueres sehe man *Radicke*, Handbuch der Optik. Bd. I. p. 400 ff.

von der Mitte auf; das schwarze Kreuz ist verschwunden, statt dessen zeigen sich nur die äussersten Ringe von schwarzen Büscheln durchzogen, den Resten des Kreuzes, deren Längsausdehnung mit der Richtung der Arme des schwarzen Kreuzes zusammenfällt. Bei Anwendung weissen Lichtes ist die Mitte niemals dunkel, sondern immer, und zwar je nach der Dicke der Platte verschieden gefärbt; bei einer Dicke von 4^{mm} ist die Mitte orangegelb gefärbt[1]).

Von da ab, wo die Ringe auftreten, zeigen sie dieselbe Farbenfolge, wie die Ringe in sonstigen Krystallen, so dass also ein verschiedenes Verhalten der Quarzplatten nur in Bezug auf diejenigen Strahlen sich zeigt, welche nahezu parallel der optischen Axe durch sie hindurchgegangen sind.

Wenn man die Nicols aus der gekreuzten Stellung dreht, so findet man, dass bei keiner Stellung derselben die Mitte dunkel oder weiss, dass sie vielmehr stets und zwar je nach dem Winkel, den die Polarisationsebenen der Nicols bilden, verschieden gefärbt erscheint. In Betreff der Reihenfolge, in welcher die Farben bei Quarzplatten gleicher Dicke auftreten, unterscheidet man zwei Arten von Quarzen, rechtsdrehende und linksdrehende. Geht man bei der ersten Art von Krystallen von einer bestimmten Stellung der Nicols aus, so erscheinen die Farben in der Reihenfolge ihrer Brechbarkeit, wenn man den analysirenden Nicol wie den Zeiger einer Uhr dreht. So erscheint bei einer Quarzplatte von 2^{mm} Dicke bei parallelen Nicols das Gesichtsfeld röthlich gefärbt. Dreht man dann bei der ersten Art Quarz den Nicol wie den Zeiger einer Uhr, so treten nach und nach gelbliche, grünliche, bläuliche Färbungen auf; bei den Quarzen der zweiten Art tritt dagegen dieselbe Reihenfolge der Farben auf, wenn man den analysirenden Nicol in entgegengesetzter Richtung, also umgekehrt wie den Zeiger einer Uhr dreht. Erstere Art nennt man rechtsdrehende, letztere Art linksdrehende Quarze.

Welche Quarzplatten rechtsdrehende, welche linksdrehende sind, lässt sich schon an den Krystallen erkennen, aus welchen die Platten geschnitten sind, vorausgesetzt, dass die Krystalle vollständig ausgebildet sind. Es kommen nämlich an den Quarzkrystallen, welche als eine Combination der sechsseitigen Säule mit der doppeltsechsseitigen Pyramide oder deren Hemiedrie dem Rhomboeder erscheinen, eigenthümliche hemiedrische zu den Krystallaxen nicht symmetrisch liegende Flächen vor, welche nur an den abwechselnden Säulenecken erscheinen. Es sind die Flächen *b* und *d* Fig. 195 und 196; Krystalle der Art nennt man plagiedrische. Die Trapezflächen *b* und *d* liegen mit den Flächen *a*, *c*, *e* in einer Zone, das heisst die Flächen *a*, *b*, *c*, *d*, *e* schneiden sich in parallelen Kanten. Die plagiedrischen Krystalle unterscheiden sich nun dadurch, dass in manchen Individuen die Kantenzone *a*, *b*, *c*, *d*, *e* von links oben nach rechts unten geht (Fig. 195), in andern von rechts oben nach links unten (Fig. 196). Erstere Krystalle sind linksdrehende, man muss also bei Platten derselben den Nicol entgegengesetzt

1) *Arago*, Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France. 1811.

wie den Zeiger einer Uhr drehen, damit die Farben in der Reihenfolge ihrer Brechbarkeit sich zeigen. Die Krystalle der zweiten Art, bei denen die Kantenzone von oben rechts nach unten links geht, sind rechtsdrehend. Die Richtung des Pfeiles gibt in beiden Fällen die Drehung des obern Nicols an, damit die Farben in der Reihe der Brechbarkeit auftreten, wenn das Licht in der Richtung von A nach B durch den Krystall tritt [1]).

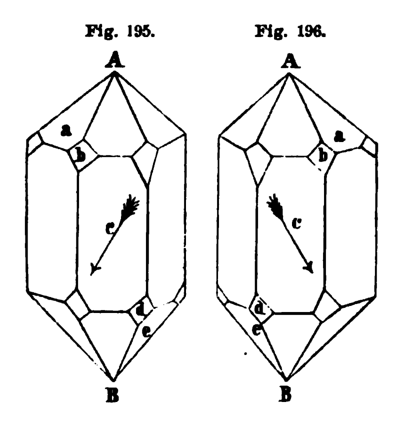


Fig. 195. Fig. 196.

Das eigenthümliche Verhalten des Quarzes, wenn weisses Licht parallel der Axe durch ihn hindurchgeht, wurde sehr bald durch die Untersuchungen Biot's [2]) über das Verhalten des Quarzes gegen homogenes Licht aufgeklärt, indem Biot nachwies, dass im Quarz eine Drehung der Polarisationsebene des Lichtes eintritt.

Nehmen wir eine Quarzplatte von 1^{mm} Dicke, wo fast nur die Mitte der Erscheinung, nicht die Ringe sich zeigen, und legen auf den obern Nicol ein gut homogen gefärbtes Glas. Bei gekreuzten Nicols ist dann bei andern Krystallen die Mitte des Gesichtsfeldes dunkel, beim Quarz jedoch nicht; liegt die senkrecht gegen die Axe geschnittene Quarzplatte zwischen den Nicol'schen Prismen, so müssen wir den obern Nicol um eine bestimmte Anzahl von Graden drehen, um das Gesichtsfeld wieder dunkel zu erhalten. Die Grösse der Drehung ist für verschiedene Farben verschieden, sie beträgt nach den Messungen von Biot für

	äusserstes Roth		$17^0,49$	mittleres	Roth	$19^0,0$
Grenze zwischen	Roth und	Orange	$20^0,47$	„	Orange	$21^0,4$
„ „	Orange „	Gelb	$22^0,31$	„	Gelb	$24^0,0$
„ „	Gelb „	Grün	$25^0,67$	„	Grün	$27^0,8$
„ „	Grün „	Blau	$30^0,04$	„	Blau	$32^0,3$
„ „	Blau „	Indigo	$34^0,57$	„	Indigo	$36^0,1$
„ „	Indigo „	Violett	$37^0,68$	„	Violett	$40^0,8$
	äusserstes Violett		$44^0,08$.			

Aus diesen Versuchen ergibt sich, dass die Polarisationsebene der parallel der Axe durch einen Bergkrystall hindurchgetretenen Strahlen gedreht wird, und weiter, dass die Drehung für die verschieden gefärbten Strahlen einen verschiedenen Werth hat. Denn durch das Nicol'sche Prisma geht das polarisirte Licht nicht hindurch, das Gesichtsfeld ist dunkel, wenn die Polarisations-

1) *J. F. W. Herschel,* Transact. of the Cambridge Philos. Soc. vol. I. On light. §. 1042. *Dove,* Farbenlehre etc. p. 248. Berlin 1853.

2) *Biot,* Mémoires de l'Acad. des sciences. T. II. Paris 1819.

ebene des Prisma senkrecht ist zu derjenigen des das Prisma treffenden Lichtes. Da nun das Gesichtsfeld dunkel ist, wenn das Prisma um eine bestimmte Anzahl Grade gedreht ist, so folgt, dass dann die Polarisationsebene des die Quarzplatte verlassenden Lichtes zu derjenigen des Prisma senkrecht ist, somit dass die Polarisationsebene des durch die Quarzplatte hindurchgegangenen Lichtes gegen diejenige des eintretenden Lichtes um ebensoviel gedreht ist, als wir das Prisma aus der gekreuzten Stellung drehen mussten, um das Gesichtsfeld wieder dunkel zu machen.

Die Grösse der Drehung ist nach den Versuchen Biot's weiter abhängig von der Dicke der Platten, und zwar ist sie einfach der Dicke der Platten proportional; um also die Drehung bei einer Platte beliebiger Dicke zu erhalten, hat man sowohl für rechts als für links drehende Quarze die Zahlen Biot's mit der in Millimetern angegebenen Dicke der Platten zu multipliciren.

Aus der Thatsache der verschiedenen Drehung für verschiedenes Licht erklärt sich nun sofort die Erscheinung, dass bei Anwendung weissen Lichtes das Gesichtsfeld niemals weiss, hell oder dunkel, sondern immer farbig ist. Wir sahen früher, dass wenn die Polarisationsebene des Nicols mit derjenigen des ihn treffenden Lichtes den Winkel α bildet, dass dann die Intensität des aus dem Nicol tretenden Lichtes dem Quadrate von $\cos \alpha$ proportional ist. Wie nun die Versuche von Biot ergeben, hat α für die verschiedenen Farben immer einen andern Werth, wenn weisses Licht durch eine Quarzplatte gegangen ist. Sind die Nicols gekreuzt, so ist für keine Farbe α gleich 0, also wird keine Farbe ausgelöscht; drehen wir den Nicol um $17^0,49$ nach der einen Seite, so wird Roth vollständig ausgelöscht, die andern Farben sind aber noch mit um so grösserer Intensität vorhanden, als ihre Polarisationsebene stärker gedreht ist. Durch weiteres Drehen verschwindet dann immer eine andere Farbe, aber die frühern treten dann wieder auf. Es verschwinden also nie alle Farben zugleich, deshalb kann das Gesichtsfeld nie dunkel werden; es sind aber auch nie alle Farben nach dem Durchtritt durch den zweiten Nicol in derselben Stärke vorhanden, als im weissen Lichte, deshalb muss das Gesichtsfeld immer farbig erscheinen. Die Farbe muss aber bei verschiedener Dicke der Platte verschieden sein, da die Drehung der einzelnen Farben mit der Dicke der Platte sich ändert.

Biot schloss aus seinen Versuchen, indem er die von ihm beobachteten Drehungswinkel mit den von Fresnel aus den Messungen Newton's bei den Farben dünner Blättchen abgeleiteten Wellenlängen verglich, dass die Drehung der Polarisationsebene dem Quadrate der Wellenlängen umgekehrt proportional sei. Wir haben p. 344 die Werthe, welche Newton für die Dicke der Schicht bei dem ersten hellen Ring erhielt, angegeben; das Vierfache dieser Werthe sind, wie wir dort sahen, die Wellenlängen der betreffenden Farben, wie sie Fresnel berechnete. Multipliciren wir das Quadrat dieser Zahlen mit den von Biot beobachteten Drehungswinkeln, so ist das Produkt in der That mit grosser Annäherung constant. So erhalten wir für das

äusserste Roth die Wellenlänge 6,45, für das äusserste Violett den Werth 4,06, in zehntausendstel Millimeter. Das Produkt aus dem Drehungswinkel ϱ und dem Quadrate von λ ist damit für Roth 72,8, für Violett 72,5.

Bei der immerhin ziemlich bedeutenden Unsicherheit in der Bestimmung der Wellenlängen aus der Farbe des angewandten Lichtes kann man aus den Beobachtungen Biot's das erwähnte Gesetz nur als ein angenähertes folgern; es ist deshalb die Frage nach der Abhängigkeit der Drehung der Polarisationsebene von der Wellenlänge später von Broch [1]) und Stefan [2]) wieder aufgenommen worden. Die von beiden angewandte Versuchsanordnung war im Wesentlichen dieselbe. Zwischen die beiden Nicols wurde die Quarzplatte gebracht, und der Apparat so aufgestellt, dass die von einem Heliostaten durch einen engen Spalt reflectirten Sonnenstrahlen durch die Nicols und die Quarzplatten hindurchtraten. Vor dem zweiten Nicol wurde ein Prisma aufgestellt, dessen brechende Kante der Spalte parallel war, so dass die Strahlen, nachdem sie durch beide Nicols und die drehende Platte hindurchgegangen waren, in ein Spectrum aus einander gelegt wurden. Blickt man dann durch das Prisma nach der Spalte, so sieht man in dem Spectrum derselben ausser den Fraunhofer'schen Linien einen, oder je nach der Dicke des Quarzes mehrere dunkle Streifen, welche von der Mitte aus gegen die Ränder allmählich heller werden. Die Streifen entsprechen jenem Lichte, dessen Polarisationsebene senkrecht ist zur Ebene des zweiten Nicols; der Winkel, um welchen bei Beobachtung eines bestimmten schwarzen Streifens der zweite Nicol aus der gekreuzten Stellung, das heisst aus der, in welcher seine Polarisationsebene zu der des ersten Nicols senkrecht ist, gedreht ist, ist dann der Drehungswinkel der betreffenden Lichtart. Um gleichzeitig die schwarzen Streifen und die Fraunhofer'schen Linien, welche die Streifen deckten, zu beobachten, liess Broch von der Bergkrystallplatte nur die obere Hälfte der Spalte bedecken, so dass er unmittelbar unter dem betreffenden schwarzen Streifen die Fraunhofer'schen Linien beobachten konnte.

Die aus 18 Messungen an 4 bis $7^{mm},6$ dicken sowohl rechts als links drehenden Quarzen abgeleiteten Werthe für die Drehungswinkel in einer 1^{mm} dicken Quarzplatte sind für die verschiedenen Fraunhofer'schen Linien folgende

B	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
$15^0,30$;	$17^0,24$;	$21^0,67$;	$27^0,46$;	$32^0,50$;	$42^0,20$.

Mit den Fraunhofer'schen Wellenlängen für

B	*C*	*E*	*G*
6,88;	6,56;	5,26;	4,29

werden die Produkte $\varrho \cdot \lambda^2$

72,32; 74,08; 76,08; 77,66;

dieselben nehmen also gegen das violette Ende hin beträchtlich zu.

1) *Broch*, Dove's Repertorium. Bd. VII. p. 115.

2) *Stefan*, Sitzungsberichte der Wiener Akad. Bd. L.

Stefan brachte die beiden Nicols mit zwischen gelegter Quarzplatte vor dem Spalt eines Spectrometers an, mass indess die Drehungswinkel der Fraunhofer'schen Linien nicht direkt, sondern bestimmte die Lage der Streifen im Spectrum, indem er die Ablenkung derselben durch ein Prisma mit dem Spectrometer mass. Er verglich so die Drehungswinkel der ausgelöschten Lichtarten mit deren Brechungsexponenten. Er wandte Platten von beträchtlich grösserer Dicke an als Broch, einmal um eine grössere Anzahl von Streifen gleichzeitig im Spectrum zu übersehen, dann aber auch, weil mit dickern Platten die Streifen schmaler werden, und so die Einstellung auf dieselben genauer wird.

Die Drehungswinkel der verschiedenen bei einer bestimmten Stellung, etwa der parallelen Stellung der Nicols beobachteten Streifen erhält man folgendermassen. Die in dem Spectrum des durch eine dicke Platte gegangenen Lichtes vorhandenen Streifen entsprechen den Lichtarten, deren Polarisationsebenen genau um ein ungerades Vielfaches von rechten Winkeln gedreht ist. Bezeichnen wir die Dicke der Quarzplatten mit D und den Drehungswinkel irgend eines Strahles für 1^{mm} Dicke mit ϱ, so werden bei parallelen Nicols an allen Stellen des Spectrums dunkle Streifen erscheinen, für welche

$$D \cdot \varrho = (2\,n + 1) \cdot 90^0$$

ist; woraus dann folgt

$$\varrho = (2\,n + 1) \cdot \frac{90^0}{D}.$$

Aus den Versuchen von Biot und Broch folgt nun, dass für den gewöhnlich sichtbaren Theil des Spectrums ϱ nicht unter 15^0 beträgt, da nach Broch der Drehungswinkel für $B = 15^0{,}30$ ist. Für den dem rothen Ende nächsten Streifen haben wir daher für n die Zahl einzusetzen, welche ϱ nicht kleiner aber am nächsten gleich 15 macht. Die Drehung des folgenden Streifen in der dicken Platte ist um 180^0 grösser, der Drehungswinkel in einer Platte von 1^{mm} Dicke ist also gleich $\varrho + 2 \cdot \frac{90^0}{D}$ u. s. f., so dass die Differenz der Drehungswinkel der auf einander folgenden Streifen constant ist. Die Drehung des Violetten ist etwa 51^0; die Zahl der im Spectrum erscheinenden Streifen ist deshalb so gross, als Werthe von n solche von ϱ liefern, die zwischen 15^0 und 51^0 liegen. Für eine Kalkspathsäule von $70^{mm}{,}08$ Dicke erhalten wir

$$\varrho = (2\,n + 1) \cdot 1^0{,}2842.$$

Der erste Werth von n, der $\varrho > 15$ werden lässt, ist $n = 6$, und dieser liefert $\varrho = 16^0{,}6946$; jene Strahlen werden also zuerst im Spectrum fehlen, für welche der Drehungswinkel diesen Werth hat. Für den folgenden Streifen ist dann $\varrho = 16^0{,}6946 + 2 \cdot 1^0{,}2842$ gleich $16^0{,}6946 + 2^0{,}5684$, und die gleiche Drehungsdifferenz gilt für die folgenden Streifen. Die Zahl der Streifen ist in diesem Falle 13, denn für $n = 19$ wird $\varrho = 50^0{,}083$.

Folgende kleine Tabelle enthält die Beobachtungen, welche Stefan bei einer Quarzplatte der angegebenen Dicke unter Anwendung eines Crownglas-

prismas von 44° 53′ 43″ brechendem Winkel angestellt hat. Das Prisma war so gestellt, dass der Strahl D das Minimum der Ablenkung erhielt, und aus dem für diesen beobachteten Minimum der Ablenkung der Einfallswinkel bestimmt. Nach der §. 16 am Schluss angegebenen Gleichung kann dann für jeden Strahl aus der beobachteten Ablenkung der Brechungsexponent berechnet werden.

Nr. des Streifens	Ablenkung Δ	Differenz $\Delta_n - \Delta_{n-1}$	Brechungsexponent μ	Differenz $\mu_n - \mu_{n-1}$
1	31° 1′ 27″		1,61090	
2	31° 10′ 37″	9′ 10″	1,61366	0,00276
3	31° 19′ 45″	9′ 8″	1,61640	0,00274
4	31° 28′ 52″	9′ 7″	1,61913	0,00273
5	31° 38′ 3″	9′ 11″	1,62187	0,00274
6	31° 47′ 10″	9′ 7″	1,62459	0,00272
7	31° 56′ 20″	9′ 10″	1,62729	0,00270
8	32° 5′ 39″	9′ 19″	1,63009	0,00280
9	32° 15′ 5″	9′ 26″	1,63289	0,00280

Die Beobachtungen zeigen, dass die Dispersion, welche durch Drehung der Polarisationsebene im Quarz eintritt, gleich ist der Dispersion, welche durch die prismatische Brechung in dem benutzten Crownglasprisma hervorgerufen wird. Denn die letzte Columne der Tabelle zeigt, dass gleichen Differenzen in den Drehungswinkeln auch gleiche Differenzen in den Brechungsexponenten entsprechen, oder dass die Zunahme der Brechungsexponenten jener der Drehungswinkel einfach proportional ist. Man kann deshalb sofort die Brechungsexponenten μ als eine lineare Function der Drehungswinkel ϱ, oder auch umgekehrt ϱ als eine lineare Function der Brechungsexponenten ausdrücken. Benutzt man alle in der Tabelle angegebenen Werthe von μ und die zugehörigen ϱ, so findet man

$$\mu = 1,59308 + 0,001067 \, . \, \varrho,$$

oder auch

$$\varrho = \frac{1}{0,001067} \cdot \mu - \frac{1,59308}{0,001067} \quad \ldots \ldots \quad (a).$$

Kennt man nun μ als Function der Wellenlänge, so kann man auch ϱ als solche ausdrücken. Stefan bestimmte deshalb die Cauchy'sche Dispersionsformel für das von ihm benutzte Crownglas, indem er die Brechungsexponenten der Fraunhofer'schen Hauptlinien mass. Er fand mit den Fraunhofer'schen Wellenlängen bei denselben die zehntausendstel Millimeter als Einheiten gesetzt

$$\mu = 1,59922 + \frac{0,87158}{\lambda^2},$$

woraus sich dann für ϱ ergibt

$$\varrho = \frac{816,85}{\lambda^2} - 1,743.$$

Aus fünf mit Quarzplatten verschiedener Dicke durchgeführten Reihen erhielt Stefan für ϱ die Gleichung

$$\varrho = \frac{816,22}{\lambda^2} - 1,753 \quad \ldots\ldots\ldots \text{(b)}.$$

Diese Gleichung für ϱ kann, wie Stefan hervorhebt, nur eine angenäherte sein, da zunächst die Proportionalität der Dispersion im Quarz und im Prisma nur eine angenäherte ist, und da ganz besonders die Cauchy'sche Formel mit zwei Constanten die Brechungsexponenten nur angenähert wiedergibt. Zur Controle der Gleichung hat deshalb Stefan auch direkt die Drehungswinkel der Fraunhofer'schen Linien bestimmt. Er erhält für dieselben

B	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
15,55;	17,22;	21,67;	27,46;	32,69;	42,37;	50,98;

während Gleichung (b) liefert

15,50; 17,19; 21,79; 27,75; 33,05; 42,58; 51,15.

Wurden in Gleichung (a) die direkt beoachteten Werthe der Brechungsexponenten der Hauptlinien eingesetzt, so ergaben sich die Werthe

15,68; 17,32; 21,71; 27,57; 32,79; 42,88;

während die von Broch gefundenen Werthe sind

15,30; 17,24; 21,67; 27,46; 32,50; 42,20;

welche sich mit grosser Genauigkeit durch die Gleichung darstellen lassen

$$\varrho = \frac{804,03}{\lambda^2} - 1,581.$$

Die Unterschiede zwischen den von Broch und Stefan direkt gemessenen Zahlen sind nicht viel kleiner als die zwischen Stefan's Messungen und den nach Stefan's Gleichungen berechneten, so dass man zu dem Schlusse berechtigt ist, dass diese Gleichung die Drehungswinkel im Quarz mit der erreichbaren Genauigkeit wiedergibt.

Noch in einer andern Weise hat Stefan die obige Gleichung geprüft. Wendet man bei der von ihm benutzten Versuchsanordnung an Stelle des Prismas ein Beugungsgitter an, so treten in dem Beugungsspectrum ganz dieselben schwarzen Streifen auf. Bestimmt man nun die Lage derselben im Spectrum, so erhält man aus der bekannten Oeffnungsbreite direkt die Wellenlängen der betreffenden Stellen, deren Drehungswinkel man kennt. Die einzelnen Streifen entsprechen Wellenlängen, deren Drehungswinkel sich um eine constante Grösse unterscheiden. Daraus folgt dann, dass wenn die Stefan'sche Gleichung richtig ist, die Differenz zwischen den reciproken Werthen der Quadrate der Wellenlängen der in einem Spectrum auf einander folgenden Streifen constant sein müssen. Bei einem Gitter, dessen Spaltbreite $0^{mm},012582$ war, erhielt Stefan folgende Werthe

Nr. des Streifens	Ablenkung	Wellenlänge λ	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{1}{\lambda^2_n} - \frac{1}{\lambda^2_{n-1}}$
1	1° 29′ 12″	0,0006669	2248	
2	1° 23′ 29″	0,0006242	2567	309
3	1° 18′ 36″	0,0005877	2825	328
4	1° 14′ 34″	0,0005575	3217	322
5	1° 11′ 7″	0,0005317	3537	320
6	1° 8′ 12″	0,0005099	3846	309
7	1° 5′ 41″	0,0004911	4146	300
8	1° 3′ 27″	0,0004744	4443	297

In der That findet man die Zahlen der letzten Columne sehr annähernd constant; wenn auch gegen das violette Ende hin eine Abnahme der Differenzen einzutreten scheint, so ist dieselbe doch so klein, dass sie den Beobachtungsfehlern zugeschrieben werden kann. Man würde deshalb auch aus diesen Beobachtungen die Stefan'sche Gleichung ableiten können, wenn sie vielleicht auch noch genauer durch eine Gleichung dargestellt würden, welche noch ein Glied mit λ^4 enthielte.

Die bisher beschriebenen und auf eine Drehung der Polarisationsebene zurückgeführten Erscheinungen in Quarzplatten bezogen sich nur auf parallel der Axe durch den Quarz dringendes Licht; auch in Betreff der Ringfiguren zeigt der Quarz einige Eigenthümlichkeiten, welche zuerst Airy 1) vollständig beschrieben hat.

Die Ringe in Quarzplatten sind nur bei parallelen oder gekreuzten Nicols kreisrund, bei der Drehung des zweiten Nicols aus diesen Stellungen nehmen sie allmählich eine viereckige Form an, indem sie sich in den Richtungen, welche die von den Polarisationsebenen der Nicol'schen Prismen gebildeten Winkel halbiren, ausbiegen. Während der Drehung nach der Rechten scheinen sich die Ringe in rechtsdrehenden Krystallen zu erweitern, in linksdrehenden zu verengern; das Umgekehrte zeigt sich bei einer Drehung nach der Linken. Bei nicht zu dicken Platten zeigt sich (Fig. 197) in der Mitte des ersten Ringes ein farbiges kurzarmiges Kreuz, dessen Arme in die Richtung der Diagonalen der Ringe fallen, und dessen Farbe mit der Drehung sowie mit der Dicke der Platten sich ändert. Bei dünnen Platten aus rechtsdrehenden Krystallen geht bei Drehung nach rechts hin die Farbe des Kreuzes von Blau durch Violett zu Gelb. Bei linksdrehenden resultirt dieselbe Farbenfolge bei entgegengesetzter Drehung.

Fig. 197.



1) *Airy*, Transactions of the Cambridge Philos. Soc. vol. IV. Poggend. Annal. Bd. XXIII.

Legt man zwei Quarzplatten auf einander, von denen die eine rechts- die andere linksdrehend ist, so ist die resultirende Drehung der Polarisationsebene gleich der Differenz der Drehungen, welche jede Platte für sich erzeugen würde. Sind daher beide Platten von gleicher Dicke, so wird die Drehung aufgehoben und die Mitte des Gesichtsfeldes bleibt bei gekreuzten Nicols dunkel. Indess verhält sich eine solche doppelte Platte doch nicht wie die eines nicht drehenden einaxigen Krystalles, sondern es erscheinen die Farbenringe mit den schwarzen Büscheln wie bei einer einzigen Platte von gleicher Dicke, ausserdem aber vier in einander gewundene Spiralen (Fig. 198), welche von einem kurzen gegen die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes und des obern Nicols geneigten Kreuze ausgehen und die Kreise durchschneiden. Die Neigung der Kreuzesarme gegen die Polarisationsebene ist gleich der Hälfte des Winkels, um welchen die Polarisationsebene durch die eine Platte gedreht wird. Die Durchschnittspunkte der Spiralen mit den farbigen Ringen liegen in der Polarisationsebene der Nicols.

Fig. 198.



Die Spiralen sind verschieden gewunden, je nachdem das Licht zuerst in die linksdrehende oder in die rechtsdrehende Platte tritt. Fig. 198 zeigt sie so, wie sie auftreten, wenn das Licht zuerst in die linksdrehende Platte tritt.

§. 92.

Ableitung der Erscheinungen im Bergkrystall. Circularpolarisation. Die im vorigen Paragraphen beschriebenen Erscheinungen in Quarzplatten sind von Fresnel [1]) durch die Annahme erklärt worden, dass in dem Quarz parallel der Axe eine eigenthümliche Art der Doppelbrechung eintrete, dass das durch den Krystall hindurchgehende Licht in zwei circular polarisirte Strahlen zerlegt werde, von denen der eine rechtsgedreht, der andere linksgedreht sei, also in zwei Strahlen zerfalle, in welchen die Aethermoleküle in kreisförmigen Bahnen sich bewegen, in der einen im Sinne der Bewegung eines Uhrzeigers, in der andern im entgegengesetzten [2]). Der eine der beiden Strahlen pflanzt sich durch den Krystall rascher fort; im rechtsdrehenden der rechts circulare, im linksdrehenden der links circular polarisirte Strahl. Es gelang Fresnel [3]) durch einen einfachen Versuch das Dasein beider Strahlen nachzuweisen. Später hat dann Airy [4]) aus der Fresnel'schen Annahme alle

1) *Fresnel,* Annales de chim. et de phys. T. XXVIII. Poggend. Annal. Bd. XXI.

2) Man sehe §. 123 des ersten Theiles.

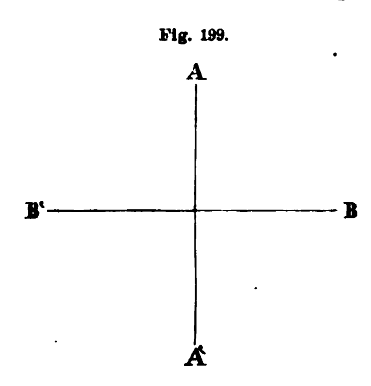
3) *Fresnel* a. a. O.

4) *Airy,* Transactions of the Cambridge Philos. Soc. Vol. IV. Poggend. Annal. Bd. XXIII.

im Vorigen angegebenen Einzelnheiten analytisch abgeleitet und berechnet. Wir begnügen uns hier, den Nachweis zu liefern, dass die Drehung der Polarisationsebene und die Biot'schen Gesetze derselben aus dieser Annahme folgen. Betreffs der eigenthümlichen Gestalten der farbigen Ringe verweisen wir auf Airy's Abhandlung.

Wie wir früher sahen, resultirt ein circular polarisirter Strahl durch die Interferenz zweier geradlinig senkrecht zu einander polarisirten Strahlen gleicher Intensität, welche in der Phase um eine viertel Wellenlänge differiren. Geschehen die Schwingungen des einen Strahles parallel *AA* (Fig. 199), die des andern parallel *BB*, so wird die Drehung der schwingenden Moleküle in dem einen oder andern Sinne erfolgen, je nachdem die Bewegung parallel *BB* der andern um ein viertel Wellenlänge voraus ist oder hinter ihr zurück ist. Hieraus ergibt sich, dass wir jeden geradlinig polarisirten Strahl als aus der Interferenz zweier entgegengesetzt circular polarisirter Strahlen gleicher Wellenlänge hervorgehend betrachten können. Denn wird die Bewegung des geradlinig polarisirten Strahles durch die Gleichung gegeben

Fig. 199.



$$y = a \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

so können wir dieselbe schreiben

$$y = \frac{a}{2} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \frac{a}{2} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x - \frac{1}{4}\lambda}{\lambda}\right)$$
$$+ \frac{a}{2} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) - \frac{a}{2} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x - \frac{1}{4}\lambda}{\lambda}\right).$$

Die Summe dieser vier Glieder ist dem Ausdrucke für y gleich; das erste und dritte Glied stellt die mit *AA* parallele Bewegung dar; stellt das zweite und vierte nun mit *BB* parallele Bewegungen dar, so ist die Phasendifferenz dieser beiden Bewegungen eine halbe Wellenlänge, die jeder einzelnen gegen die mit *AA* parallele eine viertel Wellenlänge. Die durch das zweite Glied dargestellte schwingende Bewegung ist derjenigen des ersten um $\frac{1}{4}\lambda$ voraus, die durch das vierte dargestellte hinter der des dritten um $\frac{1}{4}\lambda$ zurück. Die Bewegungen eins und zwei geben daher einen links circular polarisirten Strahl, wenn wir annehmen, dass das Licht von hinten gegen die Ebene der Zeichnung sich fortpflanzt, und die Oscillationen nach rechts und oben mit dem positiven Vorzeichen versehen; die Bewegungen drei und vier geben einen rechts circular polarisirten Strahl, in welchem die Aethertheilchen sich in dem Sinne der Bewegung eines Uhrzeigers bewegen.

Von dieser Zerlegungsweise des linear polarisirten Strahles kann man sich durch folgende Betrachtung eine deutliche Vorstellung machen. Ist der

Kreis (Fig. 200) die Bahn der Aethermoleküle in beiden Schwingungen, so wirken auf die Aethertheilchen in jedem Momente drei Impulse; z. B. wenn es sich bei A befindet, einer nach A', einer nach B und einer mit dem letztern von genau gleicher Stärke nach B'. Die beiden nach B und B' gerichteten Bewegungen heben sich daher auf und es bleibt nur die lineare Bewegung parallel AA' übrig.

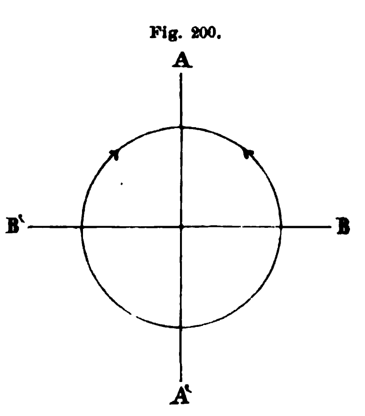


Fig. 200.

Denken wir uns nun, dass ein geradlinig parallel BB' polarisirter Strahl an irgend einer Stelle seiner Bahn in zwei solche circular polarisirte Strahlen zerfalle und in dieser Weise durch die Strecke d sich fortpflanze. Haben die beiden circular polarisirten Strahlen gleiche Wellenlänge, so wird die Bewegung des Aethers am Ende der Strecke d dargestellt durch

$$y = \frac{a}{2} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x+d}{\lambda}\right) + \frac{a}{2} \cdot \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x+d}{\lambda}\right)$$
$$+ \frac{a}{2} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x+d}{\lambda}\right) - \frac{a}{2} \cdot \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x+d}{\lambda}\right)$$

und wie man unmittelbar sieht, ist die resultirende Bewegung wieder die frühere, geradlinig parallel BB polarisirt, das heisst, die Schwingungen geschehen parallel AA, ihre Gleichung ist

$$y = a \,.\, \sin \left(\xi - 2\pi\, \frac{d}{\lambda}\right),$$

wenn wir $2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = \xi$ setzen.

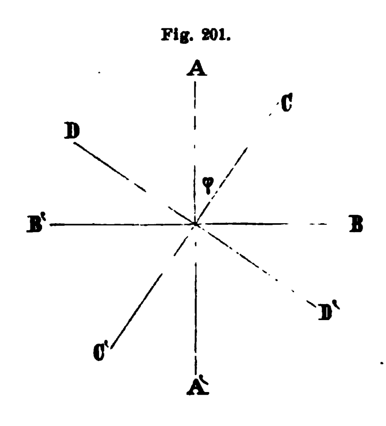
Anders jedoch, wenn wir annehmen, dass die Wellenlängen der beiden circular polarisirten Strahlen in der Strecke d verschieden, dass sie λ' und λ'' sind, dann erhalten wir für die resultirende Bewegung am Ende von d

$$y' = \frac{a}{2} \cdot \sin \left(\xi - 2\pi\, \frac{d}{\lambda'}\right) + \frac{a}{2} \cdot \cos \left(\xi - 2\pi\, \frac{d}{\lambda'}\right)$$
$$+ \frac{a}{2} \cdot \sin \left(\xi - 2\pi\, \frac{d}{\lambda''}\right) - \frac{a}{2} \cdot \cos \left(\xi - 2\pi\, \frac{d}{\lambda''}\right).$$

Man sieht, die algebraische Summe dieser vier Glieder ist nicht dem frühern Werthe von y gleich. Indess auch jetzt geht aus der Interferenz der beiden Strahlen am Ende der Strecke d, von wo aus sie sich wieder mit gleicher Wellenlänge fortpflanzen, ein linear polarisirter Strahl hervor, dessen Polarisationsebene aber gegen die frühere um einen Winkel φ geneigt ist.

Diesen Winkel φ können wir aus der Bedingung bestimmen, dass kein nach einer zur Richtung dieser Ebene senkrechten Richtung polarisirtes Licht aus dem Zusammenwirken der vier Bewegungen entstehe. Sei nun, um diese Bedingung analytisch auszudrücken, AA die ursprüngliche Schwingungsrichtung, BB die dazu senkrechte Richtung, in welcher die Componenten schwingen, welche die Circularpolarisation erzeugten. CC' bilde mit AA' den Winkel φ und DD' sei zu CC' senkrecht. Jede der vier in y' enthaltenen Bewegungen gibt dann im Allgemeinen sowohl eine CC' parallele Componente als auch eine parallel DD'. Die Summe der CC' parallelen Componenten ist

Fig. 201.



$$v = \cos\varphi \cdot \frac{a}{2} \sin\left(\xi - 2\pi \frac{d}{\lambda'}\right) + \sin\varphi \cdot \frac{a}{2} \cos\left(\xi - 2\pi \frac{d}{\lambda'}\right)$$
$$+ \cos\varphi \cdot \frac{a}{2} \sin\left(\xi - 2\pi \frac{d}{\lambda''}\right) - \sin\varphi \cdot \frac{a}{2} \cos\left(\xi - 2\pi \frac{d}{\lambda''}\right).$$

Die mit DD' parallele Componente wird ebenso

$$u = \sin\varphi \cdot \frac{a}{2} \cdot \sin\left(\xi - 2\pi \frac{d}{\lambda'}\right) - \cos\varphi \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos\left(\xi - 2\pi \frac{d}{\lambda'}\right)$$
$$+ \sin\varphi \cdot \frac{a}{2} \cdot \sin\left(\xi - 2\pi \frac{d}{\lambda''}\right) + \cos\varphi \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos\left(\xi - 2\pi \frac{d}{\lambda''}\right).$$

Ist nun $u = 0$, so resultirt nur eine mit CC' parallele Bewegung. Ob $u = 0$, das hängt offenbar nur von dem Werthe des Winkels φ ab; entwickeln wir aus der Gleichung $u = 0$ den Werth von φ, so gibt uns dieser den Winkel, welchen die Schwingungsebene des aus der Interferenz der beiden circular polarisirten Strahlen resultirenden linear polarisirten mit der ursprünglichen Schwingungsebene bildet.

Wir erhalten dann

$$\sin\varphi \left\{\frac{a}{2} \sin\left(\xi - 2\pi \frac{d}{\lambda'}\right) + \frac{a}{2} \sin\left(\xi - 2\pi \frac{d}{\lambda''}\right)\right\}$$
$$- \cos\varphi \left\{\frac{a}{2} \cos\left(\xi - 2\pi \frac{d}{\lambda'}\right) - \frac{a}{2} \cos\left(\xi - 2\pi \frac{d}{\lambda''}\right)\right\} = 0.$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\cos\left(\xi - 2\pi \frac{d}{\lambda'}\right) - \cos\left(\xi - 2\pi \frac{d}{\lambda''}\right)}{\sin\left(\xi - 2\pi \frac{d}{\lambda'}\right) + \sin\left(\xi - 2\pi \frac{d}{\lambda''}\right)}$$

und nach einer bekannten trigonometrischen Formel

$$\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}\pi \cdot d\left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda''}\right)$$

oder

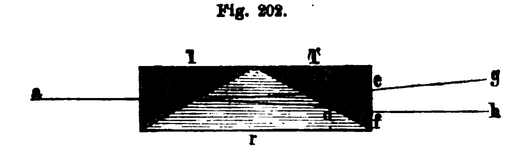
$$\varphi = \pi \cdot d \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda''}\right).$$

Die Schwingungsebene oder Polarisationsebene des aus der Interferenz der circular polarisirten Strahlen resultirenden linear polarisirten ist also in diesem Falle um einen Winkel φ gedreht, welcher der Strecke proportional ist, in der die circular polarisirten Strahlen verschiedene Wellenlängen hatten, und welcher überdies abhängt von der Wellenlänge der Strahlen. Ist ferner $\lambda'' > \lambda'$, so ist φ positiv, die Drehung geschieht in dem Sinne des Zeigers einer Uhr, ist $\lambda'' < \lambda'$, so ist φ negativ, die Drehung geschieht nach der entgegengesetzten Seite. Ist aber $\lambda'' > \lambda'$, so heisst das, der rechts circulare Strahl eilt dem andern voraus, da die Schwingungsdauer beider Strahlen die gleiche ist, ist $\lambda'' < \lambda'$, so eilt der links circulare Strahl dem andern vor.

Die Fresnel'sche Annahme, dass die parallel der Axe in einen Bergkrystall eindringenden linear polarisirten Strahlen in zwei entgegengesetzt circular polarisirte zerlegt werden, von denen der eine dem andern je nach der Farbe mehr oder weniger voreile, erklärt also die beobachteten Drehungserscheinungen vollkommen.

Um nun das Dasein dieser beiden Strahlen nachzuweisen, schnitt Fresnel aus einer Säule rechtsdrehenden Bergkrystalles ein Prisma *r*, dessen brechender Winkel 152° war, und dessen Seiten gegen die Axen des Krystalles die gleiche Neigung hatten. Ein eben solches schnitt er aus einem linksdrehenden Krystall, und theilte es dann mit einem durch die brechende Kante senkrecht zur Axe des Krystalles gelegten Schnitte in zwei Theile *l* und *l'* Fig. 202. Er kittete diese an das erste Prisma, so dass die Combination Fig. 202 entstand, ein Cylinder, dessen Axe der Axe des Krystalles parallel ist, dessen Endflächen auf derselben senkrecht sind und dessen mittlerer Theil aus einem Prisma von rechtsdrehendem Quarze, und dessen beide äussern Theile aus zwei Halbprismen linksdrehenden Quarzes bestanden. Da die Brechungsexponenten beider Quarze dieselben sind, so kann ein durch diese Combination hindurchgehender Strahl keine Ablenkung durch einfache Brechung erhalten, und da die Axe der Krystalle auf den Endflächen senkrecht ist, bei senkrechter Incidenz des Lichtes auch keine Zertheilung des Strahles durch gewöhnliche Doppelbrechung eintreten.

Fig. 202.



Fresnel fand nun aber, dass immer, wenn man einen Lichtstrahl *ab* auf den Cylinder fallen liess, zwei Strahlen *eg* und *fh* denselben verliessen und ferner, dass die austretenden Strahlen, mochte *ab* polarisirt sein oder nicht, keine Spur von Polarisation erkennen liessen, sie verhielten sich gerade so

wie die durch das Parallelepiped (§. 74) circular polarisirten Strahlen. Ein parallel der Axe durch einen Bergkrystall gehender Strahl wird also immer in zwei circular polarisirte Strahlen zerlegt, und das Auseinandertreten derselben in dem angewandten Apparate beweist, dass der eine in dem Krystall sich rascher bewegt als der andere, und dass derjenige, welcher in dem ersten Krystall sich rascher bewegt, in dem mittlern sich langsamer bewegt.

Denn in dem linksdrehenden ersten Prisma zerfällt der Strahl in die zwei circularen Strahlen, von denen der links circulare sich rascher fortpflanzt als der rechts circulare. Beide Strahlen pflanzen sich wegen der senkrechten Incidenz nach *b* fort, und treten dort in den rechtsdrehenden Krystall ein; sie behalten in demselben den Charakter ihrer Polarisation bei, aber in *r* pflanzt sich der links circulare langsamer fort, *r* ist für ihn optisch dichter, er wird daher nach *bd* zum Einfallslothe hin gebrochen. Der rechts circulare Strahl pflanzt sich aber in *r* rascher fort als in *l*, für ihn ist also *r* optisch dünner, er wird nach *bc* vom Einfallslothe fortgebrochen. Beim Eintritt in *l'* wird nun der in *r* raschere *bc* wieder der langsamere, er wird, da die brechende Kante des letzten Prismas umgekehrt liegt als die des mittlern, weiter nach oben von der brechenden Kante fort, nach *ce* gebrochen; der langsamere *bd* wird der raschere und daher nach *df* gebrochen. Schliesslich verlassen dann die Strahlen in der Richtung *eg* und *fh* den Krystall.

Dieser Versuch Fresnel's beweist somit, dass in der That in der Axe nahe parallelen Richtungen im Quarz eine Doppelbrechung eigenthümlicher Art stattfindet, so dass in diesen Richtungen ein ordentlicher Strahl nicht existirt. Vor kurzem ist es dann von Lang nicht nur gelungen diese Doppelbrechung nachzuweisen, sondern auch die Brechungsexponenten der beiden Strahlen zu messen, indem er durch ein Quarzprisma, dessen brechende Kante senkrecht zur optischen Axe war und dessen Seiten nahe gleich gegen die optische Axe geneigt waren, rechts oder links circulares Licht hindurchgehen liess [1]). Der Quarz war rechtsdrehend. Die gefundenen Werthe der Brechungsexponenten sind:

Winkel des Strahls mit der Axe	*n* des rechts circularen Strahls	*n* des links circularen Strahls
0° 27′ 0″	1,5441887	1,5442605
1° 54′ 7″	1,5441925	1,5442649
2° 48′ 4″	1,5441942	1,5442766
4° 40′ 0″	1,5442043	1,5443009
5° 4′ 8″	1,5442088	1,5443043

Der Brechungsexponent des ordentlichen Strahles in Quarz, wenn das Licht einen grossen Winkel mit der Axe bildet, ist nach von Lang 1,5442243.

1) *von Lang*, Sitzungsber. der Wiener Akad. LX. Bd. November 1869.

Man sieht also wie in der Nähe der Axe der Brechungsexponent des ordentlichen Strahles, hier der rechts circulare kleiner wird, während der des ausserordentlichen Strahles nicht so weit abnimmt, wie er thun würde, wenn im Quarz keine Circularpolarisation vorhanden wäre. Der Einfluss der Circularpolarisation auf beide Strahlen dauert bis etwa das Licht mit der Axe einen Winkel von 25° bildet; dann ist der Brechungsexponent des ordentlichen Strahles gleich dem oben angegebenen und der des ausserordentlichen wie er aus den gewöhnlichen Gesetzen der Doppelbrechung folgt.

§. 93.

Drehung der Polarisationsebene in andern Körpern. Die Eigenschaft, die Polarisationsebene des Lichtes zu drehen, kommt dem Quarz nur im krystallisirten Zustande, in der Form als Bergkrystall zu; amorphe Kieselsäure oder kieselsaure Salze zeigen diese Eigenschaft nicht. Lange galt der Quarz für den einzigen Krystall, der diese Eigenschaft besitzt, bis Marbach[1]) dieselbe an mehreren dem regulären System angehörigen Krystallen entdeckte, und zwar am chlorsauren Natron, bromsauren Natron, bromsauren Nickeloxydul und einigen andern. Bei diesen und den übrigen Krystallen des regulären Systems, die keine Hauptaxe haben, ist es auch nicht eine bestimmte Richtung, nach welcher das Licht den Krystall durchsetzen muss, damit eine Drehung der Polarisationsebene eintritt, sondern es tritt eine solche ein, sobald das Licht durch zwei gegenüberliegende Begrenzungsflächen der Krystalle durch dieselben hindurchgeht. In sofern ist also das Verhalten der Krystalle ein etwas anderes als beim Quarz, bei dem die circulare Polarisation nur nahe parallel der Axe eintritt.

Ganz ebenso wie der Quarz verhält sich nach den Beobachtungen von Descloizeaux[2]) der krystallisirte Zinnober; derselbe krystallisirt wie der Quarz im hexagonalen System und ist ebenso optisch positiv, der ordentliche Brechungsexponent ist gleich 2,854, der ausserordentliche ist 3,201. Auch beim Zinnober kommen rechts- und linksdrehende Krystalle vor; das Drehungsvermögen ist etwa 15 mal stärker als bei dem Quarze.

Ebenso hat Descloizeaux bei dem im quadratischen System krystallisirenden wasserfreien schwefelsaurem Strychnin die Drehung der Polarisationsebene beobachtet und zwar bei als Quadratoctaeder ausgebildeten Krystallen, welche senkrecht zur Hauptaxe sehr leicht in dünne Blättchen gespaltet werden können. Parallel der Axe sind die Krystalle linksdrehend und zwar beträgt ihr Drehungsvermögen etwa $^2/_3$ von dem des Quarzes.

In einer Beziehung unterscheidet sich aber das schwefelsaure Strychnin wesentlich von den bisher besprochenen circular polarisirenden Medien; bei ihm ist die Circularpolarisation nicht an die Krystallform gebunden, sondern

---

1) *Marbach,* Poggend. Annal. Bd. XCI. Bd. XCIV. Bd. CXIX.

2) *Descloizeaux,* Comptes Rendus. T. XLIV. p. 876 u. 909.

es dreht die Polarisationsebene auch im gelösten Zustande, wie das schon früher Bouchardat[1]) nachgewiesen hat.

Dadurch bildet dieses Salz gewissermassen den Uebergang zu der zweiten Klasse circular polarisirender Medien, bei denen im krystallisirten Zustande eine Drehung der Polarisationsebene sich nicht nachweisen lässt, welche aber die Polarisationsebene im amorphen Zustande oder in Lösungen zu drehen im Stande sind. Zu diesen Substanzen gehören nach den Versuchen von Biot[2]) zunächst Rohrzucker, Campher, Weinsäure und alle weinsauren Salze. Alle diese Substanzen sind krystallisirt optisch zweiaxig, und bei zweiaxigen Krystallen, in denen es keine Richtung gibt, in welcher nur eine einfache Brechung stattfindet, lassen sich die Erscheinungen der circularen Doppelbrechung nicht beobachten, sie werden eben von der gewöhnlichen Doppelbrechung verdeckt. Diejenigen der erwähnten Körper aber, welche man im amorphen Zustande fest darstellen kann, zeigen in diesem die Circularpolarisation. Giesst man eine mit ein wenig Essigsäure versetzte concentrirte klare Auflösung von Rohrzucker von Syrupconsistenz auf eine kalte Marmorplatte, so trocknet dieselbe zu durchsichtigen Platten ein; dieselben drehen die Polarisationsebene, und das Drehungsvermögen ist gleich dem des gelösten Rohrzuckers. Ebenso ist es Biot gelungen, die Drehung durch feste Weinsäure nachzuweisen; man erhält solche amorphe feste Weinsäure, indem man dieselbe unter gewissen Vorsichtsmassregeln schmilzt und dann in flache Glasgefässe ausgiesst, oder indem man die Weinsäure mit Borsäure zusammenschmilzt.

Vorzugsweise lässt sich aber die Drehung dieser Substanzen im gelösten Zustande beobachten, wie zuerst Biot und Seebeck[3]) und später Biot[4]) allein gezeigt haben. Von den genannten Substanzen drehen die Polarisationsebene:

Rechts Rohrzuckerlösung, Weinsäure, Campher in Alkohol, ausserdem Dextrin, Camphersäure und einige Alkaloide und ihre Verbindungen[5]).

Links Lösungen von arabischem Gummi, Morphin, Strychnin und einige andere Alkaloide[6]).

Ein eigenthümliches Verhalten zeigt nach den Beobachtungen von Pasteur[7]) die Traubensäure. Die gewöhnliche Traubensäure dreht die Polarisationsebene nicht; Pasteur gelang es diese in zwei Säuren zu spalten, die

---

1) *Bouchardat,* Annales de chim. et de phys. III. Sér. T. IX.

2) *Biot,* Mémoires de l'Académie. T. XIII. Comptes Rendus. T. XV. T. XVI. T. XVIII. T. XIX. T. XXIX.

3) *Biot* und *Seebeck.* Biot, Traité de physique. T. IV. Paris 1818.

4) *Biot,* Annales de chim. et de phys. T. LII. Poggend. Annal. Bd. XXVIII. XXXII. XXXVIII. Mémoires de l'Académie. T. II. Paris 1819. T. XIII.

5) *Bouchardat,* Annales de chim. et de phys. III. Sér. T. IX.

6) *Bouchardat* a. a. O. und *Buignet,* Comptes Rendus. T. LII. p. 1084.

7) *Pasteur,* Annales de chim. et de phys. III. Sér. T. XXVIII. Poggend. Annal. Bd. LXXX.

Rechtstraubensäure und die Linkstraubensäure; beide drehen sowohl für sich als in ihren Salzen die Polarisationsebene gleich stark, die eine aber zur Rechten, die andere zur Linken.

Ausser diesen Lösungen haben Biot und Seebeck die Circularpolarisation noch bei einer Anzahl Flüssigkeiten entdeckt; so ist rechtsdrehend Citronenöl, linksdrehend Lorbeeröl und Terpentinöl.

Beim Terpentinöl haben Biot und Gernez[1]) auch die Drehung der Polarisationsebene in Dämpfen nachgewiesen, indem sie das Licht durch mehrere Meter lange mit diesen Dämpfen gefüllte Röhren hindurchgehen liessen, und ebenso hat Biot bei durch eine Kältemischung erstarrtem Terpentinöl Circularpolarisation beobachtet.

Die Einwirkung, welche diese ganze Gruppe von Körpern auf das Licht ausübt, muss nach allem dem ihre Ursache in der molekularen Beschaffenheit und nicht in den Krystallisationsverhältnissen, wie beim Quarz und Zinnober, seinen Grund haben. Während beim Quarz es nur eine bestimmte Lagerung der Moleküle ist, welche die circulare Doppelbrechung bewirkt, zeigen diese Substanzen ganz besonders im flüssigen Zustande, in welchem von einer bestimmten Anordnung der Moleküle keine Rede sein kann, diese Art der Doppelbrechung; es muss dieselbe demnach von den Molekülen als solchen unabängig von ihrer Lage bewirkt werden.

Dem entspricht auch, dass nach den Versuchen von Biot die Drehung nicht nur wie beim Quarz der Länge der durchstrahlten Schicht, sondern dass sie auch bei gleicher Länge der durchstrahlten Schicht dem Gehalte derselben an activer Substanz proportional ist. Bei den Lösungen nimmt die Drehung einfach der Menge der gelösten Substanz und bei Mischungen aus activen und nicht activen Flüssigkeiten, wie von Terpentinöl und Aether, einfach der Menge der activen Flüssigkeit proportional zu[2]).

Lösen wir demnach p Gramme einer activen Substanz in q Gramme Lösungsmittel und ist δ die Dichtigkeit der Lösung, so ist $\frac{p+q}{\delta}$ das Volumen der Lösung und die Menge der in der Volumeinheit vorhandenen activen Substanz ist $\frac{p}{p+q} \cdot \delta$. Füllen wir nun mit einer solchen Lösung eine Röhre von der Länge l, so können wir den Drehungswinkel für irgend eine homogene Farbe, welche durch die Röhre hindurchstrahlt, schreiben

$$\varrho = [\varrho] \cdot \frac{p}{p+q} \cdot \delta \cdot l,$$

wenn wir mit $[\varrho]$ eine für die betreffende active Substanz charakteristische Constante bezeichnen. Diese Constante nennt Biot das molekulare Drehungs-

1) *Gernez,* Annales de l'école normale superieure. T. I. 1864.
2) *Biot,* Mémoires de l'Académie. T. II. Paris 1819.

vermögen [1]). Dieselbe bedeutet den Drehungswinkel in einer Schicht der reinen Substanz von der Länge eins dividirt durch die Dichtigkeit der betreffenden Substanz. Denn setzen wir $q = 0$ und $l = 1$, so wird

$$\varrho = [\varrho] \cdot \delta; \ [\varrho] = \frac{\varrho}{\delta} \cdot$$

Das molekulare Drehungsvermögen kann man auch noch etwas anders definiren; setzen wir $l = 1$ und $\frac{p}{p+q} \cdot \delta$ gleich 1, so wird $\varrho = [\varrho]$, so dass das molekulare Drehungsvermögen einer Substanz gleich dem Drehungswinkel in einer Schicht von der Länge 1 ist, wenn die active Substanz in einem indifferenten Mittel so vertheilt ist, dass sich in einem Kubikcentimeter ein Gramm befindet. Als Längeneinheit nimmt Biot bei den Flüssigkeiten eine Schicht von ein Decimeter Länge.

Um das molekulare Drehungsvermögen zu bestimmen, hat man nach dem Vorigen nur eine hinreichend lange mit der betreffenden Flüssigkeit gefüllte Röhre zwischen die Nicols eines Polarisationsapparates zu bringen, der Dove'sche ist dazu vorzüglich geeignet, und dann die Drehung für die einzelnen Farben zu beobachten oder nach der Broch'schen Methode das aus dem zweiten Nicol dringende Licht mit dem Prisma aufzufangen. Nach der ersten Methode hat Biot [2]) für eine Reihe von Substanzen das molekulare Drehungsvermögen für ein bestimmtes rothes Licht, dessen Wellenlänge Wild [3]) aus der Angabe Biot's, dass es im Quarz eine Drehung von 18°,414 erfahre, mit der Stefan'schen Gleichung zu 6,35 zehntausendstel Millimeter berechnet, bestimmt. Unter andern findet Biot folgende Werthe:

Rohrzucker	$[\varrho] =$	$+\ 55^0,225$
Traubenzucker		$+\ 59^0,8$
Dextrin		$+\ 138^0,68$
Terpentinöl verschiedener Art	$\delta = 0,872$	$-\ 27^0,1$
		$-\ 25^0,1$
Citronenöl $\delta = 0,847$		$+\ 45.$

Das positive Vorzeichen bedeutet rechts-, das negative linksdrehend.

Um das Drehungsvermögen des Quarzes in derselben Weise auszudrücken, müssen wir die Zahl 18,144 mit 100 multipliciren und durch die Dichtigkeit

1) *Biot*, Mémoires de l'Académie. T. II. T. XIII.

2) *Biot*, Mémoires de l'Académie. T. XIII. Den Werth $[\varrho]$ für Rohrzucker gibt Biot an verschiedenen Stellen verschieden an; der oben angegebene findet sich a. a. O. p. 129. Comptes Rendus. T. XV. p. 705 steht

$$[\varrho] = 54,64.$$

Liebig's Annal. Bd. 52

$$[\varrho] = 54,762.$$

Denselben Werth führt *Broch*, Dove's Repert. Bd. VII für $[\varrho]$ nach Biot an.

3) *Wild*, Ueber ein neues Polaristrobometer. Bern 1865.

desselben 2,653 dividiren; es wird 694°,04, also sehr viel mal grösser als das der Flüssigkeiten.

Genauer ist die Drehung für Citronenöl und Terpentinöl von Wiedemann bestimmt worden [1]); er findet für die Drehung in einer 100mm langen Schicht nach der Broch'schen Methode die Werthe

B	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
34,0;	37,9;	48,5;	63,3;	77,5;	106,0;

welche sich nach Stefan [2]) durch die Gleichung darstellen lassen

$$\varrho = \frac{2145,67}{\lambda^2} - 12,54.$$

Für nicht rectificirtes linksdrehendes Terpentinöl erhielt Wiedemann die Werthe

B	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
21,5;	23,4;	29,3;	36,8;	43,6;	55,9,

welche der Gleichung entsprechen

$$\varrho = \frac{1039,2}{\lambda^2} - 0,64.$$

Ein in einem Strome von Wasserdampf rectificirtes Terpentinöl war rechtsdrehend, und zwar

C	*D*	*E*	*F*	*G*
10,9;	14,0;	18,6;	23,2;	32,7;

Werthe, welche sich mit grosser Annäherung wiedergeben lassen durch

$$\varrho = \frac{650,8}{\lambda^2} - 4,4.$$

So verschieden auch die Dispersion durch diese Flüssigkeiten ist, so lässt sich dieselbe hiernach doch immer durch die Stefan'sche Gleichung darstellen.

Die Drehung von Rohrzuckerlösungen ist später von Arndtsen [3]) genauer untersucht worden; derselbe gibt für das molekulare Drehungsvermögen folgende nach der Broch'schen Methode gefundene Werthe:

	C	*D*	*E*	*b*	*F*	*c*
$[\varrho] =$	53°,41;	67°,07;	85°,406;	88°,56;	101,38;	126°,325.

Diese Werthe lassen sich sehr genau wiedergeben durch die Gleichung

$$[\varrho]_z = \frac{2538}{\lambda^2} - 5,58.$$

Wenn wir das Drehungsvermögen des Quarzes in derselben Weise ausdrücken, so wird

$$[\varrho]_q = 100\,\frac{\varrho}{\delta} = \frac{30766}{\lambda^2} - 66,1$$

---

1) *Wiedemann,* Poggend. Annal. Bd. LXXXII.
2) *Stefan,* Sitzungsberichte der Wiener Academie. Bd. L. (Juni 1864).
3) *Arndtsen,* Poggend. Annal. Bd. CV.

und dividiren wir diesen Ausdruck durch 12,12, so wird

$$\frac{1}{12,12}[\varrho]_q = \frac{2538}{\lambda^2} - 5,45 = [\varrho]_z,$$

so dass also die Dispersion durch die Drehung der Polarisationsebene beim Zucker dieselbe ist wie beim Quarz; dies Drehungsvermögen für irgend eine Lichtart durch Zucker ist darnach $\frac{1}{12,12}$ des molekularen Drehungsvermögen des Quarzes für dieselbe Lichtart; oder man hat die Drehungswinkel beim Quarz für eine Dicke von 100^{mm} durch 32,155 zu dividiren, um die Drehungswinkel durch eine 100^{mm} dicke Schicht einer Zuckerlösung zu erhalten, welche in einem Cubikcentimeter ein Gramm Zucker enthält.

Einen etwas von dem so erhaltenen verschiedenen Werth für das Verhältniss zwischen Drehungswinkel des Quarzes und Zucker erhält man aus der Angabe Clerget's[1]), dass eine Schicht von 200^{mm} Dicke einer Zuckerlösung, welche im Cubikcentimeter 0,16471 Gramm reinen Zucker enthält, die Polarisationsebene sostark drehe, wie eine Quarzplatte von 1^{mm} Dicke.

Daraus folgt, dass man den Drehungswinkel einer 100^{mm} dicken Quarzplatte durch 2 . 16,471 = 32,942 dividiren müsste, um das molekulare Drehungsvermögen des Zuckers zu erhalten. Für die Fraunhofer'sche Linie *D* wird darnach $[\varrho] = 65,96$, also um mehr als 1^0 kleiner als nach Arndtsen.

Wegen dieser Verschiedenheit hat deshalb Wild[2]) dies Drehungsvermögen des Zuckers noch einmal nach einer im nächsten Paragraphen zu besprechenden Methode bestimmt; er findet für $[\varrho]$ bei Anwendung der Natronflamme den Werth

$$[\varrho] = 66^0,417;$$

somit muss darnach die Drehung im Quarz durch 32,627 dividirt werden, um das Drehungsvermögen des Rohrzuckers zu erhalten, eine Zahl, die fast genau mit dem Mittel der beiden frühern Zahlen übereinstimmt.

Ein ganz eigenthümliches von den übrigen Körpern sehr abweichendes Verhalten zeigt die Weinsäure[3]) indem das Drehungsvermögen im Allgemeinen mit abnehmender Wellenlänge nicht zunimmt, und indem das molekulare Drehungsvermögen mit der Menge des zugesetzten Lösungsmittels, Wasser oder Alkohol sehr beträchtlich sich ändert. Wenn die in einem Theil Lösung

---

1) *Clerget,* Annales de chim. et de phys. III. Sér. T. XXVI. Die Clerget'sche Zahl ist später von einer aus Pouillet, Schlösing, Barresville, Duboscq zusammengesetzten Commission in 16,35 corrigirt worden, wonach die Drehung im Quarz durch 32,70 zu dividiren ist. Man sehe *Landolt,* Bericht über die chemischen Analysen bei den Raffinirungsversuchen im Jahre 1866. Verhandl. des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleisses in Preussen. 1867.

2) *Wild,* Ueber ein neues Polaristrobometer. Bern 1865.

3) *Biot,* Mémoires de l'Académie. T. XV. Paris.

vorhandene Menge des Lösungsmittes e Theile beträgt, so kann man das molekulare Drehungsvermögen darstellen durch

$$[\varrho] = a + b \cdot e$$

und nach Arndtsen[1]) sind die Werthe von a und b für

	a	b
C	$a = + 2^0{,}748$	$b = + 9^0{,}446$
D	$1^0{,}950$	$+ 13^0{,}030$
E	$0^0{,}153$	$+ 17^0{,}514$
b	$- 0^0{,}832$	$+ 19^0{,}147$
F	$- 3^0{,}598$	$+ 23^0{,}977$
e	$- 9^0{,}657$	$+ 31^0{,}437.$

Wasserfreie Weinsäure dreht also die ersten drei Lichtarten zur Rechten, die letzten drei zur Linken, was auch Biot bei den schon vorhin erwähnten Weinsäureplatten bestätigt fand. In der Lösung liegt, bis die Wassermenge etwa 0,6 beträgt, das Maximum der Drehung bei E und bei den stärker brechbaren Strahlen nimmt sie wieder ab; mit wachsender Wassermenge rückt es weiter gegen das violette Ende.

Das molekulare Drehungsvermögen nimmt im Allgemeinen mit steigender Temperatur ab; nach den Versuchen von Gernez[2]) ist das molekulare Drehungsvermögen bei der Temperatur t für die Linie D in

Pomeranzenöl $[\varrho] = 115^0{,}91 - 0{,}1237\, t - 0{,}000016\, t^2$

Bigaradenöl $[\varrho] = 118^0{,}55 - 0{,}1175\, t - 0{,}00216\, t^2$

Terpentinöl (links) $[\varrho] = 36^0{,}61 - 0{,}004437\, t.$

Das Dispersionsvermögen ist indess von der Temperatur unabhängig, so dass das Verhältniss der Drehung eines Strahles bei zwei verschiedenen Temperaturen von der Farbe desselben unabhängig ist.

Gernez gelang es auch unter Anwendung von 4^m langen Röhren das Drehungsvermögen der Dämpfe obiger Flüssigkeiten zu messen; es ergab sich, dass es demjenigen der Flüssigkeiten bei derselben Temperatur fast genau gleich war, für die beiden ersten Substanzen war es etwas kleiner.

Für Rohrzuckerlösungen ist nach Versuchen von Tuchschmid[3]) das Drehungsvermögen von der Temperatur unabhängig und für Weinsäurelösungen wächst es sogar mit steigender Temperatur.

Eine circular polarisirende Substanz behält im Allgemeinen die Fähigkeit die Polarisationsebene zu drehen bei, wenn sie in Verbindungen eingeht; so sind im Allgemeinen die weinsauren Salze drehend. Indess bleibt das Drehungsvermögen dabei im Allgemeinen nicht ungeändert, ja es kann selbst der Fall eintreten, dass die Drehung die entgegengesetzte wird. So geht

1) *Arndtsen,* Poggend. Annal. Bd. CV.

2) *Gernez,* Annales de l'école normale. T. I. Paris 1864.

3) *Tuchschmid,* Einfluss der Temperatur auf das molekulare Drehungsvermögen. Inauguraldissertation. Zürich 1869.

Rohrzucker durch Behandeln mit verdünnten Mineralsäuren durch Aufnahme von ein Atom Wasser in Invertzucker über, welcher die Polarisationsebene stark links dreht. Nach Tuchschmid ist das Drehungsvermögen desselben bei der Temperatur t

$$[\varrho] = 27{,}79 - 0{,}3206\, t,$$

so dass also für diesen Zucker das Drehungsvermögen auch rasch mit der Temperatur abnimmt.

§. 94.

Saccharimetrie. Das von Biot bewiesene Gesetz, nach welchem die Drehung der Polarisationsebene, welche eine active Substanz in einem inactiven Lösungsmittel hervorbringt, der Dicke der Schicht und der Menge der gelösten Substanz proportional ist, macht es möglich, wenn man das molekulare Drehungsvermögen der Substanz kennt, aus der beobachteten Drehung der Polarisationsebene den Gehalt der Lösung an drehender Substanz abzuleiten [1]). Aus dem Biot'schen Gesetze erhielten wir in den Bezeichnungen des vorigen Paragraphen den Ausdruck

$$\varrho = [\varrho] \cdot \frac{p}{p+q} \cdot \delta \cdot l$$

und lösen wir diese Gleichung nach $\frac{p}{p+q} \cdot \delta$ auf, so wird

$$\frac{p}{p+q} \cdot \delta = \frac{\varrho}{[\varrho] \cdot l}$$

und der Ausdruck auf der linken Seite bedeutet, wie wir sahen, die in einem Kubikcentimeter der Lösung vorhandene Gewichtsmenge der activen Substanz. Kennt oder bestimmt man dann ausserdem die Dichtigkeit der Lösung, so kann man sofort auch den Procentgehalt der Lösung an activer Substanz, den Werth $\frac{p}{p+q}$ ableiten.

Von besonderer praktischer Wichtigkeit ist diese Bestimmungsweise zur Untersuchung des Gehaltes einer Lösung an Zucker geworden; da das Drehungsvermögen des Zuckers nach den im vorigen Paragraphen mitgetheilten Versuchen, besonders denen von Wild mit grosser Genauigkeit bestimmt ist, so hat man nur eine mit der zu untersuchenden Zuckerlösung gefüllte, an ihren Enden mit planparallelen Glasplatten geschlossene Röhre von hinreichender Länge zwischen die Nicols eines Polarisationsapparates zu bringen, und die Drehung der Polarisationsebene zu messen. Man wendet dazu am besten das homogene Licht der Natriumflamme an und stellt die Nicols zunächst so, dass das Gesichtsfeld dunkel ist; ist dann die Röhre dazwischen gebracht, so hat man wieder den zweiten Nicol so weit zu drehen, bis das Gesichtsfeld wieder dunkel ist. Die Anzahl c Gramme Zucker im Kubikcenti-

1) *Biot,* Comptes Rendus. T. XV. p. 523 ff. 619 ff.

meter der Lösung erhält man dann, wenn die Länge der Röhre in Millimeter gegeben ist, aus der Gleichung

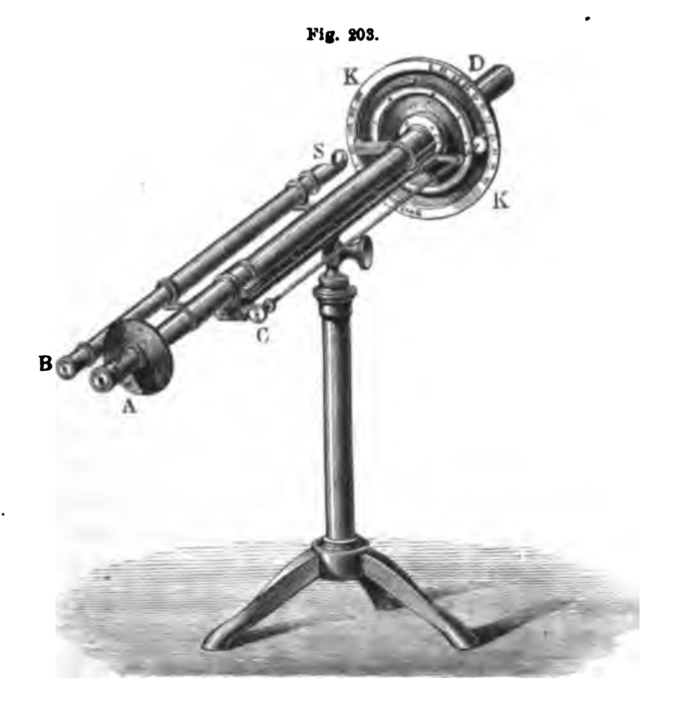
$$c = \frac{100}{[\varrho]} \cdot \frac{\varrho}{l} = 1{,}50564 \cdot \frac{\varrho}{l}.$$

In dieser Weise ist das Mitscherlich'sche Saccharimeter eingerichtet; dasselbe besteht aus einem Stativ zur Aufnahme der Röhren, an dessen Enden die Nicols angebracht sind, von denen das Ocularnicol mit einem Index versehen ist und in der Axe eines getheilten Kreises drehbar ist.

Diese einfache Form des Saccharimeters ist indess nicht im Stande, eine grosse Genauigkeit zu geben, da als Kennzeichen der erreichten Einstellung die grösste Dunkelheit des Gesichtsfeldes dient, ein Punkt, den man durchaus nicht mit grosser Sicherheit erkennen kann.

Wild [1]) hat deshalb ein anderes Mittel benutzt, um den Moment der richtigen Einstellung zu erkennen, nämlich das Verschwinden einer Interferenzerscheinung. Die Einrichtung, welche Wild seinem Apparate, den er Polaristrobometer nannte, gab, zeigt Fig. 203. Auf einem Dreifusse ist

Fig. 203.



ganz wie bei dem Dove'schen Polarisationsapparate zunächst eine Schiene befestigt, welche an ihrem einen Ende einen ringförmigen Aufsatz trägt, der

1) *Wild,* Ueber ein neues Polaristrobometer. Bern 1865. Die Apparate werden von Hermann u. Pfister in Bern in vorzüglicher Ausführung geliefert

mit einem Index versehen ist. In die kreisförmige Oeffnung des Aufsatzes ist die den ersten Nicol enthaltende Hülse *D* eingepasst, so dass sie mit sanfter Reibung sich in dem Ringe drehen kann. Auf die Hülse ist die Kreisscheibe *K* fest aufgesetzt, welche nahe dem Rande auf der dem Ocularende *A* des Apparates zugewandten Seite eine Theilung trägt, auf welche der feste Index einsteht. Auf die Kreisscheibe ist ein gezahnter Ring fest aufgeschraubt, in dessen Zähne der durch den Kopf *C* zu drehende Trieb eingreift, so dass man durch Drehung des Kopfes *C* den Nicol mit dem getheilten Kreise drehen und der Polarisationsebene des Nicols jede Lage geben kann. Die Grösse der Drehung wird an dem getheilten Kreise abgelesen, dessen Theilstriche an dem festen Index vorübergehen. Zur Ablesung dient das Ablesefernrohr *BS*, welches bei *S* zur Beleuchtung der Theilung mit einem schräg gestellten Spiegel versehen ist.

An dem andern Ende der auf dem Dreifuss befestigten Schiene trägt ein zweiter ringförmiger Aufsatz den Oculartheil des Apparates; derselbe enthält von *A* angefangen zuerst ein Nicol'sches Prisma, hinter demselben zwei als einfaches Fernrohr wirkende Linsen, und hinter der zweiten Linse den dem Wild'schen Apparate seine grosse Genauigkeit gebenden Theil, zwei zusammengekittete Kalkspathplatten, jede etwa 2^{mm} dick. Die Platten sind so geschnitten, dass die Axe einen Winkel von 45^0 mit den Grenzflächen bildet, und so zusammengekittet, dass die Hauptschnitte der Platten möglichst genau auf einander senkrecht stehen.

Die Erscheinungen, welche ein solches Plattenpaar im polarisirten Licht zeigt, und welche zuerst Savart zur Erkennung von polarisirtem Licht anwandte, ergeben sich aus den Gleichungen, welche wir §. 91 für gekreuzte Platten ableiteten. Wir erhielten dort für die resultirende Intensität, wenn ein solches Plattenpaar sich zwischen zwei Nicols befindet, deren Polarisationsebene den Winkel χ mit einander bilden, wenn der Hauptschnitt der ersten Platte mit der Polarisationsebene des ersten Nicols den Winkel α, der der zweiten Platte mit dem des ersten Nicols den Winkel β bildet, den Ausdruck

$$
\begin{aligned}
R^2 = \cos^2\chi &+ \cos 2(\chi-\beta)\cdot\sin 2\alpha\cdot\sin 2(\beta-\alpha)\cdot\sin^2\frac{\delta_e-\delta_o}{2}\\
&+ \sin 2(\chi-\beta)\cdot\cos 2\alpha\cdot\sin 2(\beta-\alpha)\cdot\sin^2\frac{\delta_e'-\delta_o'}{2}\\
&+ \sin 2(\chi-\beta)\cdot\sin 2\alpha\cdot\cos^2(\beta-\alpha)\cdot\sin^2\frac{(\delta_e-\delta_o)+(\delta_e'-\delta_o')}{2}\\
&- \sin 2(\chi-\beta)\cdot\sin 2\alpha\cdot\sin^2(\beta-\alpha)\cdot\sin^2\frac{(\delta_e-\delta_o)-(\delta_e'-\delta_o')}{2}.
\end{aligned}
$$

Ganz derselbe Ausdruck gilt auch für diesen Fall, wenn wir die Werthe von δ, die Verschiebungen der Phasen beim Hindurchgehen der einzelnen Componenten durch die Platten, unter der Voraussetzung berechnen, dass die Axen mit den Ebenen der Platten einen Winkel von 45^0 bilden. Ohne diese Rechnung durchzuführen, sieht man sofort, dass wenn die Hauptschnitte

der beiden Platten zu einander senkrecht sind, also $\beta = \alpha + 90^0$ ist, dass dann der Ausdruck für R^2 übergeht in

$$R^2 = \cos^2 \chi + \sin 2(\chi - \alpha) \sin 2\alpha \sin^2 \frac{(\delta - \delta_o) - (\delta_e' - \delta_o')}{2},$$

dass also dann nur ein System von Kurven übrig bleibt, welches, wie man beim Hineinblicken in den Wild'schen Apparat auch sofort sieht, in einem System paralleler schmaler Fransen besteht. Auch dieses Fransensystem verschwindet, wenn sin 2α gleich 0 ist, wenn also der Hauptschnitt des ersten Krystalles mit der Polarisationsebene des ersten Nicols den Winkel 0 oder 90^0 bildet.

Die Erscheinung ist dieselbe im weissen wie im homogenen Lichte, nur mit dem Unterschiede, dass bei Anwendung des erstern die Streifen farbig sind.

Ist $\beta - \alpha$ nicht genau 90^0, so wird die Erscheinung im weissen Licht nicht geändert, da bei der angewandten Plattendicke die den drei ersten Gliedern der Gleichung entsprechenden Kurvensysteme sämmtlich das Weiss höherer Ordnung zeigen; im homogenen Lichte sieht man aber dann, wenn α nahe gleich oder gleich 0 ist, anstatt der dem letzten Gliede entsprechenden Streifen die dem zweiten Gliede, also der zweiten Platte entsprechenden Streifen auftreten. Dieselben sind unter 45^0 gegen die ersten geneigt, aber immer so schwach, dass sie die Beobachtung nicht stören, wenn, wie es bei dem Wild'schen Apparate immer der Fall ist, $\beta - \alpha$ sehr nahe 90^0 ist.

In welcher Weise nun diese Erscheinung bei dem Wild'schen Apparate benutzt wird, ergibt sich unmittelbar. Man stellt zunächst das im Oculartheile befindliche Fernrohr so ein, dass man die Streifen scharf sieht; das Fernrohr ist mit einem Andreaskreuz-förmigem Fadenkreuz versehen, und man stellt den ganzen Apparat so, dass die Streifen horizontal sind und dann den stumpfen Winkel der Kreuzesarme halbiren. Dann dreht man den ersten Nicol so weit, bis die Streifen gerade verschwinden. Bringt man dann zwischen den ersten Nicol und die Platten eine mit einer drehenden Flüssigkeit gefüllte Röhre oder einen festen drehenden Körper, so treten die Streifen wieder auf. Dreht man dann aber den ersten Nicol so weit nach entgegengesetzter Seite, als die Polarisationsebene in dem drehenden Körper nach der einen gedreht wird, so wird die Polarisationsebene des in die gekreuzten Platten eindringenden Lichtes wieder dem Hauptschnitte der ersten Platte parallel, und die Streifen verschwinden wieder. Der Winkel also, um welchen man den ersten Nicol hat drehen müssen, damit die Streifen wieder verschwinden, ist der Drehungswinkel in dem zwischen die Nicols gebrachten Körper. Ist die drehende Substanz eine Zuckerlösung in einer Röhre von l^{mm} Länge, so erhält man den Gehalt der Lösung in derselben Weise wie bei dem Mitscherlich'schen Saccharimeter aus der Gleichung

$$c = \frac{100}{[\varrho]} \cdot \frac{\varrho}{l} = 1{,}50564 \cdot \frac{\varrho}{l}.$$

Um die Grösse der Drehung zu messen und so aus dieser den Zuckergehalt der angewandten Flüssigkeit zu bestimmen, wird die Drehung der Flüssigkeit mit jener einer Quarzplatte von verschiedener aber bekannter Dicke verglichen. Zu dem Ende tritt das Licht, nachdem es die Röhre *R* verlassen hat, zunächst in eine rechtsdrehende Bergkrystallplatte bei *c* und aus dieser in zwei keilförmige Platten eines linksdrehenden Quarzes, welche, wie in Fig. 204 β, zusammengestellt sind, so dass sie eine planparallele Platte von linksdrehendem Krystall bilden. In der Stellung Fig. 204 β ist diese Platte genau von derselben Dicke als die rechtsdrehende Platte *c*, so dass also die Wirkung beider Platten sich ganz aufhebt. Die Keile k' und k'' sind, wie es die Figur zeigt, mit Glasprismen zu planparallelen Platten zusammengekittet und in Messingrähmchen gefasst, welche unten gezähnt sind. In die Zähne passt ein Trieb, welcher an dem Knopfe *s* befestigt ist, so dass eine Drehung dieses Knopfes die beiden Keile in einer zur Axe des Instrumentes senkrechten Richtung, den einen nach rechts, den andern nach links hin verschiebt. Die Dicke der aus den beiden Theilen zusammengesetzten planparallelen Platte wird dadurch in genau bestimmbarer Weise geändert. Dreht man den Knopf *s* von oben gesehen wie den Zeiger einer Uhr, so geht k' nach rechts, k'' nach links, die Dicke wird vergrössert, dreht man entgegengesetzt, so wird die Dicke kleiner. Die Veränderung der Dicke wird durch einen kleinen in der Hauptfigur bei *k* angedeuteten auf dem Keile k' befestigten Maassstab, auf welchen eine auf dem Rahmen des Keiles k'' befestigte Marke einsteht, beobachtet. Steht die Marke auf 0, so sind die Keile in der mittlern Stellung, in welcher die Summe ihrer Dicken gleich ist der Dicke der Platte *c*, steht sie auf 100, so ist die Dicke der linksdrehenden Keile 1^{mm} grösser als die der rechtsdrehenden Platte.

Das Verfahren, um mittels dieses Apparates den Zuckergehalt einer Lösung zu bestimmen, ergibt sich aus der Beschreibung des Apparates unmittelbar. Damit die Doppelplatte gleich gefärbt sei, muss die algebraische Summe aller Drehungen der Polarisationsebene des Lichtes, nachdem es die Doppelplatte verlassen hat, gleich 0 sein. Ist in der Röhre *R* keine oder eine nicht drehende Flüssigkeit, so ist das der Fall, wenn die Marke an der Theilung auf 0 steht, da dann die Drehung der Polarisationsebene nach rechts hin in der Platte *c* durch die genau ebenso grosse Drehung in den beiden Keilen aufgehoben wird. Ist aber in der Röhre *R* eine rechtsdrehende Zuckerlösung enthalten, so muss die Dicke der linksdrehenden Platte vergrössert werden, und zwar um so viel, dass in ihr die Polarisationsebene so viel nach links gedreht wird, wie in der Flüssigkeit der Röhre *R* und in der Platte *c* dieselbe nach rechts gedreht wird. Die Drehung der Flüssigkeit wird also durch eine Verschiebung der Keile compensirt; diese Verschiebung ist daher das Maass des Drehungsvermögens der Flüssigkeit.

Die empfindliche Farbe der Doppelplatte erscheint natürlich nur, wenn die in der Röhre enthaltene Flüssigkeit nicht gefärbt ist. Um jedoch auch bei

gefärbten Flüssigkeiten die empfindliche Farbe zu erhalten, lässt Soleil das Licht, nachdem es durch das zweite Kalkspathprisma gegangen, noch durch eine Bergkrystallplatte und einen Nicol gehen, dessen Polarisationsebene gedreht werden kann. Dadurch kann die Farbe der Doppelplatte geändert werden, ohne dass die Färbung der beiden Häften eine verschiedene wird, da das aus dem zweiten Kalkspathprisma hervortretende Licht auf ein und dieselbe Polarisationsebene zurückgeführt ist. Es ist indess leicht ersichtlich, dass die Flüssigkeit nur sehr wenig gefärbt sein darf, da sonst die Absorption des Lichtes in ihr so bedeutend ist, dass keine Beobachtung mehr möglich ist.

Das Soleil'sche Saccharimeter ist hauptsächlich dazu bestimmt, den Rohrzuckergehalt in Rohzucker zu bestimmen; man löst zu dem Zwecke $16^{gr},35$ der zu untersuchenden Substanz und bringt die Lösung auf genau 100 Cubikcentimeter, so dass jedes Cubikcentimeter 0,1635 der Substanz enthält und füllt mit dieser Lösung eine der dem Apparate beigegebenen Röhren von 200^{mm} Länge. Enthält die Substanz ausser dem Rohrzucker keinen andern activen Körper, so liest man auf der Skala direkt die Menge des in 100^{gr} enthaltenen Rohrzuckers ab. Denn da $16^{gr},35$ Rohrzucker zu 100 Cubikcentimeter gelöst in einer Schicht von 200^{mm} die Polarisationsebene so stark drehen, wie eine Quarzplatte von 1^{mm} Dicke, so muss man die Keile bis zu dem Punkte 100 verschieben, wenn die Substanz reiner Rohrzucker ist. Ist aber nur 0,75, 0,5 ... der gelösten Menge Rohrzucker, so hat man zur Compensation der Drehung in der Flüssigkeit nur 0,75, 0,5 .. Mm. Quarz nöthig; da diese Stellen mit 75, 50 ... bezeichnet sind, so geben diese Zahlen die Anzahl Gramme Rohrzucker in 100^{gr} der angewandten Substanz.

In den meisten Fällen ist aber in den Rohzuckern ausser dem Rohrzucker noch Invertzucker vorhanden, welcher die Polarisationsebene zur Linken dreht. Bezeichnen wir das molekulare Drehungsvermögen des Invertzuckers mit $[\varrho']$, so wird für ein Gemenge $p + p'$ Rohrzucker und Invertzucker, welche zu 100^{cc} gelöst sind,

$$\varrho = [\varrho] \cdot \frac{p}{100} \cdot l - [\varrho'] \frac{p'}{100} \cdot l.$$

Um nun die Menge p zu bestimmen, verwandelt man durch Behandlung mit verdünnter Salzsäure und Erwärmen auf etwa 70^0 den Rohrzucker in Invertzucker, und beobachtet nach eingetretener Abkühlung neuerdings die Drehung, indem man jetzt eine in dem Maasse längere Röhre nimmt, als die Flüssigkeit durch den Zusatz an Salzsäure verdünnter geworden ist. Bei den Soleil'schen Apparaten ist zu dem Zwecke eine Röhre von 220^{mm} beigegeben; man setzt deshalb zur Inversion bei Anwendung solcher Röhren zu 100^{cc} Lösung, welche $16^{gr},35$ Rohrzucker enthalten, 10^{cc} rauchende Salzsäure. Da dann auch die p Gramme Rohrzucker Invertzucker geworden sind, so dreht jetzt die Flüssigkeit um $\varrho_1{}^0$ zur Linken, und wir erhalten

$$-\varrho_1 = -\left\{[\varrho'] \cdot \frac{p}{100} \cdot l + [\varrho'] \frac{p'}{100} \cdot l\right\}$$

und aus beiden Gleichungen

$$p = \frac{\varrho + \varrho_1}{([\varrho] + [\varrho']) \cdot l} \cdot 100.$$

Da $[\varrho']$, wie wir im vorigen Paragraphen angaben, mit der Temperatur sich rasch ändert, so ist bei der Beobachtung der invertirten Lösung auf die Temperatur der Lösung zu achten, und für $[\varrho']$ der entsprechende Werth für die beobachtete Temperatur einzusetzen.

Für das Soleil'sche Saccharimeter wird die Rechnung etwas einfacher. Die dort benutzten $16^{gr},35$ fester Substanz geben, wenn sie reiner Rohrzucker sind, invertirt $17^{gr},21$ Invertzucker. Diese lenken bei 0^0 die Polarisationsebene, wie sich aus der angeführten Drehungsconstanten ergibt, so stark ab, wie eine linksdrehende Quarzplatte von $0^{mm},4416$ Dicke, bei t^0 wie eine Quarzplatte von $0,4416 - 0,005058\ t$. Würde demnach eine reine Rohrzuckerlösung invertirt, auf 110^{cc} gebracht und in der Röhre von 220^{mm} Länge untersucht, so würde das Saccharimeter $44,16 - 0,5058\ .\ t$ Grade an der Skala zur Linken gedreht werden müssen. Sind deshalb in den gelösten $16^{gr},35$ Substanz p^{gr} Rohrzucker und p'^{gr} Invertzucker, so ist die Anzahl der abgelesenen Grade

$$G = \frac{p}{16,35} \cdot 100 - \frac{p'}{17,21} (44,16 - 0,5058\ t).$$

Nach der Inversion ist jeder Gramm Rohrzucker $\frac{17,21}{16,35}$ Gr. Invertzucker geworden, deshalb

$$- G_1 = - \left\{ \frac{p \cdot \frac{17,21}{16,35}}{17,21} + \frac{p'}{17,21} \right\} (44,16 - 0,5058\ t),$$

woraus durch

$$100 \frac{p}{16,35} = \frac{100\ (G + G_1)}{144,16 - 0,5058\ t}$$

sich der Gehalt der angewandten Substanz an Rohrzucker in Procenten ergibt. Ebenso kann man auch die Menge des Invertzuckers berechnen.

Die Benutzung des Soleil'schen Apparates zu andern Versuchen über die Drehung der Polarisationsebene beschränkt sich auf solche Substanzen, welche die gleiche Dispersion wie der Quarz haben, da die Anwendung des Apparates, oder vielmehr seine Genauigkeit wesentlich auf der Herstellung der empfindlichen Farbe, also der Anwendung des weissen Lichtes beruht. Bei Benutzung homogenen Lichtes sind die Hälften der Doppelplatte nur verschieden hell, und die Compensation ist erreicht, wenn beide Hälften gleiche Helligkeit haben, ein Punkt, der nicht mit derselben Genauigkeit bestimmt werden kann, als der gleicher Färbung[1]).

1) Eine Vergleichung der Genauigkeit des Wild'schen und Soleil'schen Apparates gibt *Landolt*, Bericht über die chemischen Analysen bei den Raffinirungsversuchen mit Rüben-Rohzuckern im Jahre 1866. Verhandlungen des Vereins für Gewerbefleiss in Preussen 1867.

§. 95.

Farbenerscheinungen in zweiaxigen Krystallen. Wenn man ein dünnes Blättchen oder eine dickere Platte aus einem zweiaxigen Krystalle geschnitten zwischen die beiden Nicols eines Polarisationsapparates bringt, so müssen aus denselben Gründen, wie bei den einaxigen Krystallen, die beiden Strahlen, in welche ein in den Krystall eintretender Strahl zerfällt, nach dem Durchtritte interferiren und so in parallelem Licht Farben, in convergentem farbige Kurven erzeugen. Die Erscheinungen werden jedoch, wegen der verwickelteren Brechungsgesetze etwas complicirter sein. Ist bei Anwendung von parallelem Licht die Dicke des Blättchens überall dieselbe, so wird die Phasendifferenz der durchtretenden Strahlen überall dieselbe sein, das Blättchen also im homogenen Lichte überall gleich hell, im weissen überall mit derselben Farbe erscheinen. Die Farbe des Blättchens wird bei gleicher Dicke eine andere sein müssen, wenn die Doppelbrechung sich ändert, deshalb wird bei Blättchen desselben Krystalles die Farbe sich mit der Richtung ändern, mit welcher parallel das Blättchen aus dem Krystall geschnitten ist. Ist das Blättchen senkrecht zu einer der optischen Axen geschnitten, so wird das Gesichtsfeld bei gekreuzten Nicols dunkel erscheinen, neigen wir die Richtung, nach welcher das Blättchen geschnitten ist, indem wir es aber immer senkrecht zur Ebene der optischen Axe lassen, so nimmt die Phasendifferenz zu, bis es parallel der ersten oder zweiten Mittellinie geschnitten ist, indem dann die Schwingungen der grössern und mittlern oder der kleinern und mittlern Elasticitätsaxe parallel sind. Noch mehr nimmt die Phasendifferenz zu, wenn die Richtung, nach welcher das Blättchen geschnitten ist, gegen die Ebene der optischen Axen geneigt wird, sie wird am grössten, wenn das Blättchen der Ebene der optischen Axen parallel geschnitten wird, da dann die Schwingungen der grössten und kleinsten Elasticitätsaxe parallel werden. Die Blättchen würden daher, wenn sie nach diesen verschiedenen Richtungen geschnitten werden, die Farben der Newton'schen Skala (§. 58) zeigen, und das mit der Ebene der optischen Axen parallel geschnittene wird am weitesten vom Schwarz der ersten Ordnung entfernt sein.

Die Aenderung der Farbe mit der Dicke der Blättchen folgt denselben Gesetzen wie bei den einaxigen Krystallen.

Dasselbe gilt von den Aenderungen der Erscheinung, wenn das Blättchen in seiner Ebene gedreht wird, es zeigt sich keine Aenderung in der Farbe, sondern nur in der Intensität derselben. Am hellsten erscheint auch hier die Färbung, wenn die beiden Polarisationsebenen des Blättchens mit denen der Nicols Winkel von 45^0 einschliessen, da dann die beiden Componenten, in welche das einfallende Licht zerlegt wird, gleiche Intensität haben, die Strahlen also, welche schliesslich die Phasendifferenz einer halben Wellenlänge haben, ganz ausgelöscht werden.

Bei unveränderter Stellung des Blättchens geht auch hier und aus denselben Gründen bei einer Drehung des obern Nicols aus der gekreuzten in die parallele Stellung die Farbe durch Weiss in die complementäre über.

Am besten wendet man zur Untersuchung dieser Erscheinungen von den zweiaxigen Krystallen den Glimmer oder Gyps an, da diese von allen am vollkommensten spaltbar sind und in den feinsten Blättchen erhalten werden können. Die Spaltungsebene im Glimmer ist zur Ebene der optischen Axen senkrecht, parallel dem durch die mittlere und grösste Axe der Elasticität gelegten Hauptschnitte der Elasticitätsfläche.

Der Gyps ist parallel der Ebene der optischen Axen, also in der Ebene der grössten und kleinsten Elasticitätsaxe vollkommen spaltbar. Ein Gypsblättchen von $0^{mm},027$ Dicke zeigt das Weiss der ersten Ordnung bei gekreuzten Nicols, bei $0^{mm},044$ das Roth derselben Ordnung; bei einer Dicke von $0^{mm},05$ — 0,116 zeigt es nach und nach die Farben der zweiten, bis 0,18 die der dritten Ordnung, bei einer Dicke schliesslich von $0^{mm},395$ erscheint es farblos, in einem aus allen Farben zusammengesetzten Weiss. Schleift man daher ein Gypsblättchen keilförmig, so dass es an dem einen Ende eine Dicke von $0^{mm},027$, an dem andern von $0^{mm},395$ hat, so zeigt es neben einander die Farbenstreifen der verschiedenen Ordnungen, wie man sie in den Newton'schen Ringen sieht. Ein Glimmerblättchen erscheint gefärbt, so lange es weniger als $0^{mm},658$ dick ist [1]).

Da man Glimmerblättchen mit grosser Leichtigkeit beliebig dünn erhalten kann, so sind sie sehr geeignet, um circular oder elliptisch polarisirtes Licht herzustellen, indem man die Dicke des Blättchens so wählt, dass die Phasendifferenz der beiden senkrecht zu einander polarisirten Strahlen eine viertel Wellenlänge wird. Bilden dann die Polarisationsebenen des Glimmerblättchens mit denen der Nicols Winkel von 45^0, so dass die beiden Strahlen in demselben von gleicher Intensität sind, so sind nach dem Frühern die Bedingungen der Circularpolarisation, zwei senkrecht zu einander polarisirte Strahlen gleicher Intensität mit der Phasendifferenz von $^1/_4$ Undulation, erfüllt. Durch eine Drehung des Glimmerblättchens in seiner Ebene geht dann das circular polarisirte Licht in elliptisch polarisirtes und dieses wieder in linear polarisirtes Licht über, wenn man das Blättchen um 45^0 gedreht hat, so dass keine Doppelbrechung eintritt.

Bringt man ein circular polarisirendes Blättchen zwischen die Nicols, so tritt bei Drehung des obern Nicols gar keine Aenderung in der Helligkeit des Gesichtsfeldes ein, das Licht verhält sich also in dieser Beziehung wie unpolarisirtes natürliches Licht. Man hat jedoch in den bereits beschriebenen Ringerscheinungen ein sehr bequemes Mittel, um das circular polarisirte Licht vom natürlichen zu unterscheiden. Lässt man natürliches Licht auf eine

---

1) *Arago*, Mémoires de l'Institut de France. T. XII. 1811. *Fresnel*, Poggend. Annal. Bd. XII. p. 366. Annales de chim. et de phys. T. XVII.

Krystallplatte fallen, welche eins der beschriebenen Ringsysteme zeigt, so sind dieselben nicht wahrzunehmen, lässt man circular oder elliptisch polarisirtes Licht auffallen, so erscheinen sie, aber mit gewissen charakteristischen Modificationen [1]), welche wir zum Theil im nächsten Paragraphen besprechen werden.

Die Circularpolarisation kann sich der Natur der Sache nach immer nur auf Licht bestimmter Farbe erstrecken.

Will man weisses Licht circular polarisiren, also die Erscheinungen der Ringe bei der Circularpolarisation im weissen Lichte untersuchen, so wendet man am besten ein Glimmerblättchen an, welches dem gelben Licht vollständig circulare Polarisation ertheilt, den Strahlen dieser Farbe also eine Phasendifferenz von $^1/_4$ Wellenlänge ertheilt, da dann die übrigen Lichtarten am wenigsten von der circularen Polarisation abweichen. Ein solches Blättchen zeigt zwischen gekreuzten Nicols das Weiss der ersten Ordnung.

Wendet man anstatt parallelen convergentes Licht an, so dass die Phasendifferenz der unter verschiedener Neigung in das Auge dringenden Strahlen verschieden ist, so ist das Gesichtsfeld nicht mehr überall gleich hell, sondern es zeigen sich auch hier, im homogenen Licht, helle und dunkle Kurven. Im Allgemeinen sind die Erscheinungen von denen in einaxigen Krystallen nicht sehr verschieden; so zeigen sich auch Hyperbeln, wenn die Platten parallel der Ebene der optischen Axen geschnitten sind, wie bei den einaxigen Krystallen, wenn dieselben parallel der optischen Axe geschnitten sind.

Besonders zu bemerken sind die Ringerscheinungen nur dann, wenn die Platten senkrecht zur ersten Mittellinie, welche den spitzen Winkel der optischen Axen halbirt, geschnitten sind.

Ist der Winkel der optischen Axen, wie beim Salpeter, Topas, Baryt, Zucker, klein genug, um bei Polarisationsapparaten mit grossem Gesichtsfelde, wie dem Nörremberg'schen, diejenigen Strahlen, welche in der Richtung der Axen durch die Platte hindurchgehen, nach ihrem Austritte zugleich zu übersehen, so sieht man um die Punkte, von denen die parallel den Axen hindurchgetretenen Strahlen ausgehen, helle und dunkle Ringe, welche (Fig. 205) die Form von Lemniscaten haben [2]). Diese Kurven sind geometrisch definirt durch die Eigenschaft, dass das Produkt der von den beiden Polen c und c' zu irgend einem Punkte m der Kurve gezogenen Leitstrahlen eine constante Grösse ist, wo auch der Punkt m auf der Kurve liegt. Der Werth dieser constanten Grösse ändert sich von einer Kurve zur andern; er ist ein anderer für die Kurve α, ein anderer für β oder γ. Diese Kurven können sowohl in der Form eines Ovals beide Pole umgeben, als auch sich in zwei Ovale zusammenziehen, deren jedes einen Pol umgibt, α, α'.

---

1) *Dove,* Farbenlehre. Versuche über Circularpolarisation. p. 244 ff. Berlin 1853. *Airy,* Poggend. Annal. Bd. XXIII.

2) *Herschel,* Philosophical Transactions for the year 1820. On Light. art. 902 ff.

Man sieht nun um jeden Pol der Krystallplatte zunächst eine Anzahl heller und dunkler Ovale, von denen das folgende immer grösser ist, weiter-

Fig. 205.

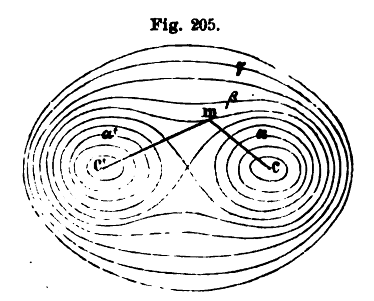
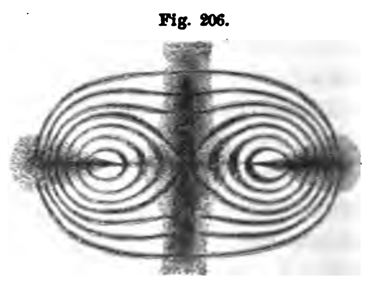


Fig. 206.



hin berühren sich die beiden Ovale, so dass beide Kurven die Form einer 8 erhalten, und noch weiter vereinigen sich beide Ovale zu einem einzigen, welches beide Pole umgibt (Fig. 206). Bei gekreuzten Nicols ist dieses Ringsystem von schwarzen, bei parallelen von hellen Büscheln durchschnitten. Fällt die durch die beiden Pole gelegte Richtung, also die Ebene der optischen Axen mit der Polarisationsebene des einen Nicols zusammen, so bilden die Büschel ein einfaches geradliniges Kreuz wie Fig. 206, dessen Arme den Polarisationsebenen der beiden Nicols parallel sind. Dreht man den obern Nicol aus der gekreuzten in die parallele Lage, so geht das schwarze Kreuz in ein weisses über, während die vorher hellen Ringe dunkel, die dunklen hell werden.

Dreht man bei unveränderter Stellung der Nicols die Platte in ihrer Ebene, so bleibt die Gestalt der Ringe ganz ungeändert, sie drehen sich

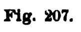


Fig. 207.

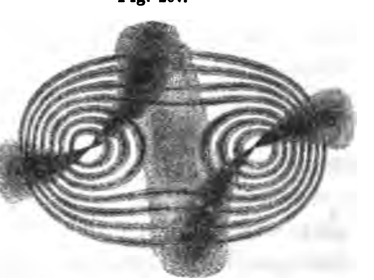


Fig. 208.

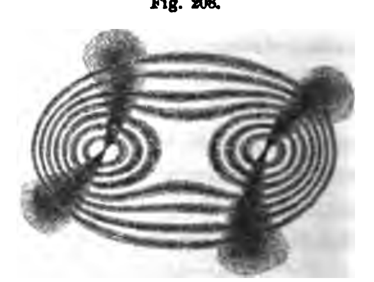


Fig. 209.



nur einfach mit der Platte, die schwarzen Büschel dagegen ändern ihre Gestalt; anstatt ein geradliniges Kreuz bilden sie jetzt Hyperbeln, welche aber stets durch die Pole gehen. Fig. 207 zeigt sie, wie man sie sieht, wenn die Platte nur sehr wenig aus der ersten Lage gedreht ist, Fig. 208 nach einer Drehung von ungefähr $22\frac{1}{2}°$, Fig. 209 nach einer Drehung von 45°.

Ist der Axenwinkel der Krystalle zu gross, so übersieht man nur eins der um die beiden Pole gelegten Ringsysteme.

Das Auftreten der Ringe sowohl als der schwarzen Büschel erklärt sich aus denselben Principien, aus welchen wir die in einaxigen Krystallen beobachteten Erscheinungen ableiteten.

Parallel den optischen Axen geht das Licht ohne Doppelbrechung hindurch, dort kann daher keine Interferenz stattfinden, die Pole erscheinen daher immer dunkel, wenn die Nicols gekreuzt sind. Denken wir uns nun durch jeden der Pole eine Linie gelegt, so werden alle auf den verschiedenen Punkten dieser Linie austretenden Strahlen doppelt gebrochen sein, und daher einen Unterschied der Phase beim Austritt zeigen, der um so grösser ist, je weiter man sich von dem Pole entfernt. In einem gewissen Abstande ist die Phasendifferenz $^1/_2\,\lambda$, in einem grössern λ, weiter $^3/_2\,\lambda$ u. s. f.

Dreht sich die Linie in der Ebene der Platte um den Pol, so können wegen der verschiedenen Doppelbrechung an den verschiedenen Seiten der Axe die Abstände, in welchen die Phasendifferenzen $^1/_2\,\lambda$, λ, $^3/_2\,\lambda$ werden, auf jener Linie in den verschiedenen Lagen nicht gleich sein. Deshalb müssen die hellen und dunklen Linien von der Kreisform abweichen, und die Rechnung ergibt mit der Beobachtung übereinstimmend, dass die Ringe die Form von Lemniscaten annehmen müssen. Die dunklen Büschel rühren von den Strahlen her, welche in dem Krystall nur einfach gebrochen werden. Demnach müssen alle die Punkte dunkel erscheinen, welche so liegen, dass die Polarisationsebene der an ihnen austretenden Strahlen im Krystall der Polarisationsebene des einfallenden Lichtes parallel ist.

Fällt nun z. B. die durch die Pole gelegte Richtung also die Ebene der optischen Axen mit der untern Polarisationsebene zusammen, so werden alle in dieser und der darauf senkrechten Ebene einfallenden Strahlen nur einfach gebrochen. Denn die in der Ebene der optischen Axen einfallenden Strahlen werden in einem zweiaxigen Krystalle immer in zwei zerlegt, deren Polarisationsebene der Ebene der optischen Axe parallel und zu ihr senkrecht ist; ist demnach der einfallende Strahl der Ebene der optischen Axen parallel polarisirt, so kann keine Doppelbrechung eintreten. Die Einfallsebene der Strahlen, welche den andern Balken des schwarzen Kreuzes bildet, ist die durch die erste Mittellinie und die Axe der mittlern Elasticität gelegte Ebene. Alle Strahlen, welche in einen zweiaxigen Krystall in dieser Ebene eintreten, werden in zwei zerlegt, deren Schwingungen der zweiten Mittellinie parallel oder zu ihr senkrecht sind. Wenn demnach die Schwingungen des eintretenden Lichtes schon zur zweiten Mittellinie senkrecht sind, so kann auch dort keine Doppelbrechung eintreten.

Wird der Krystall gedreht, so liegen die Punkte, in welchen Strahlen austreten, deren Polarisationsebene im Krystall derjenigen des einfallenden Lichtes parallel sind, nicht mehr auf geraden Linien, sondern wie die Rechnung zeigt, auf Hyperbeln, welche aber immer durch die Pole gehen müssen,

da die parallel den Axen durch den Krystall tretenden Wellen immer nur einfach gebrochen werden.

Dass auch hier die schwarzen Büschel immer in die Breite gezogen erscheinen, bedarf nach den Entwicklungen über die Erscheinungen in einaxigen Krystallen keiner besondern Erwähnung.

Die Ringe werden bei Anwendung verschiedenen homogenen Lichtes breiter oder enger; je kleiner die Wellenlänge des angewandten Lichtes ist, um so näher rücken die Punkte zusammen, bei denen die Phasendifferenz um eine halbe Wellenlänge zugenommen hat. Bei Anwendung weissen Lichtes erscheinen deshalb anstatt der hellen und dunklen Ringe farbige wie bei den einaxigen Krystallen.

Wären nun, wie es bei den einaxigen Krystallen die Regel ist, die optischen Axen für alle Farben gleich gelegen, so würde die Farbenfolge wie dort mit derjenigen der Newton'schen Ringe übereinstimmen. Ist das nicht der Fall, so zeigen die Ringe andere Farbenfolge. Die verschiedene Lage der optischen Axen lässt sich am besten an der Färbung des ovalen Fleckes erkennen, welcher von dem ersten die Pole umgebenden Ringe eingeschlossen wird. Ist der Winkel, welchen die optischen Axen für rothes Licht bilden, kleiner als derjenige für blaues Licht, so ist die dem andern Pole zugewandte Seite des ovalen Fleckes roth, die abgewandte blau gefärbt, ist der Winkel der optischen Axen für rothes Licht grösser, so ist die Färbung umgekehrt. Ersteres ist der Fall für Salpeter, Arragonit, schwefelsauren Baryt, letzteres beim Glimmer, Topas, schwefelsaurer Magnesia.

Der Grund hierfür liegt, wie leicht zu übersehen, darin, dass der ovale Fleck diejenige Fläche ist, in welcher die Phasendifferenz von 0 am Pole, bis zu λ, in dem ersten dunklen Ringe, zunimmt. Diese Fläche legt sich um den Pol der betreffenden Farbe herum, für eine Farbe, deren Pol der Mittellinie näher liegt, wird sich daher jene Fläche auch der Mittellinie näher befinden, und deshalb nach dieser Seite, bei hinlänglicher Verschiedenheit der Axenwinkel, über die anderen Farben hinaus erstrecken; nach aussen wird sie sich weiter erstrecken für die Farben, deren Axen grössere Winkel bilden.

Sehr auffallend ist diese Färbung im Seignette-Salz, wo der Winkel der Axen für rothes Licht 76°, für violettes dagegen nur 56° beträgt. Dort ist der ovale Fleck in ein langgezogenes Spectrum ausgedehnt.

Noch complicirter werden natürlich die Erscheinungen, wenn die optischen Axen in verschiedenen Ebenen liegen.

Da sich die hellen und dunklen Ringe in jeder Farbe um die Pole dieser Farbe legen, so erkennt man leicht, dass auch in den Ringen die Farbenfolge bei verschiedenem Axenwinkel anders werden muss; es würde hier zu weit führen die verschiedenen Modificationen zu betrachten [1]).

---

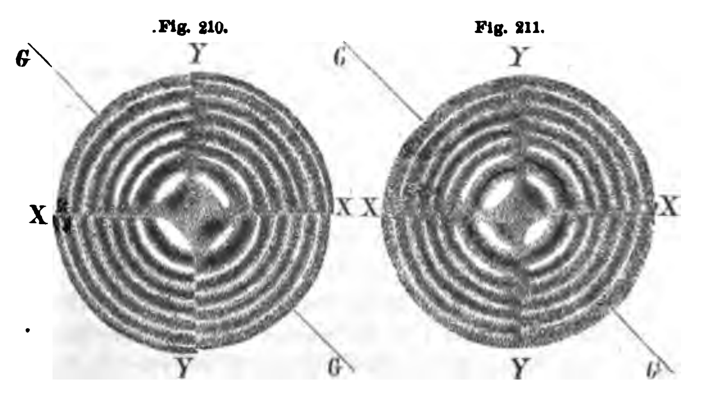
1) *Neumann,* Poggend. Annal. Bd. XXXIII. Man sehe auch *Radicke's* Optik. Bd. I. Berlin 1839.

§. 96.

Bestimmung optischer Constanten, Messung der Axenwinkel. Mit Hülfe der in den letzten Paragraphen beschriebenen Interferenzerscheinungen ist es leicht den Charakter der Doppelbrechung eines Krystalles auch ohne Kenntniss seiner krystallographischen Beschaffenheit zu bestimmen. Zunächst erkennt man aus dem Charakter der Kurven in senkrecht zur Axe oder der Mittellinie geschnittenen Platten sofort, ob man es mit einem einaxigen oder zweiaxigen Krystalle zu thun hat. Bei den einaxigen Krystallen kann man dann noch die Frage aufwerfen, ob dieselben optisch positiv oder negativ sind. Es lässt sich das sofort erkennen, wenn man zwischen die Krystallplatte und einen der Nicols ein circular polarisirendes Glimmerblättchen bringt, also entweder auf die Platte circular polarisirtes Licht fallen lässt oder das Licht nach dem Durchtritt durch die Platte circular polarisirt [1]). Man muss dazu, wie wir §. 95 bemerkten, das Glimmerblättchen so zwischen die Nicols bringen, dass die Ebene der optischen Axen mit der untern Polarisationsebene einen Winkel von 45^0 bildet.

Befindet sich ein solches Blättchen zwischen dem ersten Nicol und dem Krystall, so wird das Licht beim Eintritt in das Blättchen in zwei senkrecht zu einander polarisirte Componenten zerlegt; die Polarisationsebene der ersten ist parallel den Ebenen der optischen Axe, die der zweiten dazu senkrecht. Da die Schwingungen der ersten parallel der mittlern, die der zweiten parallel der kleinsten Elasticitätsaxe geschehen, so pflanzt sich die erstere rascher durch den Krystall fort; die senkrecht zur Ebene der optischen Axen polarisirte Componente bleibt also um $^1/_4$ Wellenlänge hinter der andern zurück, Ist nun Fig. 210 und Fig 211 *YY* die Lage der untern, *XX* die Lage der obern Polarisationsebene, *GG* die Lage der Axenebene des Glimmerblättchens, so zeigt sich in negativen Krystallen anstatt der Kreisringe mit schwarzem

Fig. 210. Fig. 211.



Axenkreuz die Fig. 210, im positiven die Fig. 211. Bei den negativen Krystallen sind in den beiden Quadranten, welche die Ebene der optischen

1) *Dove,* Poggend. Annal. Bd. XL.

Axen des Glimmerblättchens aufnehmen, die Ringe erweitert, in den beiden andern Quadranten verengert, so dass die einzelnen Ringe in vier getrennte Bögen zerfallen, von denen die in den *GG* aufnehmenden Quadranten liegenden von der Mitte um eine gewisse Grösse weiter entfernt sind, die in den beiden andern Quadranten liegenden um ebensoviel der Mitte näher liegen als es ohne Glimmerblättchen der Fall ist. Das dunkle Kreuz ist verschwunden und statt dessen erscheinen nur mehr zwei dunkle Punkte, welche auf der Linie *GG* liegen, in der Nähe des Mittelpunktes *O*. Bei positiven Krystallen ist die Erscheinung nur in sofern anders, als die Fig. 210 um 90° gedreht erscheint; was bei negativen in den die Richtung *GG* aufnehmenden Quadranten liegt, findet sich bei positiven in den beiden anderen. Kennt man demnach die Lage der Axenebene in dem Glimmerblättchen, so lehrt ein Blick in den Polarisationsapparat sofort den Charakter des in demselben befindlichen einaxigen Krystalles kennen.

Wir können die Erscheinung leicht durch Benutzung der für gekreuzte Platten entwickelten allgemeinen Gleichung ableiten, kommen aber noch kürzer zum Ziel, wenn wir die Rechnung direkt durchführen [1]. Sei deshalb die Gleichung eines an der untern Grenze des Glimmerblättchens ankommenden Strahles

$$y = \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

so wird derselbe im Glimmerblättchen in zwei zerlegt, deren einer parallel, deren anderer senkrecht zu *GG* polarisirt ist; bildet dann *GG* mit der Polarisationsebene des Nicols den Winkel β, so sind nach dem Durchtritt durch das Blättchen die beiden Componenten

$$y_o = \cos\beta \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + \varDelta}{\lambda}\right) = \cos\beta \cdot \sin\xi,$$

$$y_e = -\sin\beta \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + \varDelta}{\lambda} - {}^1/_4\right),$$

wenn wir mit $\varDelta$ die Verschiebung der Phase des ordentlichen Strahles bezeichnen; für y_e können wir auch schreiben

$$y_e = \sin\beta \cdot \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + \varDelta}{\lambda}\right) = \sin\beta \cdot \cos\xi.$$

Jeder dieser beiden Strahlen wird nun bei dem Durchtritt durch die Krystallplatte wieder in zwei Componenten zerlegt; betrachten wir einen Hauptschnitt, der mit dem untern Nicol den Winkel α bildet, so werden die vier Componenten, nachdem sie durch den Nicol, dessen Polarisationsebene mit der des untern den Winkel χ bilde, wieder in einer Ebene polarisirt sind, wie man ganz analog den Entwicklungen des §. 90 für gekreuzte Platten erhält,

1) *Airy*, Poggend. Annal. Bd. XXIII.

$$y_{oo} = \cos(\chi - \alpha) \,.\, \cos(\alpha - \beta) \,.\, \cos\beta \,.\, \sin(\xi - \delta_o)$$
$$y_{eo} = \cos(\chi - \alpha) \,.\, \sin(\alpha - \beta) \,.\, \sin\beta \,.\, \cos(\xi - \delta_o)$$
$$y_{oe} = -\sin(\chi - \alpha) \,.\, \sin(\alpha - \beta) \,.\, \cos\beta \,.\, \sin(\xi - \delta_e)$$
$$y_{ee} = \sin(\chi - \alpha) \,.\, \cos(\alpha - \beta) \,.\, \sin\beta \,.\, \cos(\xi - \delta_e),$$

worin δ_o die Verschiebung der Phase des im Krystall ordentlich gebrochenen, δ_e die des ausserordentlich gebrochenen Strahles bedeutet.

Wir zerlegen nun jeden Strahl in zwei, deren einer die Phase ξ, deren anderer die Phase $\xi - {}^1/_2\pi$ hat, und erhalten dann die resultirende Intensität, indem wir die Quadrate der Amplituden der zwei Strahlen addiren. Es wird nicht nothwendig sein, die Rechnungen durchzuführen, da sie frühern ähnlichen ganz analog sind, und auch die Reductionen nicht schwer zu übersehen sind. Die resultirende Intensität wird

$$R = {}^1/_2 \{1 + \cos 2(\chi - \alpha) \cos 2(\alpha - \beta) \cos 2\beta$$
$$- \cos 2\beta \sin 2(\alpha - \beta) \sin 2(\chi - \alpha) \cos(\delta_e - \delta_o)$$
$$- \sin 2\beta \,.\, \sin 2(\chi - \alpha) \sin(\delta_e - \delta_o)\} \cdot$$

Um circular polarisirtes Licht zu erhalten, müssen wir nun $\beta = 45^0$ machen; dann wird

$$R = {}^1/_2 \{1 - \sin 2(\chi - \alpha) \,.\, \sin(\delta_e - \delta_o)\}$$

und nehmen wir schliesslich an, die beiden Nicols seien gekreuzt, so wird

$$R = {}^1/_2 \{1 - \sin 2\alpha \,.\, \sin(\delta_e - \delta_o)\} \cdot$$

Nach §. 89 ist nun für einaxige Krystalle

$$\Delta = \delta_e - \delta_o = \left(\frac{d}{2\,\omega}(\varepsilon^2 - \omega^2) \cdot \sin^2 i\right) \cdot \frac{2\pi}{\lambda},$$

worin für negative $\varepsilon > \omega$, für positive $\varepsilon < \omega$ ist, so dass wir für negative erhalten

$$R = {}^1/_2 \left\{1 - \sin 2\alpha \sin \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{d}{2\,\omega} \cdot (\varepsilon^2 - \omega^2) \sin^2 i\right\}$$

und für positive

$$R = {}^1/_2 \left\{1 + \sin 2\alpha \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{d}{2\,\omega}(\omega^2 - \varepsilon^2) \sin^2 i\right\},$$

worin jetzt die Argumente der Sinus positiv sind.

Ohne Glimmerblättchen war unter diesen Verhältnissen das schwarze Kreuz zu sehen, und überall wo die Phasendifferenz $n\lambda$ war, ein dunkler Ring. Jetzt dagegen ist für $\alpha = 0$ und $\alpha = 90^0$ das zweite Glied gleich Null, somit an Stelle des schwarzen ein allerdings schmales helles Kreuz.

Bei negativen Krystallen ist dann zunächst für

$$\Delta = \frac{d}{2\,\omega}(\varepsilon^2 - \omega^2) \sin^2 i = \frac{\lambda}{4},$$
$$R = {}^1/_2 (1 - \sin 2\alpha),$$

somit für $\alpha = 45^0$ gleich Null, es liegen somit in der Nähe des Mittelpunkts, bei negativen Krystallen in der Richtung der Axenebene des Glimmers von ihm entfernt, zwei schwarze Flecke.

In den die Axenebene des Glimmers aufnehmenden Quadranten liegt der Werth von α zwischen $0^0 - 90^0$ oder zwischen $180^0 - 270^0$, somit 2α zwischen 0 und 180 oder 360 und 540, $\sin 2\alpha$ ist deshalb jedenfalls positiv. Die dunklen Ringe entsprechen also den Werthen der Phasendifferenz, welche $\sin 2\pi \frac{\varDelta}{\lambda} = + 1$ machen, also

$$\varDelta = {}^5/_4 \lambda,\ {}^9/_4 \lambda \ldots \frac{4n+1}{4} \cdot \lambda.$$

In diesen Quadranten muss also an Stelle der dunklen Ringe der Werth von $\varDelta$ um $^1/_4 \lambda$ grösser sein als ohne Glimmerblatt, die Ringe sind dort weiter von der Mitte entfernt.

In den beiden andern Quadranten ist α zwischen $90^0 - 180^0$ und zwischen $270 - 360^0$, somit $\sin 2\alpha$ jedenfalls negativ; hier treten also die dunklen Ringe dort auf, wo $\sin 2\pi \frac{\varDelta}{\lambda} = - 1$, somit wo

$$\varDelta = {}^3/_4 \lambda,\ {}^7/_4 \lambda \ldots \frac{4n-1}{4} \cdot \lambda,$$

es muss also der Werth von $\varDelta$ um $^1/_4 \lambda$ kleiner sein als ohne Glimmerblatt, die Ringe liegen der Mitte um ebenso viel näher, als sie in den beiden andern Quadranten weiter von der Mitte entfernt sind.

Da nun für positive Krystalle das zweite Glied, wenn $\sin 2\alpha$ positiv ist, positiv ist, so folgt, dass bei diesen in den Quadranten 0—90 und 180—270 die Erscheinung so ist, wie bei den negativen in den beiden andern Quadranten und umgekehrt.

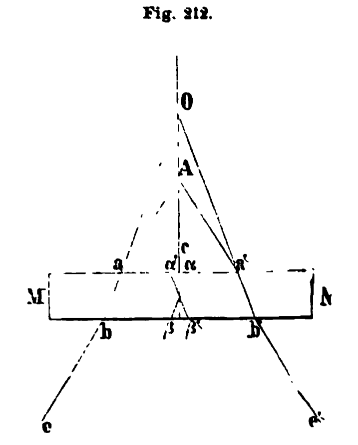
Da im Uebrigen die optischen Verhältnisse sich bei einaxigen Krystallen direkt aus der krystallographischen Beschaffenheit ergeben, sind die einaxigen Krystalle auf diese Weise vollständig bestimmt.

Von besonderer Wichtigkeit sind die Farbenerscheinungen in zweiaxigen Krystallen deshalb, weil sie ein leichtes Mittel an die Hand geben, die Lage der Hauptrichtungen in optischer Beziehung zu erkennen, die aus der krystallographischen Beschaffenheit, wie wir sahen, nicht immer geschlossen werden kann. Beobachtet man in einer Krystallplatte das Lemniscatensystem, so weiss man, dass die durch die Pole gelegte, zur Ebene der Platte senkrechte Ebene die Ebene der optischen Axen ist. Kann man in einer gegebenen Krystallplatte nur eines der Ringsysteme übersehen, so hat man sie in einer bestimmten Ebene zu drehen, damit das den andern Pol umgebende Ringsystem sichtbar wird; diese Ebene ist dann die der optischen Axen. Die auf dieser Ebene senkrechte Richtung ist dann die Axe der mittlern Elasticität; die Axen der grössten und kleinsten Elasticität sind die beiden Mittellinien der optischen Axen, man erhält dieselben durch eine Messung der Axenwinkel.

Zur Messung derselben ist der Dove'sche Polarisationsapparat recht geeignet [1]); man versieht das zweite Nicol'sche Prisma mit einem Ocular und Fadenkreuz und ersetzt den Ring *k* (Fig. 184) durch einen in der Axe eines verticalen Kreises befestigten Ring. Der Kreis ist getheilt und mit einem Index versehen, welcher die Grösse der Drehung abzulesen gestattet. Man befestigt nun die Krystallplatte, so dass ihre Begrenzungsebenen zur Axe des Instrumentes senkrecht sind, wie wir es bisher immer annahmen, und zugleich, dass die Ebene der optischen Axen vertical ist, wenn der getheilte Kreis auf dem Nullpunkte einsteht. Darauf dreht man nun mit dem Ringe den Krystall um die Axe des Kreises so lange, bis der Kreuzungspunkt des Fadenkreuzes mit dem einen Pole zusammenfällt, und beobachtet die Stellung des Kreises; dann stellt man ebenso durch Zurückdrehen des Kreises den andern Pol der Ringfigur ein, und hat dann in dem Winkel, um welchen man den Kreis gedreht hat, den scheinbaren Winkel der optischen Axen, das heisst den Winkel, welchen die Strahlen nach ihrem Austritte aus dem Krystall mit einander bilden, die den Krystall in der Richtung der optischen Axen durchsetzt haben.

Den Winkel der optischen Axen erhält man dann aus dieser Beobachtung mit Hülfe des mittlern Brechungsexponenten β. Denn ist *MN* (Fig. 212) die Krystallplatte, $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ die Richtung der optischen Axen, so ist der Winkel aAa' derjenige, welchen man gemessen hat. Die Hälfte dieses Winkels aAc ist demnach derjenige Winkel, welchen die Strahlen, welche im Krystall in der Richtung der optischen Axe sich fortgepflanzt haben, nach ihrem Austritte mit dem Einfallslothe bilden. Da nun der Brechungsexponent der in der Richtung der optischen Axe sich fortpflanzenden Wellen gleich β ist, so berechnet man nach dem Brechungsgesetze den Winkel aOc, welchen ab mit Ac bildet, und daraus den Winkel der optischen Axen.

Fig. 212.



Auf diese Weise ist für die meisten zweiaxigen Krystalle die Richtung der optischen und Elasticitätsaxen, sowie ihre Beziehung zu den krystallographischen Hauptrichtungen festgestellt worden, für welche die sonstigen optischen Constanten noch nicht bestimmt sind. Kennt man die Richtung dieser, so kann man in der §. 84 und 85 angegebenen Weise die sonstigen optischen Constanten bestimmen.

---

1) *Dove*, Poggend. Annal. Bd. XXXV. Farbenlehre. p. 203. II. Aufl. Berlin 1853. Man sehe auch *v. Lang*, Verbesserter Axenwinkel-Apparat. Sitzungsberichte der Wiener Akademie. Bd. LV. *Descloiseaux*, Poggend. Annal. Bd. CXXVI.

§. 97.

Doppelbrechung in gepressten und gekühlten Gläsern. Mit Hülfe der Interferenz des polarisirten Lichtes gelang es zuerst Brewster [1]) und Seebeck [2]), den innigen Zusammenhang zwischen der Doppelbrechung und den Elasticitätsverhältnissen der Körper auch an nicht krystallinischen Substanzen nachzuweisen. Brewster fand, dass in allen Körpern, deren Substanz nach verschiedener Richtung verschiedene Elasticität hat, Interferenzerscheinungen auftreten, wenn man sie im polarisirten Lichte betrachtet. Presst man eine quadratische Glastafel mit planparallelen Ebenen von zwei gegenüberliegenden Punkten ihrer Ränder *a* und *b* Fig. 213 zusammen, so dass

Fig. 213.

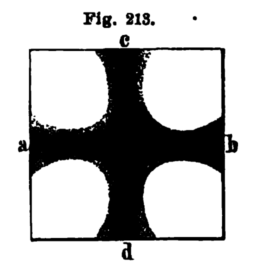
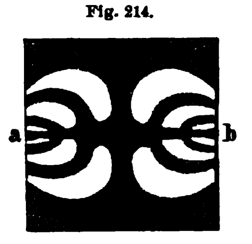


Fig. 214.



sie in der Richtung *ab* comprimirt wird, so zeigt sie zwischen gekreuzten Nicols, und wenn die Richtung *ab* der Polarisationsebene des einen parallel ist, das schwarze Kreuz und bei schwachem Drucke in den vier Feldern eine Farbe der ersten Ordnung wie ein sehr dünnes Krystallblättchen. Steigert man den Druck, so ändert sich die Farbe der Felder und es bilden sich nach und nach um die Punkte *a* und *b* helle und dunkle, im weissen Licht farbige Ringe (Fig. 214). Die Ringe haben Aehnlichkeit mit den Lemniscaten der zweiaxigen Krystalle.

In der That treten nach den im ersten Theil vorgetragenen Lehren über Elasticität in einer so comprimirten Platte drei Axen der Elasticität auf, indem die Compression parallel *ab* eine Ausdehnung parallel *cd* und eine von dieser verschiedene Ausdehnung senkrecht zur Ebene *abcd* zur Folge hat. Diese Compression und Ausdehnung muss eine Aenderung der Lagerung der Moleküle und mit dieser der Elasticität des Glases nach verschiedenen Richtungen zur Folge haben. Wie Brewster's Versuche zeigen, nimmt die Elasticität des Aethers im Glase an dieser Aenderung Theil; das Glas wird doppelbrechend.

Das Auftreten und die Aenderung der Ringe bei stärkerem Drucke beweist, dass die Doppelbrechung des Glases mit dem Drucke zunimmt, dass

1) *Brewster*, Philosophical Transactions for 1815, for 1816. Edinburgh Transact. Vol. VIII.

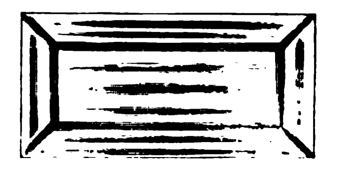
2) *Seebeck*, Schweigger Journal. Bd. VII.

die Phasendifferenzen der nach derselben Richtung austretenden Strahlen grösser werden; eine Verstärkung des Druckes bewirkt also dasselbe, was bei Krystallplatten die Anwendung dickerer Platten hervorbringt. Es gelang Dove[1]), den Druck so zu normiren, dass sich die Glasplatte gerade so verhält, wie ein dünnes circular polarisirendes Glimmerblättchen, dass das aus den Eckfeldern hervortretende Licht circular polarisirt war. Ja, wie Dove zeigte, ist diese Methode zur Erzeugung circular polarisirten Lichtes bequemer als das mühsame Abspalten von Glimmerblättchen, da man mit passenden Apparaten die Stärke des Druckes ganz in seiner Hand hat.

Man kann durch die Compression des Glases Erscheinungen hervorbringen, welche dem Ringsysteme in einaxigen Krystallen mit dem Kreuz ganz analog sind. Man erhält dieselben, wenn man eine convexe Glaslinse in der Richtung ihrer Axe in ihrer Mitte zusammenpresst, oder wenn man einen massiven Glascylinder mit einem Metalldrahte straff umwindet und dann in der Richtung der Axe hindurchsieht.

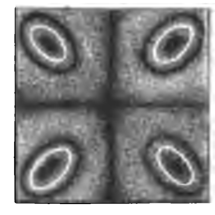
Aehnliche Erscheinungen zeigen Glasstücke im Polarisationsapparate, welche ungleichmässig erwärmt oder abgekühlt werden[2]). Wenn man z. B. ein parallelepipedisches Glasstück auf eine heisse Metallplatte legt, und so zwischen gekreuzten Nicols aufstellt, so sieht man die Fig. 215, wenn die Polarisationsebenen der Nicols mit der auf der heissen Metallplatte liegenden Grundfläche Winkel von 45° bilden. Das Gesichtsfeld ist durch dunkle Linien in fünf Felder getheilt, in welchen den dunklen Linien parallel sich farbige Streifen zeigen. Bei fortschreitender Erhitzung ändert sich sowohl die Figur als auch die Anordnung der Farben.

Fig. 215.



Wenn man ein cylindrisches Glasstück vom Umfange aus gleichmässig erwärmt, so zeigt es die Ringfigur der einaxigen Krystalle mit dem schwarzen Kreuze, erwärmt man ein ovales Glasstück gleichmässig vom Umfange aus, so erhält man beim Durchsehen parallel der Axe die Ringfigur zweiaxiger Krystalle.

Fig. 216.



Gleiches erhält man beim Abkühlen erhitzten Glases, indem man es z. B. auf eine kalte Metallplatte legt.

Man kann den Gläsern die doppelbrechenden Eigenschaften auch bleibend beibringen, indem man geglühte Gläser schnell erkalten lässt. So erhält man z. B. die Erscheinung (Fig. 216), wenn man einen nicht zu stark erhitzten Glaswürfel rasch abkühlt, und ihn dann so zwischen die Nicols

1) *Dove,* Farbenlehre. Versuche über Circularpolarisation. Berlin 1853. Poggend. Annal. Bd. XXXV.

2) *Brewster,* Philosophical Transactions for 1814; 1815; 1816.

bringt, dass seine Seiten den Polarisationsebenen derselben parallel sind. Es erscheint ein schwarzes Kreuz und in jedem der vier Felder ein farbiges Ringsystem. Die Figur ändert sich, wenn die Polarisationsebenen gegen die Würfelseiten eine andere Lage annehmen.

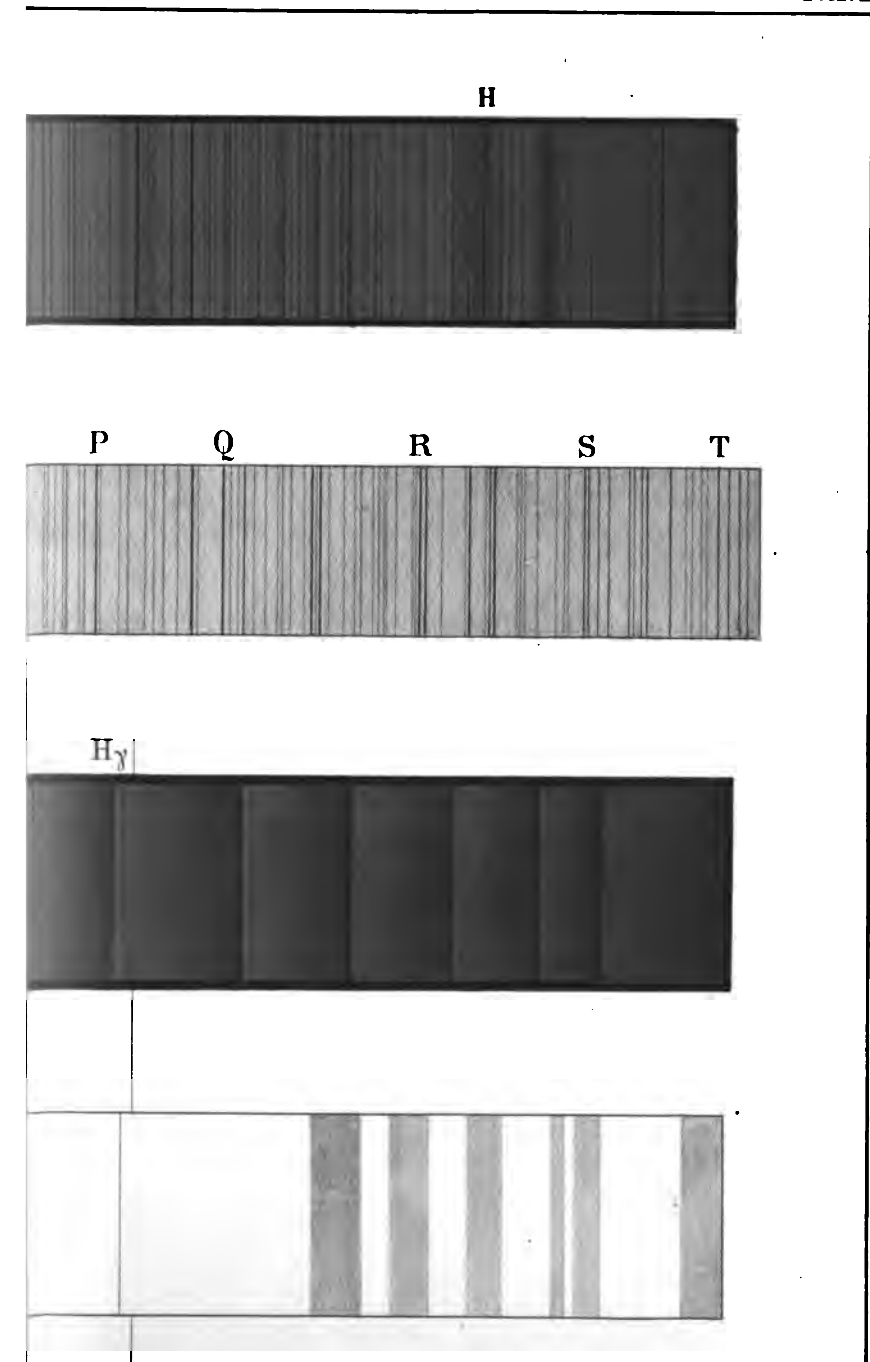
Dass auch in den zuletzt erwähnten Erscheinungen die geänderte Elasticität des Glases, die in der schlechten Wärmeleitung desselben ihren Grund hat, das Bedingende ist, wird in dem folgenden Theile in der Wärmelehre deutlich werden[1]).

Die durch künstliche Mittel erzeugte Doppelbrechung unterscheidet sich jedoch in einer Beziehung von derjenigen in krystallinischen Mitteln wesentlich, sie ist nicht in jedem Stückchen des Glases, in welchem sie erzeugt ist, dieselbe, sondern haftet an dem bearbeiteten Glasstücke als solchem. Ein Beispiel wird das klarer machen. In einer Doppelspathplatte, welche senkrecht zur Axe geschnitten ist, ist die Axe nur eine Richtung, nicht eine bestimmte Linie; wenn man daher eine solche Platte auch zur Hälfte bedeckt, so zeigt sie immer das ganze Ringsystem; anders in einem künstlich einaxigen Glase, dort ist die Axe eine bestimmte Linie; bedeckt man daher einen Theil der Oberfläche, durch welche das Licht austritt, so verschwindet ein entsprechender Theil des Ringsystems[2]).

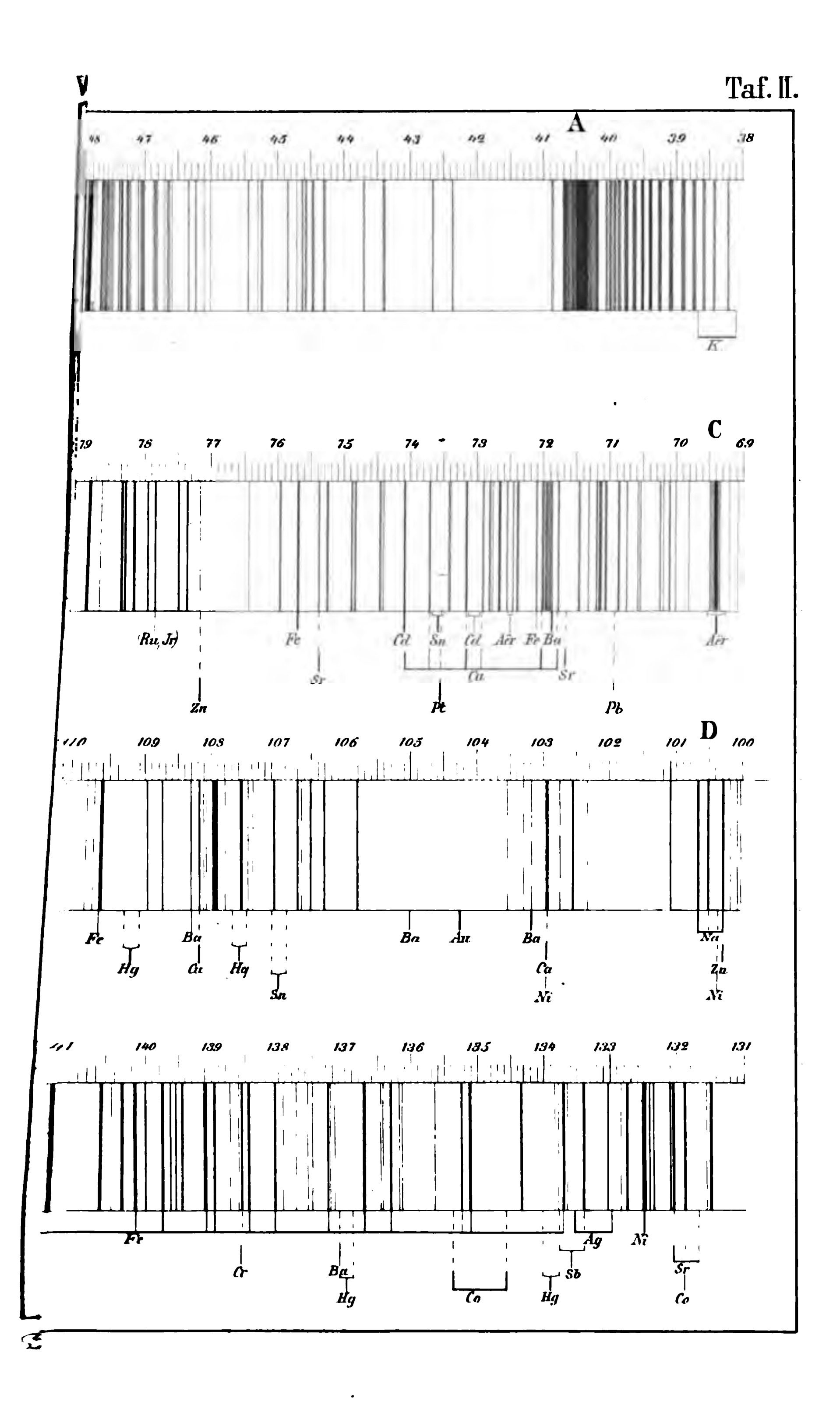
1) Man sehe auch *Neumann*, Poggend. Annal. Bd. LIV.

2) *Brewster* a. a. O.

Taf. I.



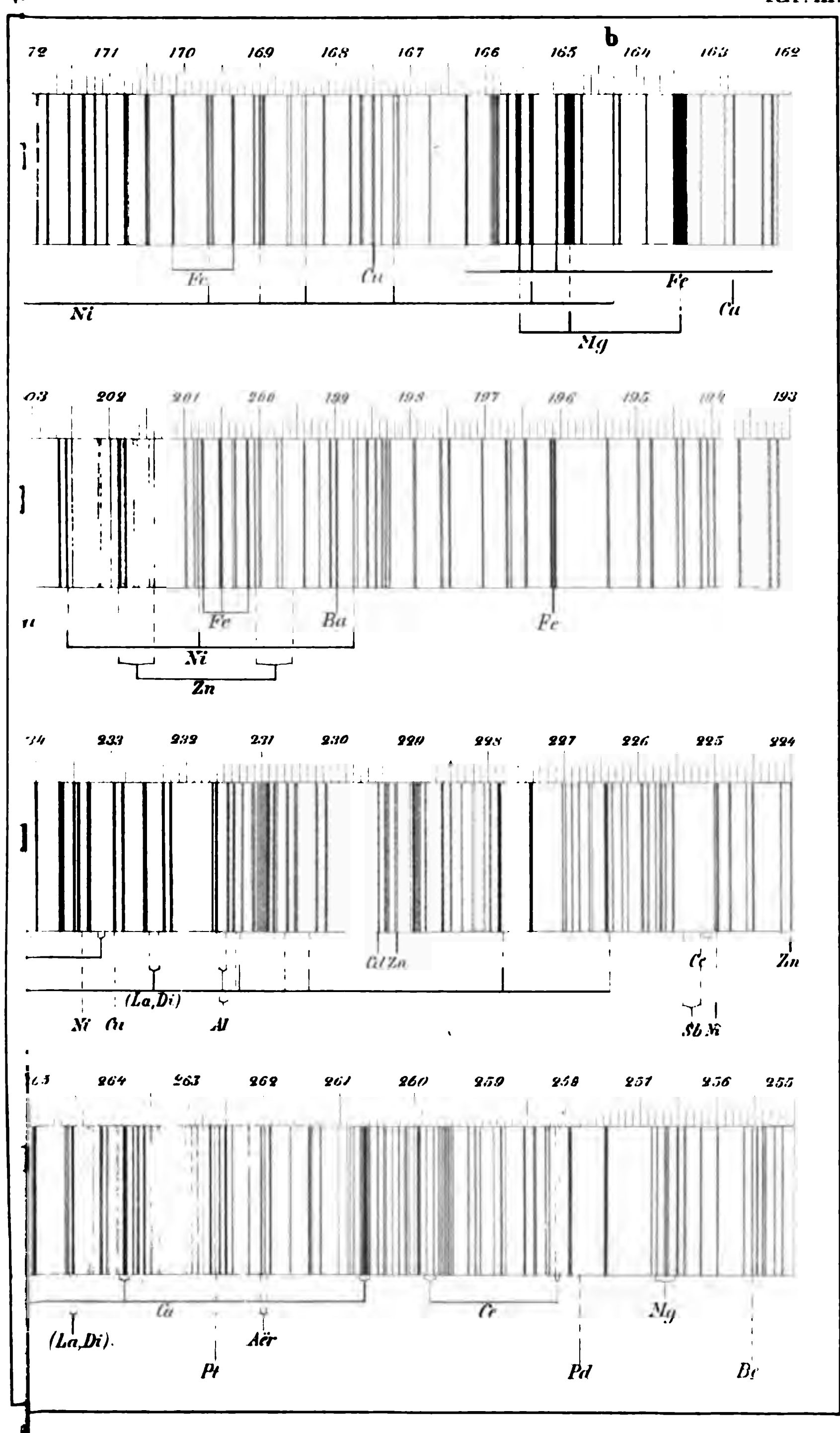
Taf. II.

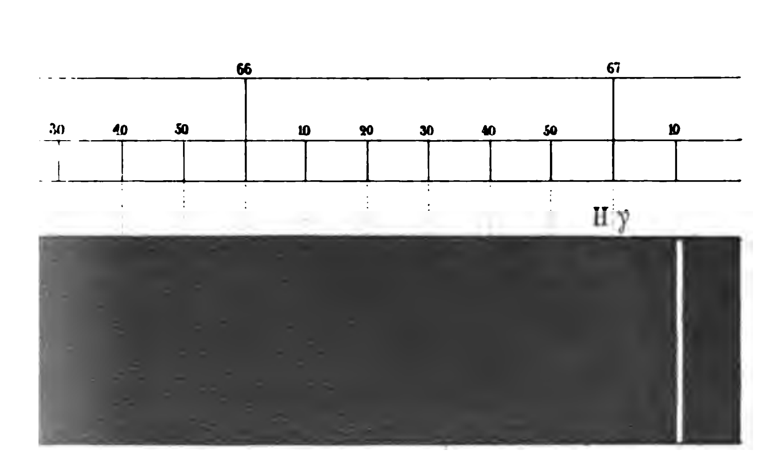


A
48
47
46
45
44
43
42
41
40
39
38
K
C
79
78
77
76
75
74
73
72
71
70
69
(Ru, Ir)
Fe
Sr
Cd
Sn
Cd
Ca
Fe
Ba
Sr
Zn
Pt
Pb
D
110
109
108
107
106
105
104
103
102
101
100
Fe
Hg
Ba
Ca
Hg
Sn
Ba
Au
Ba
Ca
Ni
Na
Zn
Ni
140
139
138
137
136
135
134
133
132
131
Fe
Cr
Ba
Hg
Co
Hg
Sb
Ag
Ni
Sr
Co



Taf. III.


b
Fe
Cu
Fe
Ni
Cu
Mg
Fe
Ba
Fe
Ni
Zn
(La,Di)
Ni
Cu
Al
Cd Zn
Cd
Zn
Sb
Ni
Ca
(La,Di).
Aër
Pt
Cr
Pd
Mg
Be







Lith. Inst. v. A. Schütze Berlin.







